

НАУКА и ТЕХНИКА

Международный
научно-технический журнал

Издается с января 2002 года
Периодичность издания –
один раз в два месяца

Учредитель
Белорусский
национальный технический
университет



Science and Technique

International
Scientific and Technical Journal

Published from January 2002
Publication frequency –
bimonthly

Founder
Belarusian
National Technical
University

Vol. 23 / No 4 / 2024

Журнал включен в базы данных:
Web of Science (ESCI), EBSCO, DOAJ, WorldCat, OpenAIRE,
Google Scholar, РИНЦ, ЭБС «Лань», НЭБ «КиберЛенинка», Соционет

The Journal is included in the following databases:
Web of Science (ESCI), EBSCO, DOAJ, WorldCat, OpenAIRE,
Google Scholar, RISC, Lan, CyberLeninka, Socionet

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Вычислительная техника и управление

Computer Engineering and Control

Пэнхао Гу, Лобатый А. А.
Синтез стабилизирующего управления
мультикоптером 271

Penghao Gu, Lobaty A. A.
Synthesis of Multicopter Stabilizing
Control 271

Машиностроение и машиноведение

Mechanical Engineering and Engineering Science

Дьяконов О. М., Литвинко А. А.
Исследование влияния схемы и режимов
прессования стальной и чугуновой стружки
на энергосиловые параметры
процесса брикетирования 279

Dyakonov O. M., Litvinko A. A.
Research of the Influence of the Scheme
and Modes of Pressing Steel and Cast Iron Chips
on the Energy-Power Parameters
of the Briquetting Process 279

Механика деформируемого твердого тела

Deformation in Solid Mechanics

Босаков С. В., Козунова О. В.
Функции Грина для статически неопределимых
однопролетных балок 289

Bosakov S. V., Kozunova O. V.
Green's Functions for Statically Indeterminate
Single-Span Beams 289

Степаненко Д. А., Киндрук А. Н.
 Вариационная задача о колебаниях
 неравнотолщинных колец и ее применение
 для расчета концентраторов ультразвуковых
 колебаний 295

Stepanenko D. A., Kindruk A. N.
 Variational Problem on Vibrations
 of Unequal-Thickness Rings and Its Application
 for Calculating Ultrasonic Vibration
 Concentrators 295

Строительство

Civil and Industrial Engineering

Самуйлов Ю. Д., Батыновский Э. И.
 Малоэнергетическая технология изготовления
 и физико-технические свойства ячеистого бетона
 безавтоклавного твердения
 на гранитоидном микрозаполнителе 304

Xianpeng Wang, Haoxuan Yu, Jiao Bo,
Jundong Lv, Kovshar S. N., Leonovich S. N.
 Numerical Modeling and Simulation
 of Non-Metallic Fiber-Reinforced Concrete:
 Assessing the Structural Performance
 with Emphasis on Reeds and Coconut Shells
(Сяньпэн Ван, Хаосюань Ю., Цзяо Бо,
Цзюньдун Люй, Ковшар С. Н., Леонович С. Н.
 Численное моделирование и симуляция
 неметаллического волокнистого бетона:
 оценка структурной производительности
 с акцентом на тростник и кокосовую скорлупу) ... 315

Федорович П. Л.
 Нормализация гранулометрии мелкого
 заполнителя для конструкционных бетонов 325

Samuilov Yu. D., Batyanovsky E. I.
 Low-Energy Manufacturing Technology
 and Physical and Technical Properties of Cellular
 Concrete Autoclave-Free Hardening
 on Granitoid Micro-Filler. 304

Xianpeng Wang, Haoxuan Yu, Jiao Bo,
Jundong Lv, Kovshar S. N., Leonovich S. N.
 Numerical Modeling and Simulation
 of Non-Metallic Fiber-Reinforced Concrete:
 Assessing the Structural Performance
 with Emphasis on Reeds and Coconut Shells 315

Fedarovich P. L.
 Normalization of Fine Aggregate Granulometry
 for Structural Concrete 325

Транспорт

Transport

Захаров Д. А., Чикишев Е. М., Капский Д. В.,
Скиркоцкий С. В.
 Изменение параметров городской транспортной
 системы при введении платы
 с владельцев автомобилей за использование
 улично-дорожной сети и варьировании стоимости
 проезда в общественном транспорте 336

Zakharov D. A., Chikishev E. M., Kapski D. V.,
Skirkovski S. V.
 Changing the Parameters of the Urban
 Transport System with Introduction
 of Fees from Car Owners for Using
 the Road Network and Variations
 in Public Transport Fare 336

Экономика промышленности

Economy in Industry

Serenkov P. S., Romanchack V. M., Davidova E. A.,
Hurynovich A. A.
 Model for Ensuring the Reliability of Expert Quality
 Control of Products and Processes
(Серенков П. С., Романчак В. М.,
Давыдова Е. А., Гуринович А. А.
 Модель обеспечения достоверности экспертного
 контроля качества продукции и процессов) 345

Serenkov P. S., Romanchack V. M., Davidova E. A.,
Hurynovich A. A.
 Model for Ensuring the Reliability of Expert Quality
 Control of Products and Processes 345

Главный редактор
Борис Михайлович Хрусталеv

Редакционная коллегия

- Алексеев Ю. Г.** (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь), заместитель главного редактора,
- Бельи А. В.** (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь),
- Бисби Л.** (Эдинбургский университет, Эдинбург, Соединенное Королевство Великобритании и Северной Ирландии),
- Виттманн Ф. Х.** (Швейцарская высшая техническая школа Цюриха, Цюрих, Швейцарская Конфедерация),
- Дидерихс У.** (Ростокский университет, Росток, Федеративная Республика Германия),
- Дмитриев С. М.** (Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация),
- Згуровский М. З.** (Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, Украина),
- Кондерс А. Б.** (Дармштадтский технический университет, Дармштадт, Федеративная Республика Германия),
- Косёр-Казберук М.** (Белостокский технический университет, Белосток, Республика Польша),
- Леонович С. Н.** (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь), заместитель главного редактора,
- Лю Тингуо** (компания «Гаююань», провинция Хэнань, Китайская Народная Республика),
- Макнами Р. Я.** (Консультационное агентство по вопросам пожарной безопасности, Стокгольм, Королевство Швеция),
- Максаров В. В.** (Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация),
- Нгуен Тху Нга** (Научный энергетический институт, Вьетнамская академия наук и технологий, Ханой, Социалистическая Республика Вьетнам),
- Одиназода Х. О.** (Таджикский технический университет имени академика М. С. Осими, Душанбе, Республика Таджикистан),
- Опяляк М.** (Люблинский технический университет, Люблин, Республика Польша),
- Пенязков О. Г.** (Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь),

Editor-in-Chief
Boris M. Khroustalev

Editorial Board

- Aliakseyeu Yu. G.** (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus), Deputy Editor-in-Chief,
- Byeli A. V.** (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus),
- Bisby L.** (University of Edinburgh, Edinburgh, United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland),
- Wittmann F. H.** (ETH – Swiss Federal Institute of Technology Zürich, Zürich, Swiss Confederation),
- Diederichs U.** (University of Rostock, Rostock, Federal Republic of Germany),
- Dmitriev S. M.** (Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russian Federation),
- Zgurovsky M. Z.** (National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine),
- Koenders A. B.** (Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Federal Republic of Germany),
- Kosior-Kozberuk M.** (Bialystok University of Technology, Bialystok, Republic of Poland),
- Leonovich S. N.** (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus), Deputy Editor-in-Chief,
- Liu Tingguo** (Gaoyuan Company, Henan Province, People’s Republic of China),
- McNamee R. J.** (Brandskyddslaget AB, Stockholm, Kingdom of Sweden),
- Maksarov V. V.** (Saint-Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russian Federation),
- Nguyen Thu Nga** (Institute of Energy Science, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Socialist Republic of Vietnam),
- Odinazoda H. O.** (Tajik Technical University named after Academic M. S. Osimi, Dushanbe, Republic of Tajikistan),
- Opielak M.** (Lublin University of Technology, Lublin, Republic of Poland),
- Penyazkov O. G.** (A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus),

Пимьента П. (Научно-технический центр строительной отрасли, Сен-Мартен-д'Эр, Французская Республика),
Родригес Ж. П. К. (Коимбрский университет, Коимбра, Португальская Республика),
Романюк Ф. А. (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь),
Сидерис К. (Фракийский университет имени Демокрита, Комотины, Греческая Республика),
Соболев К. (Университет Висконсин-Милуоки, Милуоки, Соединенные Штаты Америки),
Сумров В. В. (компания «Интернет Коммуникаций Девелопмент Групп Лимитед», Рига, Латвийская Республика),
Феличетти Р. (Миланский технический университет, Милан, Итальянская Республика),
Чжао Цзи (Северо-Восточный университет, Шэньян, Китайская Народная Республика),
Чижик С. А. (Национальная академия наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь),
Шелег В. К. (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь), заместитель главного редактора,
Ши Ли И (Научно-технологический парк Шанхайского университета, Шанхай, Китайская Народная Республика),
Эберхардштайнер Й. (Венский технический университет, Вена, Австрийская Республика),
Янковский А. (Технологический институт ВВС, Варшава, Республика Польша)

Ответственный секретарь редакционной коллегии
В. Г. Горбаш

Pimienta P. (Scientific and Technical Centre for the Building – CSTB Department, Saint-Martin-d'Hères, French Republic),
Rodrigues J. P. C. (University of Coimbra, Coimbra, Portuguese Republic),
Romaniuk F. A. (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus),
Sideris K. (Democritus University of Thrace, Komotini, Hellenic Republic),
Sobolev K. (University of Wisconsin-Milwaukee, Milwaukee, United States of America),
Sumrov V. V. (Internet Communication Development Group Ltd – ICD, Riga, Republic of Latvia),
Felicetti R. (Polytechnic University of Milan, Milan, Italian Republic),
Zhao Ji (Northeastern University, Shenyang, People's Republic of China),
Chizhik S. A. (National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus),
Sheleg V. K. (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus), Deputy Editor-in-Chief,
Shi Li Yi (Science and Technology Park of Shanghai University, Shanghai, People's Republic of China),
Eberhardsteiner J. (Vienna University of Technology, Vienna, Republic of Austria),
Jankowski A. (Air Force Institute of Technology, Warsaw, Republic of Poland)

Executive Secretary of Editorial Board
V. G. Gorbash

Ведущий научный редактор

В. Н. Гурьянчик

Адрес редакции

Белорусский национальный технический университет
пр. Независимости, 65, корп. 2, комн. 327
220013, г. Минск, Республика Беларусь

Тел. +375 17 320-65-14

E-mail: sat@bntu.by
http://sat.bntu.by

Перерегистрировано в Министерстве информации Республики Беларусь 19 декабря 2011 г.
Регистрационный номер 285

С 2002 г. издание выходило под названием «Вестник БНТУ»

ISSN 2227-1031. Подписные индексы 00662, 006622

Подписано в печать 31.07.2024. Формат бумаги 60×84 1/8. Бумага мелованная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 11,0. Уч.-изд. л. 9,62. Тираж 65 экз. Дата выхода в свет . Заказ № .

Отпечатано в БНТУ. Лицензия ЛП № 3820000006896 от 03.03.2014.
220013, г. Минск, пр. Независимости, 65.

© Белорусский национальный технический университет, 2024

Lead Science Editor

V. N. Guryanichyk

Address

Belarusian National Technical University
Nezavisimosty Avenue, 65, Building 2, Room 327
220013, Minsk, Republic of Belarus

Tel. +375 17 320-65-14

E-mail: sat@bntu.by
http://sat.bntu.by

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-271-278>

УДК 519.711.2

Синтез стабилизирующего управления мультикоптером

Асп. Гу Пэнхао¹⁾, докт. техн. наук, проф. А. А. Лобатый¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. Статья посвящена задаче аналитического синтеза управления, стабилизирующего положение в пространстве беспилотного летательного аппарата (БЛА) мультироторного типа – мультикоптера. Проведен анализ БЛА подобного класса, определены особенности, место и отличия различных конструктивных схем среди БЛА. Обоснован вид пространственной математической модели, описывающей поступательное и вращательное движение мультикоптера, в качестве которой рассматривается модель четырехвинтового БЛА – квадрокоптера, так как такие БЛА являются широко распространенными и обладают основными свойствами, которые присущи таким летательным аппаратам. Произведен переход к линейной упрощенной модели движения БЛА путем линеаризации и обоснования основных допущений, сделанных при линеаризации математической модели. Задача определения стабилизирующего управления сводится к классической форме аналитического синтеза управления, минимизирующего заданный интегральный функционал качества. Особенностью рассматриваемого функционала качества является обоснование нормировочных коэффициентов, позволяющих привести суммируемые подынтегральные переменные различной физической природы к безразмерному виду и учесть реальные ограничения, наложенные технологическими и конструктивными особенностями конкретного БЛА на его маневренные характеристики. В результате аналитического решения задачи получены выражения для оптимального управления, представляющего собой изменения во времени величин скоростей вращения противоположных винтов квадрокоптера, позволяющие стабилизировать положение БЛА в пространстве, компенсируя внешнее нежелательное воздействие на БЛА в виде порывов воздушного потока или других факторов. Проведенное компьютерное моделирование подтвердило работоспособность разработанной методики. Приведенные графические зависимости изменения во времени переменных, характеризующих управляющее воздействие и перемещение БЛА в пространстве, наглядно показывают вид переходных процессов, позволяют оценить маневренные возможности БЛА и сформулировать основные требования к его конструктивным элементам на этапе предварительного проектирования.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, математическая модель, стабилизирующее управление, функционал качества

Для цитирования: Пэнхао, Гу. Синтез стабилизирующего управления мультикоптером / Гу Пэнхао, А. А. Лобатый // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 271–278. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-271-278>

Адрес для переписки

Лобатый Александр Александрович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65/11,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 29 346-82-56
lobaty@bntu.by

Address for correspondence

Lobaty Alexander A.
Belarusian National Technical University
65/11, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 29 346-82-56
lobaty@bntu.by

Synthesis of Multicopter Stabilizing Control

Gu Penghao¹⁾, A. A. Lobaty¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper is devoted to the problem of analytical synthesis of control that stabilizes the position in space of an unmanned aerial vehicle (UAV) of a multi-rotor type - a multicopter. An analysis of UAVs of this class has been carried out, features, place and differences among UAVs of various design schemes have been determined. The type of spatial mathematical model describing the translational and rotational motion of a multicopter is substantiated, which is considered to be a model of a four-rotor UAV – a quadcopter, since such UAVs are widespread and have the basic properties that are inherent in such aircraft devices. A transition was made to a linear simplified model of UAV movement by linearization and justification of the main assumptions made during the linearization of the mathematical model. The problem of determining stabilizing control is reduced to the classical form of analytical synthesis of control that minimizes a given integral quality functional. A feature of the considered quality functional is the justification of normalization coefficients, which make it possible to reduce the summable integrands of various physical natures to a dimensionless form and take into account the real restrictions imposed by the technological and design features of a particular UAV on its maneuvering characteristics. As a result of the analytical solution of the problem, expressions for optimal control have been obtained, which are changes in time in the rotation speeds of the opposite quadcopter propellers, allowing to stabilize the position of the UAV in space, compensating for external undesirable effects on the UAV in the form of gusts of air flow or other factors. The executed computer simulation has confirmed the efficiency of the developed methodology. The given graphical dependences of the change in time of variables characterizing the control action and movement of the UAV in space clearly show the type of transient processes and allow us to evaluate the maneuver-ring capabilities of the UAV and formulate the basic requirements for its structural elements at the preliminary design stage.

Keywords: unmanned aerial vehicle, multicopter, mathematical model, stabilizing control, quality functional

For citation: Penghao Gu, Lobaty A. A. (2024) Synthesis of Multicopter Stabilizing Control. *Science and Technique*. 23 (4), 271–278. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-271-278> (in Russian)

Введение

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) широко применяются в различных областях человеческой деятельности: от мониторинга земной поверхности до обработки растений в сельском хозяйстве, доставки грузов и др. Внедрение достижений науки и технологий в сферах микроэлектроники, информационных систем и технологий, в конструкции и системах управления БЛА позволило создать летательные аппараты, которые способны выполнять свое основное предназначение без участия человека не только на борту, но и в процессе управления авиационным комплексом.

В зависимости от принципов создания управляющей силы, изменяющей траекторию полета, и конструктивной схемы построения БЛА подразделяются на несколько групп. В широко распространенных БЛА самолетной конструктивной схемы основной составляющей управляющей силы является аэродинамическая сила, которая создается путем взаимодействия набе-

гающего потока воздуха и несущей аэродинамической поверхности. Среди других конструктивных схем можно выделить: БЛА вертолетной схемы, конвертопланы, гибридные схемы БЛА различного конструктивного исполнения [1].

В отдельную большую группу выделяют БЛА мультироторного типа, у которых управляющая сила создается размещенными на борту БЛА винтовыми или реактивными двигателями. Влияние аэродинамической силы в таких БЛА учитывается только в виде силы сопротивления воздуха. БЛА мультироторного типа называются мультикоптерами. Они в зависимости от количества двигателей подразделяются на квадрокоптеры (четыре двигателя), септокоптеры (шесть двигателей), октокоптеры (восемь двигателей) и так далее.

Решение задач анализа движения БЛА в пространстве и синтеза структуры и элементов их систем управления в значительной степени основывается на использовании математических моделей БЛА, которые позволяют без зна-

чительных материальных затрат решать ряд задач, поставленных перед разработчиками и исследователями БЛА. Математическое моделирование БЛА самолетного типа практически не отличается от моделирования пилотируемых летательных аппаратов. Оно основано на известных и апробированных законах аэродинамики и теории систем автоматического управления [2].

Математическое моделирование движения мультикоптеров

В основе построения математической модели полета мультикоптера, как правило, лежит математическая модель четырехдвигательного БЛА (квадрокоптера), как самой простой. Построение математических моделей с большим количеством двигателей (винтов) отличается проецированием сил и моментов, создаваемых двигателями БЛА на оси, связанной с конструкцией БЛА (строительной [3]) трехосевой системы координат. Следовательно, вид этих математических моделей мультикоптеров можно свести путем математических преобразований к математической модели движения квадрокоптера, которая включает в себя шесть известных уравнений поступательного и вращательного движения БЛА. Эти уравнения при заданных начальных условиях имеют следующий вид [4, 5]:

$$\dot{x} = (C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi) \frac{F}{m} - \text{sign}(\dot{x}) c_d \frac{\rho \dot{x}^2}{2} S_x; \quad (1)$$

$$\dot{y} = (S_\psi S_\theta C_\phi + C_\psi S_\phi) \frac{F}{m} - \text{sign}(\dot{y}) c_d \frac{\rho \dot{y}^2}{2} S_y; \quad (2)$$

$$\dot{z} = C_\phi C_\theta \frac{F}{m} - g - \text{sign}(\dot{z}) c_d \frac{\rho \dot{z}^2}{2} S_z; \quad (3)$$

$$\ddot{\phi} = (\omega_4^2 - \omega_2^2) \frac{lk}{j_x}; \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = (\omega_3^2 - \omega_1^2) \frac{lk}{j_y}; \quad (5)$$

$$\ddot{\psi} = (-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \frac{b}{j_z}, \quad (6)$$

где x, y, z – координаты центра масс квадрокоптера в инерциальной (стартовой) системе координат. Угловое положение БЛА задано соответственно углами крена ϕ , тангажа θ и рысканья ψ , которые определяют положение связанной с БЛА строительной системы координат относительно осей инерциальной системы. Здесь введены обозначения: $C_\alpha = \cos(\alpha)$; $S_\alpha = \sin(\alpha)$; $F = k(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2)$ – подъемная сила, создаваемая вращением винтов БЛА; ω_i – скорость вращения i -го винта; m – масса БЛА; l, k, b – постоянные коэффициенты, характеризующие конструктивные особенности БЛА; c_d – коэффициент аэродинамической силы; ρ – плотность воздуха; v – скорость набегающего потока; S – площадь поверхности БЛА, на которую действует набегающий поток; j_x, j_y, j_z – моменты инерции вращения БЛА относительно соответствующих осей (элементы тензора инерции) [6].

При рассмотрении математической модели пространственного движения БЛА обязательно следует учитывать направление осей применяемой системы координат (X, Y, Z), так как в разных источниках оно может быть различным. В системе уравнений (1)–(6) считается, что БЛА движется в инерциальной (стартовой) связанной с землей системой координат с перпендикулярными друг к другу осями Ox, Oy, Oz . При этом ось Oz направлена противоположно вектору гравитационного ускорения, ось Oy составляет с осями Ox и Oz левостороннюю систему координат. С конструкцией БЛА связана строительная система координат Ox_c, Oy_c, Oz_c , угловое положение которой относительно инерциальной системы Ox, Oy, Oz определяется углами ϕ, θ, ψ [4, 5].

Аналитический синтез управления квадрокоптером

Решение задачи синтеза системы управления БЛА, как правило, состоит из двух этапов [7]. На первом этапе определяется закон

управления ускорением центра масс БЛА, который формирует движение по заданной или требуемой траектории и позволяет формулировать первоначальные требования к структуре системы автоматического управления БЛА [8]. На втором этапе синтеза производится обоснование структуры и параметров автопилота, которые зависят от определенного ранее закона изменения вектора управляющего ускорения $\vec{a}_u(t)$ и конструктивного исполнения элементов конструкции БЛА.

Задача аналитического (математического) синтеза закона управления $\vec{a}_u(t)$ формулируется в зависимости от постановки и в большинстве случаев представляет собой оптимизационную задачу Больца [9], формализованную в виде соответствующего минимизируемого функционала качества, который в общем случае имеет вид

$$J = \varphi(X_k, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} F(X, U, t) dt \rightarrow \min, \quad (7)$$

где $X_k = [x_k, y_k, z_k]^T$ – вектор, включающий минимальные отклонения (промах) БЛА относительно заданной конечной или промежуточной [10] k -й точки маршрута; $X(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T$ – n -мерный вектор текущих координат центра масс БЛА в заданной системе координат; $U(t) = [u_x(t), u_y(t), u_z(t)]^T$ – вектор управлений размерности $r \leq n$.

Основные ограничения в математической постановке задачи минимизации функционала (7) представляют собой векторное уравнение в форме Коши, описывающее траекторию движения объекта (БЛА):

$$\dot{X}(t) = f(X, t) + U(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (8)$$

где $X(t)$ – вектор состояния системы; $U(t)$ – искомый вектор управлений.

В нашем случае векторное уравнение (8) представляет собой систему уравнений (1)–(6).

Для задачи траекторного управления БЛА минимизация функционала (7) представляет собой полет БЛА в заданную точку пространства с координатами X_k в течение времени $t_k - t_0$ при минимизации интегральных затрат на управление. Задачи такого рода широко известны, они рассмотрены, в частности, в работах [6, 11]. Частный случай задачи Больца представляет собой задачу о максимальном быстродействии искомого управления (форсированное управление системой). Такая задача, в частности, решается в [12].

Аналитическое решение задачи определения оптимального значения управляющего вектора $U^*(t)$ для нелинейной многомерной системы представляет значительную трудность. Задача существенно упрощается при так называемой линейной постановке, при которой функционал качества (7) представляется в квадратичной форме Летова – Калмана [9]:

$$J = \frac{1}{2} X_k^T R X_k + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} [X(t)^T S(t) X(t) + U(t)^T Q(t) U(t)] dt, \quad (9)$$

а векторно-матричное уравнение состояния системы (8) имеет линейную форму

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (10)$$

где $R, S(t), Q(t), A(t), B(t)$ – матрицы коэффициентов.

При такой постановке задачи получается явный вид выражения для оптимального управления [13]

$$U^*(X, t) = -Q^{-1}(t)B^T(t)P(t)X(t), \quad (11)$$

где матрица переменных коэффициентов $P(t)$ вычисляется путем решения векторного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)P(t) - S(t), \quad P(t_k) = R. \quad (12)$$

Сложность практической реализации такого решения в поиске оптимального вектора $U^*(t)$ заключается в необходимости решения двухточечной краевой задачи, которая представляет собой необходимость одновременного решения уравнений (10) и (12). При этом в системе (10) заданы начальные условия $X(t_0)$, а в системе (12) – конечные условия $P(t_k)$. Точное решение такой задачи получается только для линейных (линеаризованных) систем малой размерности.

Построение стабилизирующего управления квадрокоптером

На движение БЛА по заданной (синтезированной) траектории оказывают влияние различные нежелательные факторы, приводящие к изменению параметров поступательного и вращательного движения БЛА. Стабилизация положения БЛА в заданной точке пространства может быть обеспечена различными способами. Один из подходов заключается в применении в системе метода модального управления (синтеза модальных регуляторов), который заключается в изменении мод (собственных чисел матрицы объекта), для достижения желаемых целей управления. При этом необходимо определить матрицу коэффициентов динамической обратной связи, обеспечивающей замкнутой системе требуемое расположение мод [14]. При этом желаемый переходный процесс стабилизации движения БЛА задается с помощью полиномов Баттерворта [13]. Такой подход к построению стабилизирующего управления квадрокоптером применен, например, в работе [4]. Полученное при этом решение зависит от задаваемого заранее времени переходного процесса, конструктивных характеристик БЛА, желаемой динамики процесса стабилизации, что в процессе полета БЛА может существенно изменяться.

Достаточно простое аналитическое решение задачи синтеза стабилизирующего управления квадрокоптером при той же постановке задачи, что в [4], может быть получено путем примене-

ния метода аналитического конструирования регуляторов [9, 13]. Применим данный метод к решению прикладной задачи синтеза стабилизирующего управления квадрокоптером. Представим минимизируемый квадратичный функционал (9) в интегральной форме Лагранжа, т. е. в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} [X(t)^T S(t) X(t) + U(t)^T Q(t) U(t)] \times dt \rightarrow \min. \quad (13)$$

Для объекта управления вида (10) при допущении, что $t_k \rightarrow \infty$ [15], матрицы A , B , S , Q не зависят от времени t и оптимальный регулятор, минимизирующий функционал (13), определяется выражением

$$U^*(X) = -Q^{-1} B^T P X, \quad (14)$$

где P – положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая алгебраическому уравнению Риккати

$$-A^T(t)P(t) - P(t)A(t) + P(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)P(t) - S(t) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, получается достаточно простое решение задачи поиска оптимального управления, не требующее решения двухточечной краевой задачи.

В качестве примера рассмотрим стабилизацию относительно оси x квадрокоптера, движение которого описывается уравнениями (1)–(6). Под стабилизацией БЛА в заданной точке пространства подразумеваем нахождение центра масс БЛА в заданных координатах, а линейные скорости, ускорения и углы тангажа и крена БЛА равны нулю.

Рассмотрим перемещение БЛА относительно оси Ox . Пренебрегая силой аэродинамического сопротивления с учетом малости углов наклона БЛА в пространстве ($\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$), из выражений (1) и (5) получим линеаризованную модель движения БЛА, продифферен-

цировав выражение (1) и обозначив в выражении (5) $\dot{\theta} = \Omega$:

$$\dot{a}_x = \frac{F}{m}\Omega; \quad (16)$$

$$\dot{\Omega} = (\omega_3^2 - \omega_1^2) \frac{lk}{j_y}. \quad (17)$$

Введем обозначения: $x_1 = a_x$, $x_2 = \Omega$, $u = (\omega_3^2 - \omega_1^2) \frac{lk}{j_y}$. Функционал качества представим в следующем виде:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + ru^2) dt \rightarrow \min, \quad (18)$$

где q_1 , q_2 , r – нормировочные коэффициенты соответствующей размерности [15], преобразующие функционал (18) к безразмерному виду. Модель движения БЛА приведем к векторному дифференциальному уравнению второго порядка вида (10) с постоянными коэффициентами:

$$\dot{X} = AX + BU, \quad X(t_0) = X_0. \quad (19)$$

Сравнивая формулы (16)–(18) с общей постановкой задачи (10)–(15), имеем следующие значения вектора состояния матриц коэффициентов:

$$X = \begin{bmatrix} a_x \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad \text{подставив которые в уравнение (15), определим значения компонент матрицы } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \text{ с учетом того, что } p_{12} = p_{21}.$$

Решив систему алгебраических уравнений вида (15), вычислим значения элементов матрицы коэффициентов P для данной постановки задачи:

$$p_{11} = \sqrt{q_1(q_2 + 2\sqrt{rq_1})}, \quad p_{12} = \sqrt{rq_1},$$

$$p_{22} = \sqrt{r(q_2 + 2\sqrt{rq_1})}. \quad (20)$$

Выражение для искомого управления с обратной связью (14) имеет простой вид

$$u^* = -\frac{1}{r}(p_{12}x_1 - p_{22}x_2). \quad (21)$$

Пусть для режима горизонтального висения квадрокоптера угловая скорость вращения его винтов $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_n$ – номинальное значение. Если для управления разворотом БЛА на угол θ необходимо обеспечить: $\omega_1 = \omega_n + \Delta\omega$; $\omega_3 = \omega_n - \Delta\omega$, то при вычисленном значении u^* с учетом того, что в соответствии с выражением (17) $(\omega_3^2 - \omega_1^2) = (\omega_3 - \omega_1) \times (\omega_3 + \omega_1) = 4\omega_n\Delta\omega$, получим закон изменения приращения скорости вращения винтов квадрокоптера $\Delta\omega$, необходимого для стабилизации квадрокоптера относительно оси Ox . С учетом принятых обозначений для x_1 , x_2 , u^* получим

$$\Delta\omega = \frac{u^* F j_y}{l k m}. \quad (22)$$

На рис. 1 представлены результаты математического моделирования процесса стабилизации положения БЛА относительно оси Ox , выполненного в среде Mathcad.

В данном примере предполагается, что в результате внешнего воздействия (например, порыв ветра) квадрокоптер получил ускорение $a_x = a_k = 2 \text{ м/с}^2$. Система автоматического управления БЛА (автопилот) изменяет скорости вращения винтов $\omega_1 = \omega_{1k}$ и $\omega_3 = \omega_{3k}$ таким образом, чтобы в течение времени переходного процесса обеспечить $a_x = a_k = 0$. При этом, как видно из приведенных графиков, соответственно изменяется скорость вращения БЛА $\Omega = \Omega_k$. При моделировании задавались следующие значения параметров и коэффициентов: $\omega_n = 340 \text{ рад/с}$, $m = 0,7 \text{ кг}$, $l = 0,3 \text{ м}$, $k = 1,49 \cdot 10^{-5}$, $j_y = 0,011 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

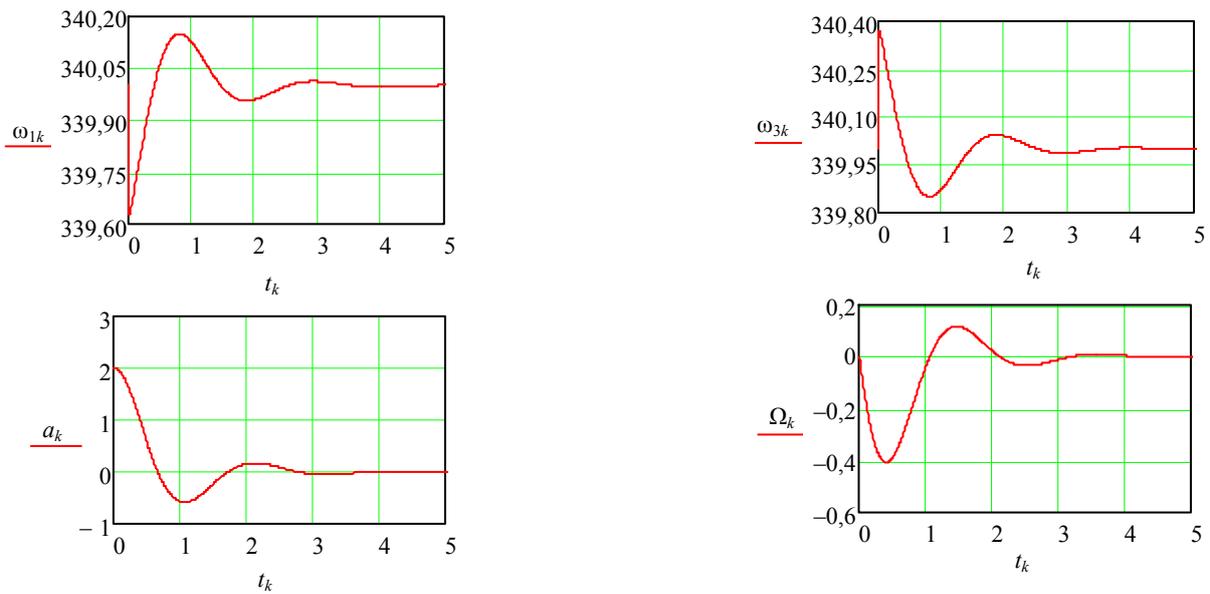


Рис. 1. Результаты моделирования стабилизирующего управления

Fig. 1. Results of stabilizing control simulation

ВЫВОД

При разработке беспилотных летательных аппаратов мультироторного типа возникает задача синтеза автоматического стабилизирующего управления пространственным положением БЛА. Данная задача может быть решена путем применения различных методов. При этом наличие математической модели движения БЛА позволяет аналитически, применяя классические методы оптимизации, определить закон стабилизирующего управления на этапе предварительного проектирования системы управления БЛА и обосновать основные требования к конструктивным элементам БЛА. Приведенный пример наглядно демонстрирует работоспособность данного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беспилотники в АПК: новые и самые необычные модели дронов [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://dzen.ru/a/Y-Uazw17UW3pX-Ye>.
2. Красовский, А. А. Системы автоматического управления летательных аппаратов / А. А. Красовский, Ю. А. Вавилов, А. И. Сучков. М.: ВВИА имени Н. Е. Жуковского, 1986. 477 с.
3. Гу Пэнхао. Математическое моделирование движения летательных аппаратов мультироторного типа / А. А. Лобатый, Гу Пэнхао // Системный анализ и прикладная информатика. 2023. № 1. С. 10–15. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-1-10-15>.
4. Гурьянов, А. Е. Моделирование управления квадрокоптером / А. Е. Гурьянов // Инженерный вестник. 2014. № 8. С. 522–534.
5. Щекатуров, А. М. Методика моделирования динамики октокоптера / А.М. Щекатуров. М.: ДМК Пресс, 2021. 228 с.
6. Моисеев, В. С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами / В. С. Моисеев. Казань: ГБУ РЦМКО, 2013. 768 с.
7. Лобатый, А. А. Поэтапный аналитический синтез математической модели автопилота беспилотного летательного аппарата / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, С. С. Прохорович // Системный анализ и прикладная информатика. 2021. № 1. С. 21–28.
8. Лобатый, А. А. Аналитический синтез управляющего ускорения беспилотного летательного аппарата / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, С. С. Прохорович // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 4. С. 338–344. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-4-338-344>.
9. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
10. Лобатый, А. А. Формирование оптимальных параметров траектории пролета беспилотного летательного аппарата через заданные точки пространства / А. А. Лобатый, А. Ю. Бумай, Ду Цзюнь // Доклады БГУИР. 2019. № 7–8. С. 50–57. <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-50-57>.
11. Лобатый, А. А. Аналитический синтез управления беспилотным летательным аппаратом / А. А. Лобатый, А. А. Антаневич, Ю. Ф. Икуас // Сборник научных статей Военной академии Республики Беларусь. 2009. № 17. С. 62–66.

12. Гу Пэнхао. Форсированное управление квадрокоптером / Гу Пэнхао, Ю. А. Леоновец, А. А. Лобатый // Наука и техника. 2023. Т. 22, № 2. С. 91–95. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-91-95>.
13. Методы классической и современной теории автоматического управления: учеб.: в 5 т. / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2004. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления. 742 с.
14. Лобатый, А. А. Модальное управление беспилотным летательным аппаратом / А. А. Лобатый, А. А. Антаневич, Ю. Ф. Икуас // Вестник БНТУ. 2010. № 5. С. 37–40.
15. Брайсон, А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. М.: Мир, 1972. 544 с.

Поступила 11.01.2024

Подписана в печать 14.03.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. *Drones in the Agro-Industrial Complex: New and Most Unusual Drone Models*. Available at: <https://dzen.ru/a/Y-Uazw17UW3pX-Ye> (in Russian).
2. Krasovsky A. A., Vavilov Yu. A., Suchkov A. I. (1986) *Automatic control systems for aircraft*. Moscow, Publishing House of Zhukovsky Air Force Engineering Academy. 477 (in Russian).
3. Lobaty A. A., Gu Penghao (2023). Gu Penghao. Mathematical Modeling of the Movement of Multi-Rotor Aircraft. *Sistemny Analiz i Prikladnaya Informatika = System Analysis and Applied Information Science*, (1), 10–15. <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2023-1-10-15> (in Russian).
4. Guryanov A. E. (2014) Simulation of Quadcopter Control. *Inzhenerny Vestnik [Engineering Bulletin]*, 2014, (8), 522–534 (in Russian).
5. Shchekaturov A. M. (2021) *Methodology for Modeling the Dynamics of an Octocopter*. Moscow, DMK Press Publ. 228 (in Russian).
6. Moiseev V. S. (2013) *Applied Theory of Control of Unmanned Aerial Vehicles*. Kazan, Publishing House of State Budgetary Institution – Republican Center for Monitoring the Quality of Education. 768 (in Russian).
7. Lobaty A. A., Bumay A. Yu., Prokhorovich S. S. (2021) Step-by-Step Analytical Synthesis of the Mathematical Model of the Autopilot of an Unmanned Aerial Vehicle. *Sistemny Analiz i Prikladnaya Informatika = System Analy-Sis and Applied Information Science*, (1), 21–28 (in Russian).
8. Lobaty A. A., Bumai A. Yu., Prohorovith S. S. (2021) Analytical Synthesis of Control Acceleration of Unmanned Aerial Vehicle. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 20 (4), 338–344 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-4-338-344>.
9. Aleksandrov A. G., Artem'ev V. M., Afanas'ev V. N., Ashimov A. A., Beloglazov I. N., Bukov V. N., Zemlyakov S. N., Kazakevich V. V., Krasovskii A. A., Medvedev G. A., Rastrigin L. A., Rutkovskii V. Yu., Yusupov R. M., Yadykin I. B., Yakubovich V. A. (1987) *Handbook of Automatic Control Theory*. Moscow, Nauka Publ. 712 (in Russian).
10. Lobaty A. A., Bumay A. Yu., Du Jun (2019) Formation of Optimal Parameters for the Flight Trajectory of an Unmanned Aerial Vehicle Through Given Points in Space. *Doklady BGUIR*, (7–8), 50–57 (in Russian). <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2019-126-8-50-57>.
11. Lobaty A. A., Antanovich A. A., Ikuas Yu. F. (2009) Analytical Synthesis of Unmanned Aerial Vehicle Control. *Collection of Articles of the Military Academy of the Republic of Belarus*, (17), 62–66.
12. Gu P., Leonovets J. A., Lobaty A. A. (2023) Forced Quadcopter Control. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 22 (2), 91–95 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-91-95>.
13. Pupkov K. A., Egupov N. D., Barkin A. I., Voronov E. M., Kurdyukov A. P., Pilishkin V. N., Rybin V. M., Timin V. N., Faldin N. V., Filimonov N. B., Chaikovskii M. M. (2004) *Methods of Classical and Modern Theory of Automatic Control. Vol. 4: Theory of Optimization of Automatic Control Systems*. Moscow, Publishing House of Bauman Moscow State Technical University. 742 (in Russian).
14. Lobaty A. A., Antanovich A. A., Ikuas Yu. F. (2010) Modal Control of an Unmanned Aerial Vehicle. *Vestnik BNTU [Belarusian National Technical University Bulletin]*, (5), 37–40 (in Russian).
15. Bryson A. E., Yu-Chi Ho (1969) *Applied Optimal Control*. Blaisdell Publishing Company.

Received: 11.01.2024

Accepted: 14.03.2024

Published online: 31.07.2024

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-279-288>

УДК 621.77.014

Исследование влияния схемы и режимов прессования стальной и чугунной стружки на энергосиловые параметры процесса брикетирования

Докт. техн. наук, проф. О. М. Дьяконов¹⁾, инж. А. А. Литвинко¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. В работе приведены результаты экспериментального исследования процесса горячего брикетирования мелкофракционных отходов черных металлов в пресс-форме с подвижной матрицей. Установлено, что для достижения требуемого значения плотности готовых брикетов 90–95 % (один из основных критериев качества современного металлургического производства) в температурном диапазоне нагрева шихты 700–850 °С давление прессования достигает значений 470–500 МПа. Применение пресс-форм с подвижной матрицей обеспечивает снижение давления и усилия прессования пластичных низко- и среднеуглеродистых сталей до 45 %, высокоуглеродистых малопластичных и труднодеформируемых – до 35 %, чугунов – до 25 %. Удельная работа деформации (энергетические затраты) при нагреве отходов черных металлов до температур неполной горячей деформации снижается в 2,3–2,5 раза. По сравнению с брикетированием в неподвижной матрице при тех же температурах удельная работа деформации снижается на 15–20 %. Процесс деформационного уплотнения дискретного пористого тела протекает при минимальном воздействии сил бокового контактного трения, так как фронт уплотнения (уплотненный слой стружки) перемещается совместно с матрицей в одном и том же направлении при минимальном относительном сдвиге поверхностей трения. Характер деформационного уплотнения и уровень сопротивления деформированию зависят от исходного состояния материала: чем выше пластичность металла, тем интенсивнее увеличивается плотность прессовки; чем больше начальная плотность и предел текучести, тем большее давление прессования необходимо приложить для достижения одного и того же значения плотности. Мелкофракционные добавки металлического или неметаллического происхождения заполняют пустоты между более крупными фракциями стружки и таким образом повышают начальную плотность прессовки и градиент роста давления по мере увеличения плотности.

Ключевые слова: прессование, горячее брикетирование, пресс-форма, подвижная матрица, отходы, черные металлы, трение, температура, давление, усилие, работа деформации

Для цитирования: Дьяконов, О. М. Исследование влияния схемы и режимов прессования стальной и чугунной стружки на энергосиловые параметры процесса брикетирования / О. М. Дьяконов, А. А. Литвинко // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 279–288. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-279-288>

Research of the Influence of the Scheme and Modes of Pressing Steel and Cast Iron Chips on the Energy-Power Parameters of the Briquetting Process

О. М. Dyakonov¹⁾, А. А. Litvinko¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper presents the results of an experimental study of the process of hot briquetting of fine-grained ferrous metal waste in a mold with a movable matrix. It has been established that in order to achieve the required density of finished

Адрес для переписки

Дьяконов Олег Михайлович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22/2,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: + 375 17 293-91-91
deaconco@mail.ru

Address for correspondence

Dyakonov Oleg Mikhaylovich
Belarusian National Technical University
22/2, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: + 375 17 293-91-91
deaconco@mail.ru

briquettes of 90–95 % (one of the main quality criteria for modern metallurgical production), in the temperature range of heating the charge of 700–850 °C, the pressing pressure reaches values of 470–500 MPa. The use of molds with a movable matrix ensures reduction in pressure and pressing force of ductile low- and medium-carbon steels up to 45 %, high-carbon, low ductility and difficult to deform - up to 35 %, cast iron – up to 25 %. The specific work of deformation (energy costs) when heating waste ferrous metals to temperatures of incomplete hot deformation is reduced by 2.3–2.5 times. Compared to briquetting in a fixed matrix at the same temperatures, the specific work of deformation is reduced by 15–20 %. The process of deformation compaction of a discrete porous body occurs with minimal impact of lateral contact friction forces, since the compaction front (compacted chip layer) moves together with the matrix in the same direction with minimal relative displacement of the friction surfaces. The nature of deformation compaction and the level of resistance to deformation depend on the initial state of the material: the higher the plasticity of the metal, the more intense the compaction density increases; the higher the initial density and yield strength, the greater the pressing pressure must be applied to achieve the same density value. Fine additives of metallic or non-metallic origin fill the voids between larger fractions of chips and thus increase the initial compaction density and the pressure gradient as density increases.

Keywords: pressing, hot briquetting, mold, movable matrix, waste, ferrous metals, friction, temperature, pressure, force, work of deformation

For citation: Dyakonov O. M., Litvinko A. A. (2024) Research of the Influence of the Scheme and Modes of Pressing Steel and Cast Iron Chips on the Energy-Power Parameters of the Briquetting Process. *Science and Technique*. 23 (4), 279–288. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-279-288> (in Russian)

Введение

Определение энергозатрат и усилия прессования стружки черных металлов является одним из ключевых вопросов, возникающих при выборе технологии и оборудования для осуществления процесса брикетирования. Как было показано в работах [1, 2], наиболее оптимальным является применение пресс-форм с подвижной матрицей, обеспечивающей снижение энергосиловых параметров, износа инструмента и повышение качества брикетов. Известные исследования процесса брикетирования стальной и чугуновой стружки [3–10] проведены в пресс-формах с неподвижной матрицей, недостатком которых являются большие величины сил бокового контактного трения, которые приводят к повышению энергосиловых параметров и износу рабочих деталей пресс-формы.

Цель настоящего исследования состоит в определении влияния схемы и режимов прессования стружки на энергосиловые параметры процесса брикетирования, оптимизации режимов брикетирования, создание пресс-формы, обеспечивающей снижение износа ее рабочих деталей.

Сравнительный анализ и выбор схемы нагружения

На рис. 1 показаны схемы нагружения прессовки 3 в пресс-формах с неподвижной

и подвижной матрицей 2. Погонная нагрузка, действующая со стороны неподвижной матрицы на прессовку, направлена вверх, т. е. препятствует процессу прессования (рис. 1а), а со стороны подвижной матрицы – вниз, т. е. способствует процессу прессования (рис. 1б). И в том, и в другом случае сила бокового контактного трения $F_{тр}$ направлена вверх. Таким образом, прессующий пуансон пресс-формы преодолевает силу сопротивления деформированию со стороны прессовки и силу бокового контактного трения.

Брикетирование стружки отличается большим ходом подвижных частей пресса и пресс-формы. Объем столба стружки уменьшается в 5–8 раз, в связи с этим снижение величины и работы сил трения является чрезвычайно важным направлением совершенствования данной технологии. Фронт уплотнения стружки распространяется от подвижного пуансона к неподвижному по закону волны сжатия. В пресс-форме с неподвижной матрицей уплотненный слой стружки перемещается вместе с прессующим пуансоном при максимально возможном сдвиге контактирующих с матрицей поверхностей и соответственно максимальной силой трения. Частицы металла проникают в зазор между матрицей 2 и пуансоном 1, что приводит к затуплению кромок пуансона и образованию клиновидного тянущего заусенца на прессовке.

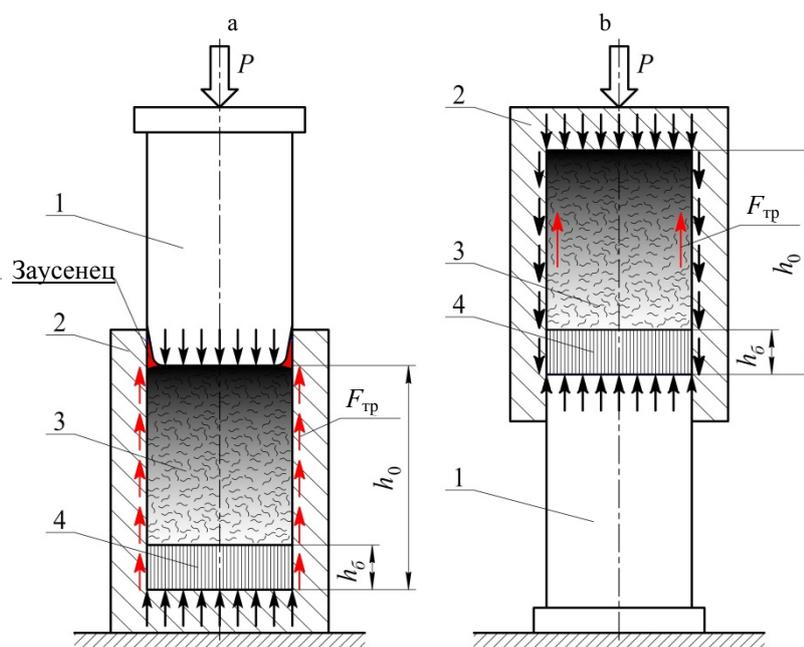


Рис. 1. Схемы прессования стружки черных металлов в пресс-форме: а – с неподвижной матрицей; б – с подвижной матрицей

Fig. 1. Schemes for pressing ferrous metal chips in mold: a – a fixed matrix; b – with a movable matrix

Увеличение заусенца в конечном итоге приводит к заклиниванию пресс-формы, вплоть до отрыва пуансона от штока пресса по их резьбовому соединению. В пресс-форме с подвижной матрицей уплотненный слой перемещается вместе с матрицей при минимальном относительном сдвиге поверхностей контактного трения и минимальном значении сил трения. Энергосиловые параметры процесса брикетирования и износ деталей пресс-формы сведены к минимуму.

Оборудование и инструмент для проведения экспериментального исследования

Опытная установка для исследования процесса горячего брикетирования была создана на базе гидравлического пресса Д2434В усилием 2500 кН. Пресс оборудован электроконтактным манометром (ЭКМ-ДМ2005фСг1Ех) для измерения давления масла в главном гидроцилиндре и остановки пресса по достижении заданного давления, механической линейкой со стрелкой на ползуне для измерения хода ползуна, а также нижним гидравлическим выталкивателем усилием 600 кН.

Нагрев образцов стружки и других отходов металлообработки осуществляли в камерной муфельной печи СНОЛ-1,6.2,5.1/11-И2М (до 1100 °С, керамика, 4 л) в стальных мерных стаканах, обеспечивающих засыпку горячей шихты в пресс-форму с заданной температурой и в требуемом объеме. В процессе нагрева в ограниченном пространстве камеры печи создавалась защитная углеводородная атмосфера в результате термической возгонки масляной компоненты СОЖ.

Практически для всех материалов, выбранных для проведения экспериментального исследования, температурный интервал нагрева составлял 700–850 °С. Нагрев осуществляли до полного удаления из шихты жидкой фазы. В результате адсорбции пироуглерода на поверхности частиц толщина покрытия составляла 0,5–0,7 мм. Углеродное покрытие помимо защитных функций выполняло роль смазки в процессе горячего прессования. Требуемую величину давления прессования и конечную плотность брикета определяли по результатам механических испытаний брикетов на прочность.

Пресс-форма для проведения испытаний устанавливалась на столе пресса с привязкой нижнего опорного пуансона к гидравлическому выталкивателю. Внешний вид пресс-формы показан на рис. 2, чертеж пресс-формы – на рис. 3.



Рис. 2. Внешний вид пресс-формы горячего брикетирования с подвижной матрицей
 Fig. 2. Appearance of a hot briquetting mold with a movable matrix

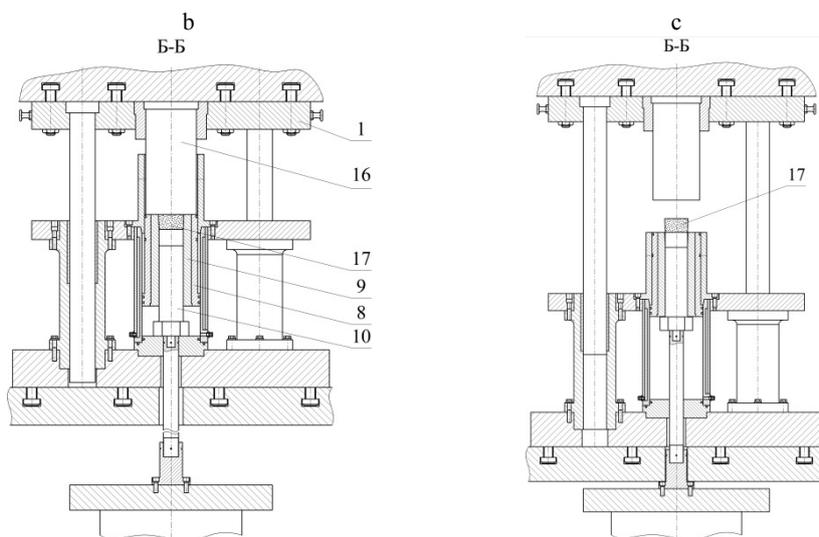
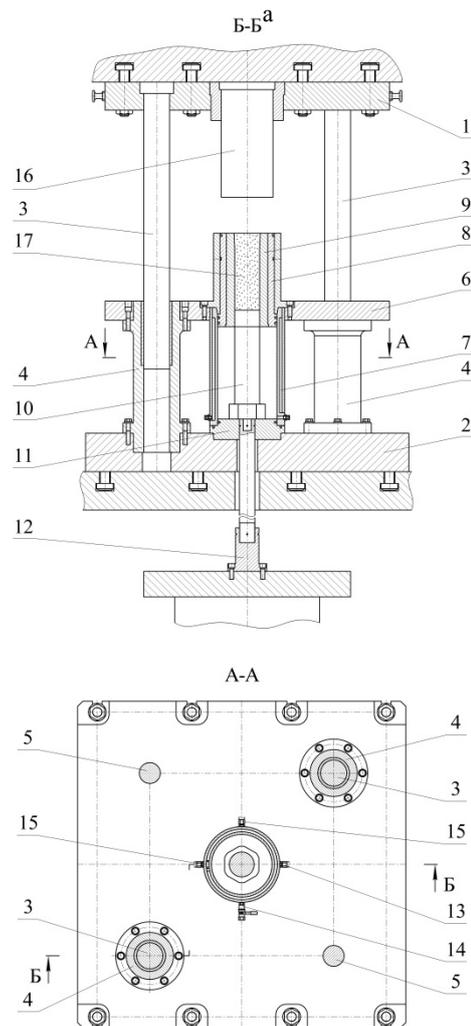


Рис. 3. Пресс-форма горячего брикетирования: а – в исходном положении; б – в момент окончания процесса брикетирования; в – в момент выталкивания брикета из матрицы

Fig. 3. Hot briquetting mold: a – in the initial position; b – at the end of the briquetting process; c – at the moment when the briquette is ejected from the matrix

Пресс-форма (рис. 3а) состоит из верхней подвижной 1 и нижней опорной 2 плит с двумя направляющими колонками 3, пропущенными в направляющие втулки 4. На втулках 4 и стойках 5 установлен стол 6. В центре по оси симметрии плит 1, 2 и стола установлен пневмоцилиндр 7 с поршнем 8. В поршень запрессована матрица 9. В отверстие матрицы входит выталкивающий пуансон 10, опирающийся своим фланцем на цилиндрическую опору 11, при этом хвостовик пуансона 10 связан резьбовым соединением с гидравлическим выталкивателем 12.

Подпоршневая полость пневмоцилиндра сообщена с пневмосистемой компрессорной установки посредством штуцера 13. Для сброса давления воздуха при наладочных работах и необходимости очистки пресс-формы от просыпаний металлического порошка служит декомпрессионный клапан 14.

К верхней плите 1 прикреплен прессующий пуансон 16, диаметр которого немногим меньше диаметра поршня, но значительно больше диаметра отверстия матрицы.

Пресс-форма работает следующим образом. При сообщении подпоршневой полости пневмоцилиндра с пневмосистемой компрессорной установки поршень 8, а вместе с ним и матрица 9, поднимаются вверх до упора под давлением 0,4–0,6 МПа (рис. 3а). Металлическая стружка 17, нагретая до температуры 700–850 °С, загружается в открытую полость матрицы 9, заполняя ее в полном объеме. При рабочем ходе ползуна пресса пуансон 16 совершает мягкую стыковку с опирающимся на пневмоопору поршнем. Под давлением пуансона 16 (470–500 МПа) формирующая полость матрицы уменьшается в объеме, происходит процесс прессования стружки 17 (рис. 3б). Схема нагружения соответствует схеме одностороннего прессования – прессовка находится в состоянии всестороннего неравномерного сжатия.

По окончании процесса прессования (рис. 3б) ползун пресса вместе с верхней плитой 1 и пуансоном 16 отводится в исходное верхнее положение. Одновременно брикет 17 выталкивается из матрицы пуансоном 10 (рис. 3с). Для снижения усилия выталкивания боковая поверхность матрицы 9 выполнена с уклоном 3°.

Поршень 8 поднимается в исходное положение фланцем пуансона 10 и давлением сжатого воздуха. При опускании пуансона 10 в исходное положение поршень 8 удерживается в верхнем положении давлением сжатого воздуха (рис. 3а). Таким образом рабочий цикл работы пресса и пресс-формы завершается.

Характерной особенностью работы пресс-формы, в отличие от известных аналогов [3], является совместное перемещение пуансона 16 и матрицы с одной и той же скоростью вплоть до получения плотного брикета 17. Пуансон 16 запирает формирующую полость матрицы 9, но не входит в нее, поэтому исключается износ кромок пуансона 16 с образованием клиновидного заусенца на прессовке.

Минимизируется износ матрицы, которая перемещается в том же направлении, что и прессуемый металл, совместное перемещение происходит при минимальном относительном сдвиге трущихся поверхностей. Неподвижный опорный пуансон 10 также находится в благоприятных условиях нагружения под воздействием сил нормального давления и незначительном воздействии сил бокового трения. Зазор между ним и стенками матрицы 9 выбирается минимальным, достаточным для выталкивания готового брикета 17. Проникание мелких металлических частиц в зазор между стенками матрицы 9 и пуансона 10 завершается просыпанием порошка в подпоршневую полость пневмоцилиндра 7. Периодическая чистка пресс-формы производится автоматически при открытии декомпрессионного клапана 14. Порошок выдувается из подпоршневой полости сжатым воздухом.

Ход прессующего пуансона и матрицы устанавливается в зависимости от требуемой степени сжатия прессовки. Благодаря применению пневмосистемы он не ограничивается конструктивными особенностями пресс-формы и не зависит от термомеханической усталости упругого элемента. Применение пневмоцилиндра с требуемым для получения плотного брикета ходом подвижных частей и использование в качестве упругого элемента сжатого воздуха, выдавливаемого в пневмосистему, обеспечивают высокую эксплуатационную стойкость пресс-формы.

Пресс-форма оборудована системами внутреннего и внешнего охлаждения. В процессе прессования матрица заперта прессовкой и верхним пуансоном, поэтому сжатый воздух не имеет возможности выхода из подпоршневой полости. Однако при обратном холостом ходе пуансона при выталкивании брикета холодный воздух устремляется в зазор между опорным пуансоном и боковой стенкой матрицы, продувая и охлаждая формирующую полость изнутри. Нагретый воздух (~70 °С) выходит в атмосферу.

Внешнее охлаждение обеспечивается водяной рубашкой в корпусе пневмоцилиндра 7. Вода циркулирует в системе посредством впускного и выпускного штуцеров 15.

Результаты экспериментального исследования

На рис. 4–9 представлены экспериментальные диаграммы прессования, полученные методом поэтапного деформирования исследуемых материалов в пресс-форме с подвижной

матрицей. Диаграммы представляют собой зависимости усилия деформирования P от рабочего хода прессующего пуансона (путь деформирования) Δh . Исходные данные для проведения экспериментального исследования: диаметр отверстия матрицы (брикета) 60 мм; высота засыпки в пресс-форму 150 мм; плотность брикета – не менее 90 % плотности компактного материала того же химсостава при отсутствии СОЖ. Технические условия и режимы брикетирования приведены в табл. 1, где ρ_0 – плотность засыпки материала в пресс-форму; T – температура нагрева; p_{max} – максимальное давление прессования, при котором достигается заданная плотность брикета $\rho_{бр}$; m – масса брикета; A – работа деформации; W – удельная работа деформации ($W = A/m$). Давление прессования определяется как отношение усилия к площади отверстия формирующей полости матрицы, работа деформации – как площадь силовой эпюры прессования. Удельная работа деформации равна работе, отнесенной к единице массы брикета.

Таблица 1

Режимы брикетирования и техническая характеристика металлургических брикетов
Briquetting modes and technical characteristics of metallurgical briquettes

Материал (стружка)	ρ_0 , кг/м ³	T , °С	p_{max} , МПа	Размеры брикета, мм		$\rho_{бр}$, кг/м ³	m , кг	W , кДж/кг
				d	h			
Стружка стали 45 (-20 мм)	900	700	470	60	19,3	7000	0,382	157
Стружка стали 45 (-20 мм)	900	20	650	60	24,6	5500	0,382	392,5
Стружка стали ШХ15СГ (-20 мм)	900	750	480	60	19,3	7000	0,382	199
Чугунная стружка СЧ25 (-10 мм)	1300	800	470	60	30	6500	0,551	172
Чугунная стружка СЧ25 (-10 мм)	1300	20	636	60	40	4800	0,551	396
Отсев ферромарганца ФМн78 (-10 мм)	2945	850	500	60	70	6300	1,25	71

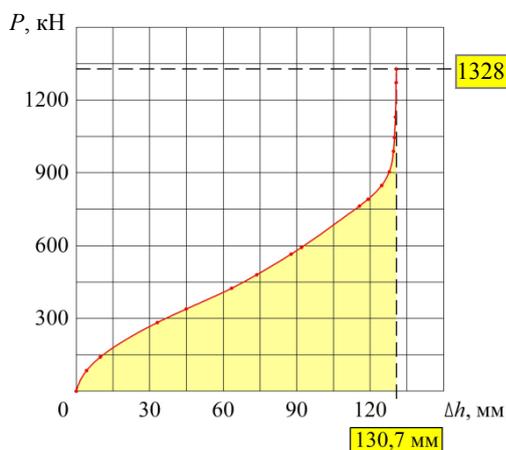


Рис. 4. Диаграмма горячего прессования стружки стали 45

Fig. 4. Hot pressing diagram of steel chips 45

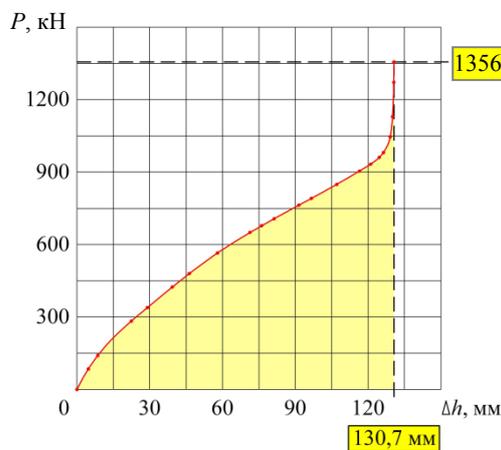


Рис. 5. Диаграмма горячего прессования стружки стали ШХ15СГ

Fig. 5. Hot pressing diagram of steel chips ШХ15СГ [ShKh15SG]

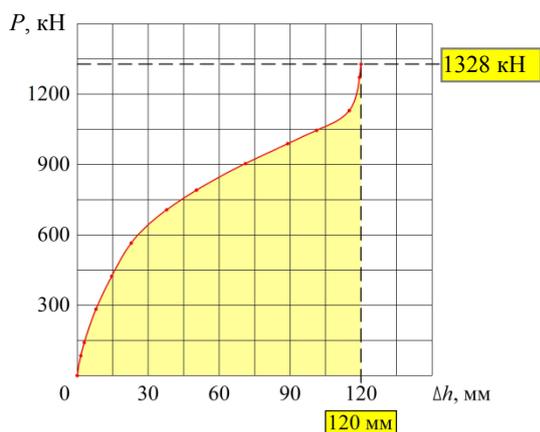


Рис. 6. Диаграмма горячего прессования чугунной стружки СЧ25

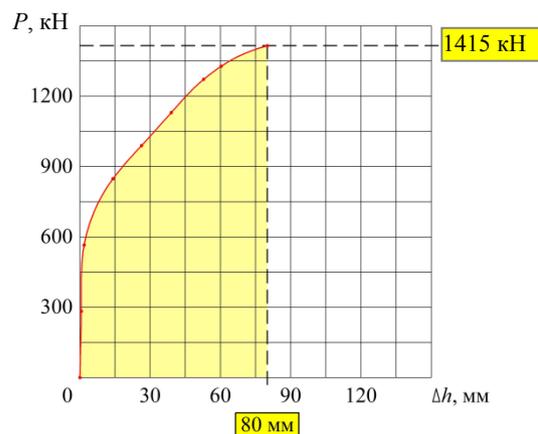
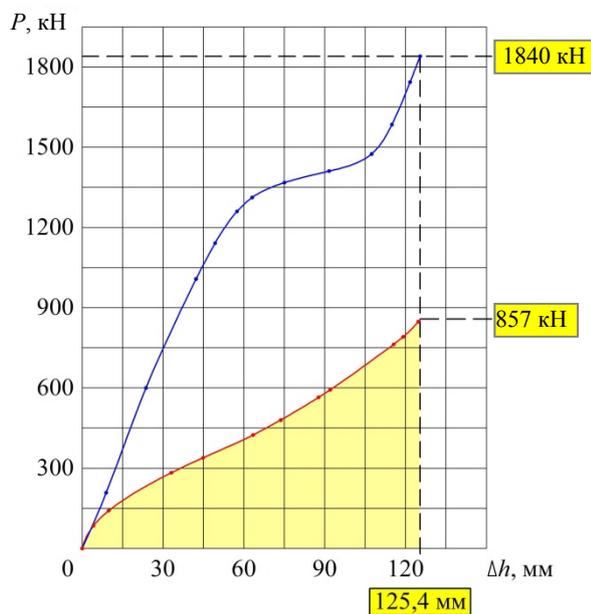


Рис. 7. Диаграмма горячего прессования отсева ферромарганца ФМн78

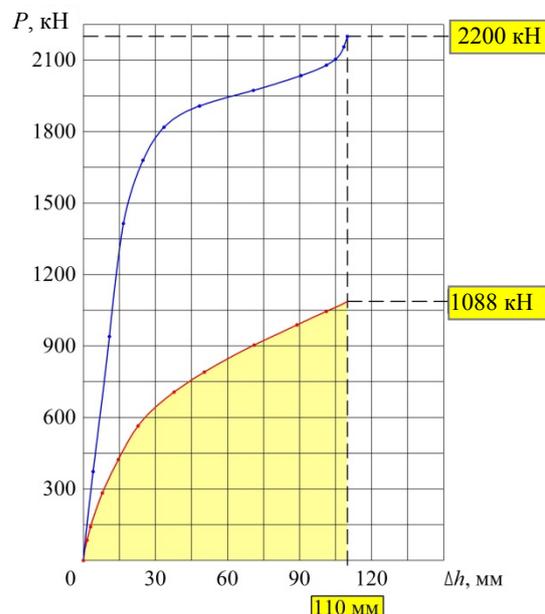
Fig. 6. Hot pressing diagram of cast iron shavings СЧ25 [SCh25] Fig. 7. Hot pressing diagram of ferromanganese ФМн78 [FMn78] screening



— холодное прессование; — горячее прессование

Рис. 8. Диаграмма холодного прессования стружки стали 45

Fig. 8. Cold pressing diagram of steel chips 45



— холодное прессование; — горячее прессование

Рис. 9. Диаграмма холодного прессования чугунной стружки СЧ25

Fig. 9. Cold pressing diagram of cast iron chips СЧ25 [SCh25]

Анализ диаграмм показывает, что на первоначальном этапе нагружения наблюдается рост усилия прессования за счет структурного уплотнения материала и его упругого сжатия. Далее происходят фрагментация хрупких частиц и заполнение пустот, что сопровождается некоторым снижением градиента роста усилия на непродолжительном отрезке рабочего хода прессующего пуансона. После этого наступает

этап пластической деформации тела, сопровождаемый резким ростом усилия деформирования. Для материалов с небольшой плотностью засыпки в пресс-форму путь деформирования увеличивается, процесс прессования становится более продолжительным. С повышением прочностных характеристик материала и снижением пластических при совершении одной и той же работы деформации (равенство

площадей силовых эпюр прессования и всех прочих условий деформации) путь деформирования уменьшается, а величина усилия по окончании процесса возрастает. Для стружки черных металлов при горячей деформации по сравнению с холодной удельная работа снижается в 2,3–2,5 раза (рис. 8, 9).

Кривые уплотнения, производные от диаграмм прессования, приведены на рис. 10.

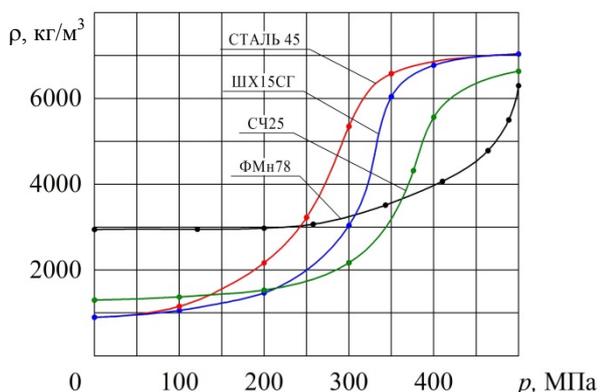


Рис. 10. Кривые уплотнения исследуемых материалов
Fig. 10. Compaction curves of the studied materials

Из графиков видно, что характер деформационного уплотнения и уровень сопротивления деформированию зависят от исходного состояния материала: чем выше пластичность металла (сталь 45), тем интенсивнее увеличивается плотность прессовки; чем больше начальная плотность и предел текучести (сталь ШХ15СГ, чугун СЧ25, ферромарганец ФМн78), тем большее давление прессования необходимо приложить для достижения одного и того же значения плотности. Мелкофракционные добавки металлического или неметаллического происхождения заполняют пустоты между более крупными фракциями стружки и таким образом повышают начальную плотность прессовки и градиент роста давления по мере увеличения плотности. Для достижения требуемого значения плотности готовых брикетов 90–95 % из стружки черных металлов (один из основных критериев качества современного металлургического производства) в температурном диапазоне нагрева шихты

700–850 °С давление прессования достигает значений 470–500 МПа.

У стружки пластичных сталей на определенном этапе увеличение плотности происходит без существенного повышения давления прессования. Появление на расчетных диаграммах площадки текучести математически объясняется самой структурой уравнения (условия) пластичности [1], в состав которого входит показатель пластичности ϵ (относительное сжатие), причем чем больше этот показатель, тем более выраженной и протяженной становится площадка текучести. Так, диаграмма прессования стружки пластичной среднеуглеродистой стали 45 обладает ярко выраженной площадкой текучести в отличие от стружки малопластичных стали ШХ15СГ, чугуна СЧ25 и ферромарганца ФМн78.

Сравнительный анализ экспериментальных диаграмм прессования стружки в прессформах с подвижной и неподвижной матрицей (рис. 11, 12) наглядно демонстрирует преимущества применения подвижной матрицы. Снижение давления и усилия деформирования стружки пластичных низко- и среднеуглеродистых сталей доходит до 45 %; высокоуглеродистых малопластичных и труднодеформируемых – до 35 %; чугунной стружки – до 25 %. По сравнению с брикетированием в неподвижной матрице [3, 4] удельная работа деформации снижается на 15–20 %.

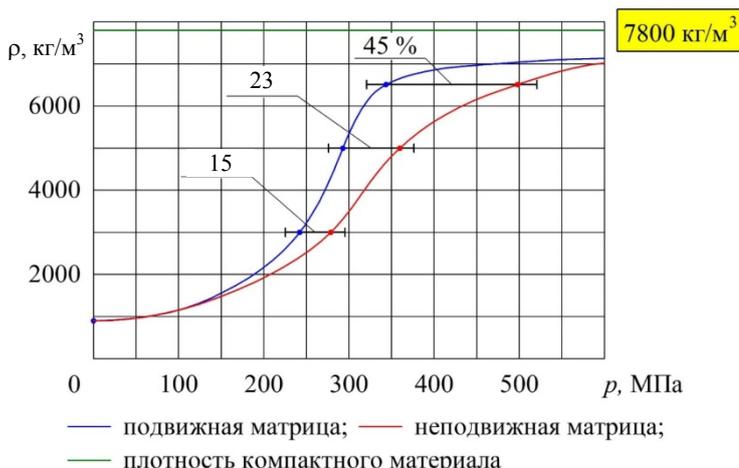


Рис. 11. Кривые уплотнения стружки стали 45 в подвижной и неподвижной матрицах
Fig. 11. Chip compaction curves of steel 45 in movable and fixed matrices

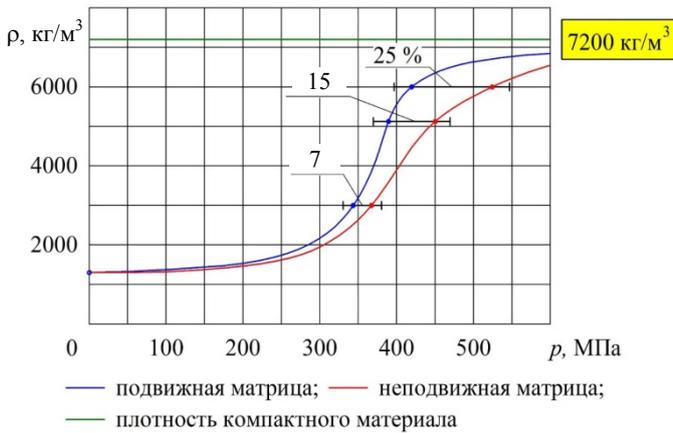


Рис. 12. Кривые уплотнения чугунной стружки СЧ25 в подвижной и неподвижной матрицах

Fig. 12. Compaction curves of cast iron chips СЧ25 in movable and fixed matrices

Сравнительный анализ расчетных и экспериментальных данных

На рис. 13, 14 представлены экспериментальные и расчетные зависимости плотности прессовки от давления прессования для стальной и чугунной стружки.

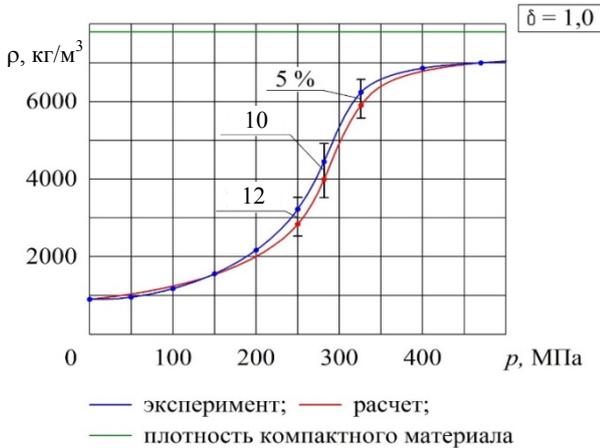


Рис. 13. Экспериментальные и расчетные зависимости плотности прессовки от давления прессования стружки стали 45

Fig. 13. Experimental and calculated dependences of compaction density on compaction pressure of steel chips 45

Основой для построения графиков расчетным путем являются уравнения физико-математической модели [1]. Из графиков видно, что погрешность расчетов не превышает 12 %.

Таким образом доказано, что уравнения разработанной физико-математической модели процесса деформационного уплотнения дискретных металлических материалов, применяемые совместно с экспериментально-анали-

тическим методом определения структурно-реологических характеристик материалов, позволяют достигнуть высокой сходимости расчетных и экспериментальных данных. Универсальность модели заключается в том, что эти же уравнения и характеристики для тех же материалов при всех прочих равных условиях можно использовать при расчетах процессов брикетирования в пресс-формах других размеров и другой геометрической формы.

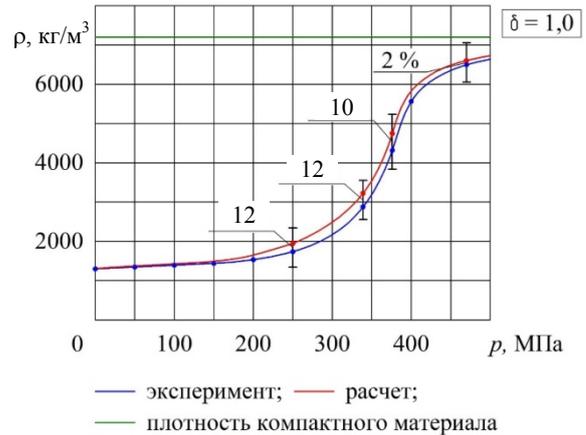


Рис. 14. Экспериментальные и расчетные зависимости плотности прессовки от давления прессования чугунной стружки СЧ25

Fig. 14. Experimental and calculated dependences of compaction density on compaction pressure of cast iron chips СЧ25

ВЫВОДЫ

1. В результате проведенного экспериментального исследования процесса горячего брикетирования стальной и чугунной стружки в пресс-форме с подвижной матрицей установлено, что для достижения требуемого значения плотности готовых брикетов 90–95 % (один из основных критериев качества современного металлургического производства) в температурном диапазоне нагрева шихты 700–850 °С давление прессования достигает значений 470–500 МПа.

2. Характер деформационного уплотнения и уровень сопротивления деформированию зависят от исходного состояния материала: чем выше пластичность металла, тем интенсивнее увеличивается плотность прессовки; чем больше начальная плотность и предел текучести, тем большее давление прессования необходимо приложить для достижения одного и того же значения плотности. Мелкофракционные добавки металлического или неметаллического происхождения заполняют пустоты между более крупными фракциями стружки

и таким образом повышают начальную плотность прессовки и градиент роста давления по мере увеличения плотности.

3. У стружки пластичных сталей на определенном этапе увеличение плотности происходит без существенного повышения давления прессования. Появление на расчетных диаграммах площадки текучести математически объясняется самой структурой уравнения (условия) пластичности, в состав которого входит показатель пластичности ε (относительное сжатие), причем чем больше этот показатель, тем более выраженной и протяженной становится площадка текучести.

4. Применение пресс-форм с подвижной матрицей в процессах брикетирования дискретных отходов металлообработки обеспечивает снижение давления и усилия прессования пластичных низко- и среднеуглеродистых сталей до 45 %; высокоуглеродистых малопластичных и труднодеформируемых – до 35; чугунов – до 25 %. Удельная работа деформации (энергетические затраты) при нагреве отходов черных металлов до температур неполной горячей деформации 700 – 850 °С снижается в 2,3–2,5 раза. По сравнению с брикетированием в неподвижной матрице при одних и тех же условиях удельная работа деформации снижается на 15–20 %.

5. Сравнительный анализ расчетных и экспериментальных данных показал, что погрешность расчетов не превышает 12 %. Таким образом доказано, что уравнения разработанной физико-математической модели процесса деформационного уплотнения дискретных металлических материалов, применяемые совместно с экспериментально-аналитическим методом определения структурно-реологических характеристик материалов, позволяют достигнуть высокой сходимости расчетных и экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов, О. М. Задача осесимметричного прессования дискретных металлических материалов / О. М. Дьяконов, А. А. Литвинко // Наука и техника. 2024. Т. 23, № 1. С. 21–32. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-1-21-32>.
2. Литвинко, А. А. Технология горячего брикетирования отходов черных металлов в пресс-формах с подвижной матрицей / А. А. Литвинко // Наука и техника. 2023. Т. 22, № 5. С. 368–375. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-5-367-375>.
3. Дорофеев, Ю. Г. Динамическое горячее прессование пористых материалов / Ю. Г. Дорофеев. М.: Наука, 1968. 120 с.
4. Рудевский, С. Г. Исследование и внедрение процесса статического горячего прессования стружки черных

металлов. Изучение структуры и свойств полученных материалов: дис. ... канд. техн. наук / С. Г. Рудевский. Новочеркасск, 1973. 199 с.

5. Дьяконов, О. М. Комплексная переработка стружки и металлосодержащих шламов / О. М. Дьяконов. Минск: Технология, 2012. 262 с.
6. Дьяконов, О. М. Горячее прессование стружки и стружко-порошковых смесей / О. М. Дьяконов // Порошковая металлургия. Минск, 2010. Вып. 33. С. 25–35.
7. Равич, Б. М. Брикетирование в цветной и черной металлургии / Б. М. Равич. М.: Металлургия, 1975. 229 с.
8. Fawcett, R. A. The Recycling of Cast Iron Borings and Steel Swarf / R. A. Fawcett // Conservation & Recycling. 1978. Vol. 2, No 3–4. P. 205–210. [https://doi.org/10.1016/0361-3658\(78\)90013-9](https://doi.org/10.1016/0361-3658(78)90013-9).
9. Schulz, A. C. The Recycling of Metallic Incinerator and Machine Shop Waste for Remelting by Foundries and Steel Mills / A. C. Schulz // Conservation & Recycling. 1981. Vol. 4, No 3. P. 153–159. [https://doi.org/10.1016/0361-3658\(81\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0361-3658(81)90019-9).
10. Свидуневич, Н. А. Проблемы получения и использования брикетированных металлоотходов / Н. А. Свидуневич [и др.] // Литье и металлургия. 2003. № 3. С. 110–112.

Поступила 08.04.2024

Подписана к печати 10.06.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. Dyakonov O. M., Litvinko A. A. (2024) Axisymmetric Pressing Problem of Discrete Metal Materials. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 23(1), 21–32. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-1-21-32> (in Russian).
2. Litvinko A. A. (2023) Hot Briquetting Technology for Ferrous Metal Waste in Molds with Movable Matrix. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 22 (5), 368–375 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-5-367-375>.
3. Dorofeev Yu. G. (1968) *Dynamic Hot Pressing of Porous Materials*. Moscow, Nauka Publ. 120 (in Russian).
4. Rudevsky S. G. (1973) *Research and Implementation of the Process of Static Hot Pressing of Ferrous Metal Chips. Study of the Structure and Properties of the Obtained Materials* [Dissertation]. Novocheerkassk. 199 (in Russian).
5. Dyakonov O. M. (2012) *Complex Processing of Chips and Metal-Containing Sludge*. Minsk, Tekhnologiya Publ. 262 (in Russian).
6. Dyakonov O. M. (2010) Hot pressing of Chips and Chip-powder Mixtures. *Poroshkovaya Metallurgiya* [Powder Metallurgy]. Minsk, Iss. 33, 25–35 (in Russian).
7. Ravich B. M. (1975) *Briquetting in Non-Ferrous and Ferrous Metallurgy*. Moscow, Metallurgiya Publ. 229 (in Russian).
8. Fawcett R. A. (1978) The Recycling of Cast Iron Borings and Steel Swarf. *Conservation & Recycling*, 2 (3–4), 205–210. [https://doi.org/10.1016/0361-3658\(78\)90013-9](https://doi.org/10.1016/0361-3658(78)90013-9).
9. Schulz A. C. (1981) The Recycling of Metallic Incinerator and Machine Shop Waste for Remelting by Foundries and Steel Mills. *Conservation & Recycling*, 4 (3), 153–159. [https://doi.org/10.1016/0361-3658\(81\)90019-9](https://doi.org/10.1016/0361-3658(81)90019-9).
10. Svidunovich N. A. (2003) Problems of Obtaining and using Briquetted Metal Waste. *Litiyo i Metallurgiya = Foundry Production and Metallurgy*, (3), 110–112 (in Russian).

Received: 08.04.2024

Accepted: 10.06.2024

Published online: 31.07.2024

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА
DEFORMATION
IN SOLID MECHANICS

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-289-294>

УДК 624.04

Функции Грина для статически неопределимых однопролетных балок

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков^{1,2)},
канд. техн. наук, доц. О. В. Козунова¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь),

²⁾Белорусско-российский университет (Могилев, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. В зависимости от класса в инженерной практике различают решаемые задачи: статические / динамические, плоские / пространственные, контактные / с частичным или краевым опиранием и др. Давление рельса на шпалу, колонны на фундамент, плит перекрытия на стены, фундамента на грунтовое основание – все это типичные примеры практических задач, приводящие к необходимости решения краевых задач – математически и контактных – физически. Из математических постановок контактных задач конструкций, лежащих на упругом основании, известно, что основу их решения составляет поиск закона распределения реактивных давлений на контакте конструкции с основанием, который сложным образом зависит от жесткости конструкции, упругих характеристик основания, внешней нагрузки, характера закрепления конструкции. При решении многих краевых и начально-краевых задачах строительной механики и теории упругости, таких как решение классического однородного уравнения методом собственных функций, при некоторых граничных условиях, вытекающих из рода закрепления балки на концах, важную, порой определяющую, роль играют фундаментальные функции оператора x^{IV} , которые получили свою базовую трактовку академиком А. Н. Крыловым. Однако вычисления по этим формулам весьма затруднительны из-за математических ограничений и громоздкости выражений. В связи с этим в предлагаемой работе использованы собственные функции дифференциального уравнения изгибных колебаний статически неопределимых однопролетных балок для построения функции Грина в виде бесконечного ряда по этим собственным функциям. Построены точные выражения для определения прогибов балок от сосредоточенной силы. Полученные выражения представлены через элементарные функции, носят общий характер и дают возможность решать разнообразные задачи статики, динамики и устойчивости рассматриваемых балок. Авторами получены численные результаты для изгибающих моментов и прогибов защемленной балки и балки с защемленной и шарнирной опорами с использованием компьютерного пакета MATHEMATICA.

Ключевые слова: собственные функции, ортогональность, статически неопределимые балки, внутренние усилия

Для цитирования: Босаков, С. В. Функции Грина для статически неопределимых однопролетных балок / С. В. Босаков, О. В. Козунова // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 289–294. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-289-294>

Green's Functions for Statically Indeterminate Single-Span Beams

S. V. Bosakov^{1,2)}, O. V. Kozunova¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus),

²⁾Belarusian-Russian University (Mogilev, Republic of Belarus)

Abstract. Depending on the class in engineering practice, the problems to be solved are distinguished: static/dynamic, flat/spatial, contact/with partial or edge support, etc. The pressure of a rail on a sleeper, a column on a foundation, floor slabs

Адрес для переписки

Босаков Сергей Викторович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

Address for correspondence

Bosakov Siarhei V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

on walls, a foundation on a soil foundation – all these are typical examples of practical problems that lead to the need to solve boundary value problems – mathematically and contact problems – physically. From the mathematical formulations of contact problems of structures lying on an elastic foundation, it is known that the basis for their solution is the search for the law of distribution of reactive pressures at the contact of the structure with the foundation, which depends in a complex way on the rigidity of the structure, the elastic characteristics of the foundation, external load, and the nature of the structure’s fastening. When solving many boundary-value and initial-boundary-value problems of structural mechanics and the theory of elasticity, such as solving a classical homogeneous equation by the method of eigenfunctions, under certain boundary conditions arising from the type of fastening of the beam at the ends, an important, sometimes decisive, role is played by the fundamental functions of the operator x^{IV} , which received their basic interpretation by Academician A. N. Krylov. However, calculations using these formulas are very difficult due to mathematical limitations and the cumbersomeness of the expressions. In the proposed work, eigenfunctions of the differential equation of bending vibrations of statically indeterminate single-span beams are used to construct the Green's function in the form of an infinite series for these eigenfunctions. Exact expressions have been constructed to determine the deflections of beams due to concentrated force. The resulting expressions are presented through elementary functions, are of a general nature and make it possible to solve various problems of statics, dynamics and stability of the beams under consideration. The authors obtained numerical results for bending moments and deflections of a clamped beam and a beam with clamped and hinged supports using the MATHEMATICA computer package.

Keywords: eigenfunctions, orthogonality, statically indeterminate beams, internal forces

For citation: Bosakov S. V., Kozunova O. V. (2024) Green’s Functions for Statically Indeterminate Single-Span Beams. *Science and Technique*. 23 (4), 289–294. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-289-294> (in Russian)

Введение

Из истории вопроса о применении функций Грина в инженерных расчетах. В инженерной практике в зависимости от класса [1] различают решаемые задачи: статические / динамические; плоские / пространственные; контактные / с частичным или краевым опиранием и др. Давление рельса на шпалу, колонны на фундамент, плит перекрытия на стены, фундамента на грунтовое основание – вот типичные примеры практических задач, приводящие к необходимости решения краевых задач – математически и контактных – физически.

Так, основу решения контактных задач конструкций, лежащих на упругом основании, составляет поиск закона распределения реактивных давлений на контакте конструкции с основанием, который сложным образом зависит от жесткости конструкции, упругих характеристик основания, внешней нагрузки, характера закрепления конструкции. В монографии [2], рассматривая плоские контактные задачи (плоская деформация) методом Ритца, автор использует представление функции Грина упругого основания в виде разложения [3]

$$K(x - \xi) = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \left[-\ln |x - \xi| + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} T_m(x) T_n(\xi) \right], \quad (1)$$

где первое слагаемое в скобках представляет решение Фламана [4] для упругой однородной изотропной полуплоскости.

При решении пространственных контактных задач для функции Грина [2] используется представление

$$K(x - \xi, y - \eta) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \times \left[\frac{1}{R} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{mp}^{nq} T_m(x) T_p(\xi) T_n(y) T_q(\eta) \right], \quad (2)$$

$$R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

где первое слагаемое в скобках представляет решение Буссинеска [4] для упругого однородного изотропного полупространства.

Необходимо отметить, что выражения (1) и (2) представляют функции Грина при решении неоднородных краевых задач [2] методом собственных функций в виде суммы сингулярного слагаемого через спектральное соотношение способа ортогональных полиномов [5] и некоторой непрерывной гладкой функции.

В работе [6] используется другой подход решения краевой задачи – метод специальных аппроксимаций для вычисления несобственного интеграла перемещения границ поверхности упругого основания

$$W(x, y) = \frac{P(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \int_0^{\infty} L(u) J_0(u \sqrt{x^2 + y^2}) du, \quad (3)$$

где $L(u)$ – функция, характеризующая данный тип модели упругого основания; $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода [13, Грандштейн].

При реализации метода специальной аппроксимации подынтегральная функция $L(u)$ в выражении (3) представляется в виде суммы слагаемых, первое из которых выделяет необходимую особенность в функции перемещений после взятия несобственного интеграла (3). Подробно про-

цесс реализации метода специальной аппроксимации в монографии [6] автором рассматривался на примере упругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием. Для других моделей упругого основания ввиду однотипности эти выкладки опущены.

Приведенные в работе [6] выражения для перемещений поверхности упругого основания иначе называют функцией Грина для рассматриваемого основания, если принять величину силы, равной единице. В монографии Г. Я. Попова [7] эти функции называются ядрами линейно деформируемого основания.

При решении многих краевых и начально-краевых задачах строительной механики и теории упругости, таких как решение классического однородного уравнения методом собственных функций

$$x^{IV} + \lambda x = 0, \quad (4)$$

при некоторых граничных условиях, вытекающих из рода закрепления балки на концах, важную, порой определяющую, роль играют фундаментальные функции оператора x^{IV} , которые получили свою базовую трактовку академиком А. Н. Крыловым в работе [8]. Вычисления по этим формулам весьма затруднительны, так как фундаментальные функции при степени дифференцирования $n \geq 2$ представляются в виде разности двух членов, почти равных по величине.

В работе В. Н. Фаддеевой [9] в табличном виде дано специальное преобразование фундаментальных функций оператора x^{IV} , предложенное ранее А. Н. Крыловым, которое значительно упрощает их выражения. Обычно рассматриваются шесть типов граничных условий закрепления балки. Выражения фундаментальных функций для этих типов граничных условий приводятся как в специальных работах [8, 9], так и в некоторых учебниках по математической физике и дифференциальным исчислениям [10].

Построение функций Грина для статически неопределимых однопролетных балок

Рассмотрим формальное решение задачи о свободных колебаниях однопролетной балки с равномерной массой

$$\frac{d^4 y_n(x)}{dx^4} - \lambda_n^4 y_n(x) = 0, \quad (5)$$

где λ_n – величина, характеризующая частоту собственных колебаний балки по n -й форме собственных колебаний $y_n(x)$.

Однако дифференциальное уравнение изгиба балки постоянной изгибной жесткости EJ под действием нагрузки $q(x)$ имеет следующий вид:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ}. \quad (6)$$

Представим решение (6) в виде ряда по собственным функциям (5)

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x), \quad (7)$$

где A_n – неопределенные постоянные коэффициенты.

Тогда из уравнений (5) и (6) сразу получаем

$$A_n \lambda_n^4 y_n(x) = \frac{q(x)}{EJ}. \quad (8)$$

Обе части (8) умножаем на $y_k(x)$ и интегрируем в пределах длины балки ℓ . На основании ортогональности собственных функций [11] получаем:

$$A_n = \frac{\int_0^{\ell} y_n(x) q(x) dx}{\lambda_n^4 \gamma_n EJ}; \quad (9)$$

$$\gamma_n = \int_0^{\ell} y_n^2(x) dx. \quad (10)$$

Интеграл в числителе (9) представляет работу внешней нагрузки $q(x)$ на перемещениях собственной функции $y_n(x)$. Поэтому при действии сосредоточенной силы P в точке балки с абсциссой x_p в безразмерных координатах окончательно получаем

$$A_n = \frac{y_n\left(\frac{x_p}{\ell}\right) P \ell^3}{\lambda_n^4 \gamma_n EJ}. \quad (11)$$

Расчет 1. Рассмотрим действие сосредоточенной силы на балку с защемленными краями (рис. 1).

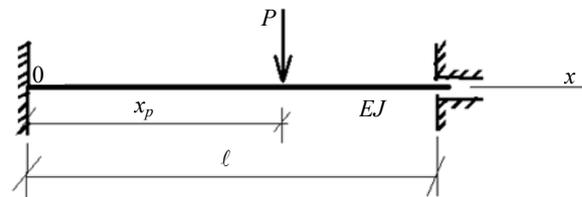


Рис. 1. Балка с защемленными краями под действием сосредоточенной силы

Fig. 1. Beam with pinched edges under the influence of concentrated force

В этом случае перемещение собственной функции $y_n(x)$ [12, 9] получено в виде:

$$y_n(x) = \cos\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) + \sin\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) \frac{\operatorname{ch}\lambda_n \sin\lambda_n + \cos\lambda_n \operatorname{ch}\lambda_n}{\operatorname{ch}\lambda_n \cos\lambda_n - \operatorname{sh}\lambda_n \sin\lambda_n - 1} + \operatorname{ch}\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) \frac{\operatorname{ch}\lambda_n \sin\lambda_n + \cos\lambda_n \operatorname{sh}\lambda_n}{\operatorname{ch}\lambda_n \cos\lambda_n - \operatorname{sh}\lambda_n \sin\lambda_n - 1} + \operatorname{ch}\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) \frac{\cos\lambda_n - \operatorname{sech}\lambda_n + \sin\lambda_n \operatorname{tanh}\lambda_n}{\cos\lambda_n - \operatorname{sech}\lambda_n - \sin\lambda_n \operatorname{tanh}\lambda_n}; \quad (12)$$

$$1 - \cos\lambda_n \operatorname{ch}\lambda_n = 0;$$

$$\lambda_1 = 4,7300; \quad \lambda_2 = 7,8532; \quad \lambda_3 = 10,9956; \quad \lambda_n = \lambda_{n-1} + \pi, \quad n = 4, 5, \dots,$$

где

$$\gamma_n = \operatorname{Re}[\{(3 + 3i)(-4\sin(1+i)\lambda_n + (1+i)\sin 2\lambda_n + \sin(2+2i)\lambda_n - 4\operatorname{sh}(1+i)\lambda_n + (1+i)\operatorname{sh} 2\lambda_n + \operatorname{sh}(2+2i)\lambda_n) + 8i(\cos\lambda_n - \operatorname{ch}\lambda_n)^2 \lambda_n\} / \{4((-1-i) + \operatorname{ch}(1+i)\lambda_n + i\operatorname{ch}(1+i)\lambda_n)^2 \lambda_n\}].$$

На рис. 2 приводятся первые три формы собственных колебаний балки с защемленными краями.

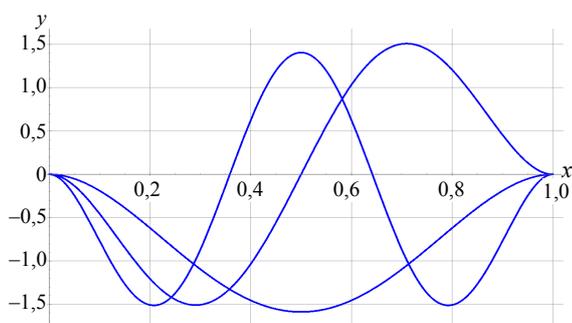


Рис. 2. Первые три формы собственных колебаний балки с защемленными краями

Fig. 2. First three modes of natural vibrations of the beam with pinched edges

Дифференцируя дважды полученное выражение для прогибов балки от действия силы $P = 1$ (3), можно получить линии влияния изгибающих моментов для любого сечения балки [1].

На рис. 3 построена эпюра изгибающих моментов в балке от действия треугольной нагрузки.

Полученное выражение (7) при известных (10) позволяет определять прогибы защемленной балки, усилия в ее сечениях от произвольной внешней нагрузки $q(x)$ и носит название функции Грина для этой балки. При использовании (7) нужно иметь в виду, что при дифференцировании сходимость рядов ухудшается [10], поэтому при вычислении усилий необходимо увеличивать число членов ряда (7).

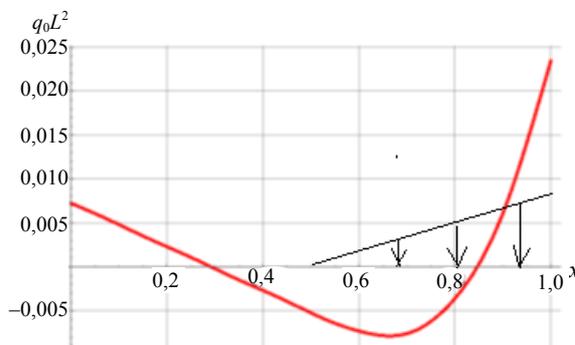


Рис. 3. Очертание эпюры изгибающих моментов в балке от треугольной нагрузки

Fig. 3. Outline diagram of bending moments in a beam due to triangular load

Расчет 2. Рассмотрим балку с защемленной и шарнирной опорами под действием сосредоточенной силы P (рис. 4)

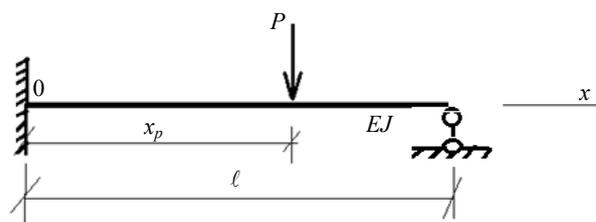


Рис. 4. Балка с защемленной и шарнирной опорами под действием сосредоточенной силы P

Fig. 4. Beam with clamped and hinged support under the influence of concentrated force P

Для этого случая перемещение собственной функции $y_n(x)$ [12, 9] получено в виде

$$y_n(x) = \cos\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) - \operatorname{ch}\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) -$$

$$-\sin\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) \frac{\cos \lambda_n - \operatorname{ch} \lambda_n}{\sin \lambda_n - \operatorname{sh} \lambda_n} + \operatorname{sh}\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right) \frac{\cos \lambda_n - \operatorname{ch} \lambda_n}{\sin \lambda_n - \operatorname{sh} \lambda_n};$$

$$\operatorname{tg} \lambda_n - \operatorname{tanh} \lambda_n = 0; \quad (13)$$

$$\lambda_1 = 3,7266; \quad \lambda_2 = 7,0686; \quad \lambda_3 = 10,2102;$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \pi, \quad n = 4, 5, \dots,$$

где

$$\gamma_n = \left(1 + (-2\operatorname{ch} \lambda_n \sin \lambda_n + \operatorname{ch}^2 \lambda_n \sin 2\lambda_n + \cos \lambda_n (2\operatorname{sh} \lambda_n - \cos \lambda_n \operatorname{sh} 2\lambda_n)) : (2(\sin \lambda_n - \operatorname{sh} \lambda_n)^2 \lambda_n)\right).$$

На рис. 5 приведены первые три собственные функции для балки с защемленным и шарнирно опертым концами.

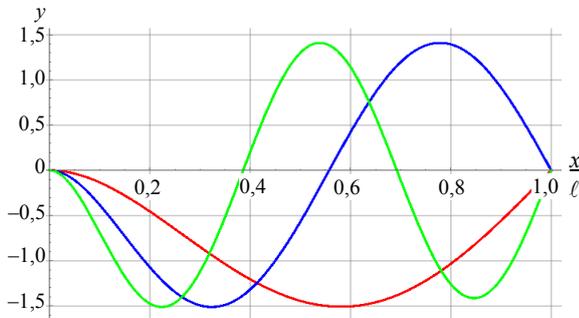


Рис. 5. Первые три собственные функции для балки с защемленным и шарнирно опертым концами

Fig. 5. First three eigenfunctions for a beam with clamped and simply supported ends

На рис. 6 приводится очертание линии влияния изгибающих моментов для сечения в середине пролета балки.

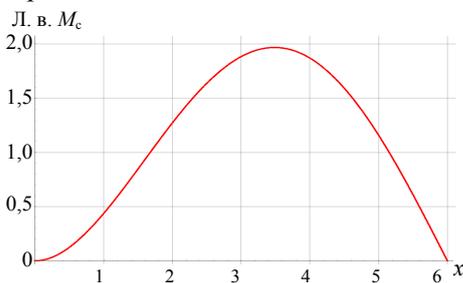


Рис. 6. Линия влияния изгибающего момента для сечения в середине пролета балки

Fig. 6. Bending moment influence line for a section in the middle of the beam span

Надо отметить, что полученные выражения для форм колебаний в виде рядов (11), (12) об-

ладают быстрой сходимостью вследствие наличия собственных чисел в четвертой степени в знаменателе.

Определение критических сил

Рассмотрим использование полученных результатов для определения критических сил в центрально сжатых статически неопределимых стержнях. Для стержня с защемленной и шарнирной опорами зададимся первой формой потери устойчивости от действия центрально приложенной силы в виде (12) при $\lambda_1 = 3,7266$.

Согласно [13], величина критической силы определится из выражения

$$P_{cr} = \frac{EJ \int_0^\ell (y_n''(x))^2 dx}{\int_0^\ell (y_n'(x))^2 dx}. \quad (13)$$

Подставляя первую собственную функцию и число (12) в выражение (13), получаем

$$P_{cr} = 20,6489 \frac{EJ}{\ell^2},$$

что немного превышает, как обычно при использовании энергетического способа [14], точное значение $P_{cr} = 20,14 \frac{EJ}{\ell^2}$.

В заключение отметим, что частоты собственных колебаний рассмотренных балок определяются совокупностью полученных собственных чисел $\lambda_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

ВЫВОД

В работе получены аналитические выражения функций Грина для однопролетных статически неопределимых балок в виде бесконечно-го быстро сходящегося ряда. Эти выражения дают возможность решать разнообразные задачи статики, динамики и устойчивости для этих балок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын, А. Р. Строительная механика: учеб. пособие для строит. спец. вузов / А. Р. Ржаницын. 2-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.

2. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. Брест: Изд.-во БрГТУ, 2006. 108 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 496 с.
4. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. 2-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2002. 400 с.
5. Клубин, П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании / П. И. Клубин // Инж. сб. 1952. № 12. С. 95–135.
6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
7. Попов, Г. Я. К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве / Г. Я. Попов // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1959. № 11–12. С. 11–19.
8. Крылов, А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании / А. Н. Крылов. М.: Машстройиздат, 1948. 56 с.
9. Фаддеева, В. Н. О фундаментальных функциях оператора X^{IV} / В. Н. Фаддеева // Труды математического института АН СССР имени В. А. Стеклова. М., Л.: Изд.-во Академии наук СССР, 1949. Т. 28: Сб. работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института. С. 157–159.
10. Фиктенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фиктенгольц. 10-е изд., перераб. М.: Физматлит, 2016. Т. II. 800 с.
11. Толстов, Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; под ред. Э. И. Григолоука. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
13. Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников / под ред. А. Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1984. 416 с.
14. Тимошенко, С. П. Соппротивление материалов. Более сложные вопросы теории и задачи / С. П. Тимошенко; пер. В. Н. Федорова с 3-го американ. изд.; под ред. И. К. Снитко. М.: Наука, 1965. Т. 2. 480 с.

Поступила 04.04.2024

Подписана к печати 07.06.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. Rzhanytsyn A. R. (1991) *Structural Mechanics: Textbook for Specialized Construction Universities*. 2nd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).
2. Bosakov S. V. (2006) *Ritz Method in Contact Problems of Elasti-City Theory*. Brest: Publishing House of Brest State Technical University. 108 (in Russian).
3. Galin L. A. (ed.). (1976) *Development of the Theory of Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).
4. Aleksandrov A. V., Potapov V. D. (2002) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. 2nd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
5. Klubin P. I. (1952) Calculation of Beam and Round Slabs on an Elastic Foundation. *Inzhenerny Sbornik* [Engineering Collection], (12), 95–135 (in Russian).
6. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (IN Russian).
7. Popov G. Ya. (1959) On the Theory of Plate Bending on an Elastic Inhomogeneous Half-Space. *Izvestiya Vuzov. Stroitel'stvo i Arkhitektura* [News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture], (11–12), 11–19.
8. Krylov A. N. (1948) *On the Calculation of Beams Lying on an Elastic Foundation*. Moscow, Mashstroizdat Publ. 56 (in Russian).
9. Faddeeva V. N. (1949) On the Fundamental Functions of Operator X^{IV} . *Trudy Matematicheskogo Instituta AN SSSR imeni V. A. Steklova. T. 28: Sb. Rabot po Priblizhennomu Analizu Leningradskogo Otdeleniya Instituta* [Proceedings of the mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences named After V. A. Steklov. Vol. 28. Collection of Works on approximate Analysis of the Leningrad Branch of the Institute]. Moscow, Leningrad, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 157–159 (in Russian).
10. Fikhtengolts G. M. *Course of Differential and Integral Calculus. Vol. II*. 10th Ed. Moscow, Fizmatlit Publ. 800 (in Russian).
11. Tolstov G. P. (1980) *Fourier Series*. 3rd ed. Moscow, Nauka Publ. 384 (in Russian).
12. Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. (1974) *Vibration Problems in Engineering*. N.Y., Wiley Publ. 521.
13. Smirnov A. F., Aleksandrov A. V., Lashchenikov B. Ya., Shaposhnikov N. N. (1984) *Structural Mechanics. Dynamics and Stability of Structures*. Moscow, Stroiizdat Publ. 416 (in Russian).
14. Timoshenko S. P. (1965) *Strength of Materials, Vol. II: Advanced Theory and Problems*. 3rd ed. NY, D Van Nostrand Company Inc. 1941.

Received: 04.04.2024

Accepted: 07.06.2024

Published online: 31.07.2024

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-295-303>

УДК 534.131:534-8

Вариационная задача о колебаниях неравнотолщинных колец и ее применение для расчета концентраторов ультразвуковых колебаний

Докт. техн. наук, доц. Д. А. Степаненко¹⁾, асп. А. Н. Киндрук¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. Рассмотрена методика расчета собственных частот колебаний неравнотолщинных колец, основанная на использовании вариационного принципа Гамильтона и теорий колебаний криволинейных балок типа Эйлера – Бернулли и Тимошенко. Решения задачи представляются в виде рядов Фурье, что позволяет свести ее к решению системы линейных алгебраических уравнений. Задача определения собственных частот сводится при этом к обобщенной задаче на собственные значения матриц. На основе сравнения численных результатов, полученных для эксцентричного кольца, с результатами расчетов методом конечных элементов показаны преимущества использования теории Тимошенко, включающие в себя повышение точности вычислений и возможность идентификации радиальных и радиально-изгибных собственных форм. Исследована возможность снижения вычислительных затрат при использовании теории Тимошенко за счет представления определителя описывающей задачу блочной матрицы в виде произведения определителей более низких порядков. Показано, что соотношения, полученные на основе теории Эйлера – Бернулли, в частном случае равнотолщинного кольца приводят к известным аналитическим формулам для собственных частот колебаний кольца. Полученные результаты могут быть использованы для расчета кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний. Преимущество предлагаемого метода по сравнению с другими известными подходами, например методом гармонического баланса, состоит в отсутствии необходимости работы с дифференциальными или интегро-дифференциальными уравнениями колебаний, которые в случае неравнотолщинных колец имеют достаточно сложную структуру и требуют для своего решения применения вычислительно-затратных операций, например дискретной свертки.

Ключевые слова: вариационная задача, принцип Гамильтона, ряды Фурье, теория Тимошенко, ультразвуковые колебания, кольцевой концентратор, собственные частоты

Для цитирования: Степаненко, Д. А. Вариационная задача о колебаниях неравнотолщинных колец и ее применение для расчета концентраторов ультразвуковых колебаний / Д. А. Степаненко, А. Н. Киндрук // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 295–303. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-295-303>

Variational Problem on Vibrations of Unequal-Thickness Rings and Its Application for Calculating Ultrasonic Vibration Concentrators

D. A. Stepanenko¹⁾, A. N. Kindruk¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers a method for calculating the natural frequencies of vibrations of unequal-thickness rings, based on application of Hamilton's variational principle and theories of vibrations of curved beams of the Euler-Bernoulli and Timoshenko type. Solutions of the problem are represented as Fourier series providing possibility of its reduction to the system of linear algebraic equations. The problem of determining natural frequencies is reduced to a generalized problem for the eigenvalues of matrices. Based on a comparison of the numerical results obtained for an eccentric ring with the results of calculations by the finite element method, the advantages of using the Timoshenko theory are shown, including increased calculation accuracy and the possibility to identify radial and radial-flexural eigenmodes. The possibility of reducing computational costs when using the Timoshenko theory is explored by representing the determinant of the block matrix describing the problem as a product of lower-order determinants. It is shown that the relations obtained on the basis of the Euler-Bernoulli theory, in the particular case of equal-thickness ring, lead to the well-known analytical formulas for the natural frequencies of the ring oscillations. The obtained results can be used to calculate ring concentrators of ultrasonic vibrations.

Адрес для переписки

Степаненко Дмитрий Александрович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-91-01
stepd@tut.by

Address for correspondence

Stepanenko Dmitry A.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-91-01
stepd@tut.by

The advantage of the proposed method in comparison with other known approaches, for example, the harmonic balance method, consists in no need for the work with differential or integral-differential equations of vibrations, which are a rather complex structure for the case of unequal-thickness rings and require the use of computationally expensive operations, for example, discrete convolution, for their solution.

Keywords: variational problem, Hamilton principle, Fourier series, Timoshenko theory, ultrasonic vibrations, ring-shaped concentrator, natural frequencies

For citation: Stepanenko D. A., Kindruk A. N. (2024) Variational Problem on Vibrations of Unequal-Thickness Rings and Its Application for Calculating Ultrasonic Vibration Concentrators. *Science and Technique*. 23 (4), 295–303. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-295-303> (in Russian)

Введение

Усиление ультразвуковых колебаний (УЗК) по амплитуде является необходимым шагом для их успешного применения с целью интенсификации различных технологических процессов, таких как размерная обработка хрупких материалов, обработка биологических тканей, сварка и т. п. В качестве конструктивных элементов, осуществляющих усиление УЗК, используются стержневые и кольцевые концентраторы, выполняемые в виде стержней переменного по длине сечения и неравнотолщинных колец [1, с. 100; 2; 3]. Одной из основных задач, связанных с расчетом концентраторов УЗК, является определение собственных частот их колебаний. Важность этой задачи определяется необходимостью согласования собственных частот колебаний концентраторов с рабочими частотами электроакустических преобразователей, используемых в качестве возбудителей колебаний. Такое согласование обеспечивает резонансный режим функционирования колебательной системы и за счет этого позволяет добиться максимальной эффективности ее работы. Для расчета собственных частот колебаний концентраторов УЗК используют ряд механико-математических методов, таких как метод входного импеданса, метод передаточных матриц и метод конечных элементов [2, 4, 5]. Существует также метод гармонического баланса (МГБ), основанный на представлении распределения амплитуды колебаний в концентраторе в виде ряда Фурье [6–8]. МГБ позволяет свести описывающее колебания дифференциальное или интегро-дифференциальное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда Фурье, а задачу определения собственных частот – к обобщенной задаче на собственные значения матриц. Наиболее целесообразным является применение МГБ для расчета кольцевых концентраторов, так как распределение амплитуды колебаний в них обладает есте-

ственной периодичностью по угловой координате. Недостатками МГБ в случае неравнотолщинных колец являются достаточно сложная структура лежащих в основе метода интегро-дифференциальных уравнений и необходимость выполнения некоторых нетривиальных операций над коэффициентами рядов Фурье, в частности их дискретной свертки [6]. Учитывая, что используемые в МГБ интегро-дифференциальные уравнения вытекают из фундаментальных вариационных принципов механики, в частности из принципа наименьшего действия Гамильтона, перспективным является прямое решение описывающей колебания концентратора вариационной задачи путем представления функции распределения амплитуды колебаний в виде ряда Фурье. Это исключит необходимость перехода к сложным по своей структуре интегро-дифференциальным уравнениям колебаний. Подобный подход успешно использовался для изучения колебаний различных объектов [8, 9], а в данной статье дается его систематическое описание применительно к колебаниям неравнотолщинных колец.

Постановка и методика решения задачи

Схема конструкции кольцевого концентратора УЗК с применяемыми в дальнейшем анализе обозначениями приведена на рис. 1.

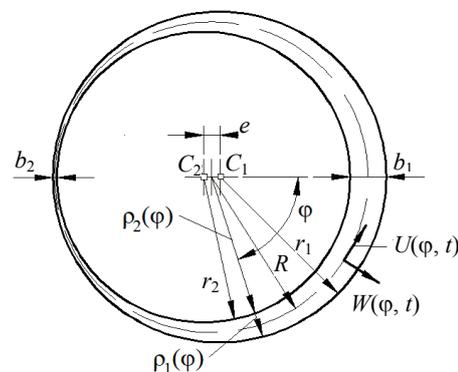


Рис. 1. Схема конструкции кольцевого концентратора УЗК

Fig. 1. Design diagram of ring-shaped concentrator of ultrasonic vibrations

На рисунке использованы следующие обозначения: φ – угловая координата; $W(\varphi, t)$ – радиальная составляющая колебательного смещения в момент времени t ; $U(\varphi, t)$ – тангенциальная составляющая колебательного смещения; r_2 – радиус внутреннего контура; r_1 – то же наружного контура; b_1 и b_2 – максимальное и минимальное значения радиальной толщины; e – эксцентриситет; R – радиус средней линии; $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ – предельные значения радиальной координаты для сечения с угловой координатой φ . На рис. 1 представлен частный случай конструкции с эксцентричным расположением цилиндрических поверхностей, однако дальнейший анализ применим и для концентраторов более сложной формы при условиях наличия зеркальной геометрической симметрии и постоянства радиуса средней линии.

Вариационная задача будет рассматриваться в двух формулировках:

1) Эйлера – Бернулли, в которой используется допущение о нерастяжимости средней линии кольца и не учитываются сдвиговые деформации;

2) Тимошенко, учитывающей растяжимость средней линии кольца, сдвиговые деформации и вращение поперечных сечений при изгибе (в виде независимой переменной в отличие от формулировки Эйлера – Бернулли, где угол поворота сечений связан с радиальной составляющей колебательного смещения).

Формулировка Эйлера – Бернулли. С учетом условия нерастяжимости средней линии [10]

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = W \quad (1)$$

кинетическая энергия кольца примет вид

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) dV = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \rho S \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial t} \right)^2 \right) d\varphi, \quad (2)$$

где ρ – плотность материала; dV – элемент объема; $S(\varphi)$ – площадь поперечного сечения.

Если тангенциальная составляющая колебательного смещения изменяется в зависимости от времени по гармоническому закону

$$U(\varphi, t) = u(\varphi) \sin(\omega t), \quad (3)$$

где ω – круговая частота колебаний, то выражение (2) примет вид

$$E_k = \frac{\omega^2 R \cdot (1 + \cos(2\omega t))}{4} \int_0^{2\pi} \rho S \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right) d\varphi. \quad (4)$$

При использовании в формуле (3) фазорного представления гармонических величин (представления с помощью комплексных экспонент) возможна потеря физического смысла при вычислении энергии, так как физический смысл сохраняется только при выполнении над фазорами линейных операций (умножение на комплексное число, сложение, дифференцирование и интегрирование), а вычисление энергии включает в себя нелинейную операцию возведения в квадрат.

Потенциальная энергия деформации кольца будет определяться выражением [11, с. 316]

$$E_n = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma^2}{E} dV = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \frac{M^2}{EI} d\varphi = \frac{1}{2R^3} \int_0^{2\pi} EI \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi,$$

где σ – нормальные механические напряжения; E – модуль продольной упругости; M – изгибающий момент; $I(\varphi)$ – осевой момент инерции поперечного сечения, или с учетом выражений (1) и (3)

$$E_n = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{4R^3} \int_0^{2\pi} EI \left(\frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} \right)^2 d\varphi. \quad (5)$$

Согласно принципу Гамильтона функция $u(\varphi)$ должна обеспечивать наименьшее значение функционала действия

$$A = \int_0^T (E_k - E_n) dt = T(\langle E_k \rangle - \langle E_n \rangle), \quad (6)$$

где $\langle \cdot \rangle$ – среднее значение за период T колебаний.

Представим амплитуду тангенциальной составляющей колебательного смещения и ее производные в виде частичных сумм рядов Фурье:

$$u(\varphi) = \sum_{i=1}^N a_i^{(u)} \sin(i\varphi); \quad (7)$$

$$u'(\phi) = \sum_{i=1}^N i a_i^{(u)} \cos(i\phi); \quad (8)$$

$$u'''(\phi) = -\sum_{i=1}^N i^3 a_i^{(u)} \cos(i\phi). \quad (9)$$

В этом случае функционал (6) может рассматриваться как зависящий от амплитуд $a_i^{(u)}$ гармоник ряда Фурье, то есть

$$A = A(a_1^{(u)}, a_2^{(u)}, \dots, a_N^{(u)}),$$

а задача его минимизации сводится к задаче отыскания экстремума разности средних значений кинетической и потенциальной энергий [9]

$$\frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Усреднение выражений (4) и (5) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle &= \frac{\omega^2 R^2}{4} \int_0^{2\pi} \rho S \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 \right) d\phi; \\ \langle E_n \rangle &= \frac{1}{4R^3} \int_0^{2\pi} EI \left(\frac{d^3 u}{d\phi^3} + \frac{du}{d\phi} \right)^2 d\phi. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя формулы (11) в условие экстремума (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} &= \frac{R}{2} \left(-\frac{1}{R^4} \int_0^{2\pi} EI (u''' + u') \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\partial u'''}{\partial a_k^{(u)}} + \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} \right) d\phi + \right. \\ &\left. + \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho S \left(u \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} + u' \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} \right) d\phi \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом уравнений (7)–(9) выполняются равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} &= \sin(k\phi); \\ \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} &= k \cos(k\phi); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u'''}{\partial a_k^{(u)}} = -k^3 \cos(k\phi)$$

и условие экстремума (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} &= \frac{R}{2} \left(-\frac{k(k^2 - 1)}{R^4} \sum_{i=1}^N i(i^2 - 1) \times \right. \\ &\times \int_0^{2\pi} EI \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \\ &+ \omega^2 \left(k \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} \rho S \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho S \sin(k\phi) \sin(i\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие (13) может быть записано в виде системы линейных алгебраических уравнений вида

$$(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{a}^{(u)} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

где $\mathbf{a}^{(u)}$ – вектор амплитуд гармоник ряда (7); \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы размером $N \times N$, элементы которых определяются формулами:

$$A_{k,i} = -\frac{k(k^2 - 1)}{R^4} i(i^2 - 1) \times \int_0^{2\pi} EI \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_{k,i} &= ki \int_0^{2\pi} \rho S \cos(k\phi) \cos(i\phi) d\phi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \rho S \sin(k\phi) \sin(i\phi) d\phi. \end{aligned} \quad (16)$$

Система (14) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{B}) = 0, \quad (17)$$

из которого могут быть определены собственные круговые частоты колебаний кольца.

В случае равнотолщинного однородного кольца, для которого $EI = \text{const}$, $\rho S = \text{const}$, формулы (15) и (16) с учетом ортогональности тригонометрических функций принимают вид:

$$A_{k,i} = -\frac{\pi k^2 (k^2 - 1)^2}{R^4} EI \delta_{k,i}; \quad (18)$$

$$B_{k,i} = \pi (k^2 + 1) \rho S \delta_{k,i}, \quad (19)$$

где $\delta_{k,i}$ – символ Кронекера.

Формулы (18)–(19) задают диагональную матрицу, для которой условие (17) принимает вид

$$\prod_{k=1}^N \left(-\frac{k^2 (k^2 - 1)^2}{R^4} EI + \omega^2 (k^2 + 1) \rho S \right) = 0,$$

откуда вытекает известная формула для собственных частот колебаний круговых колец [10]

$$f_k = \frac{k(k^2 - 1)}{2\pi R^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S (k^2 + 1)}}.$$

Формулировка Тимошенко. Потенциальная энергия деформации, связанной с действием изгибающих моментов, будет определяться формулой [2]

$$E_n^{\text{изг}} = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \frac{M^2}{EI} d\phi = \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} EI \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right)^2 d\phi,$$

где $\Psi(\phi, t)$ – угол поворота сечения.

В случае учета растяжимости средней линии потенциальная энергия будет дополнительно содержать слагаемое [2]

$$E_n^{\text{раст}} = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon^2 dV = \frac{1}{2R} \int_0^{2\pi} ES \left(\frac{\partial U}{\partial \phi} - W \right)^2 d\phi,$$

где $\varepsilon = \partial U / \partial \phi - W$ – относительная деформация средней линии.

Составляющая потенциальной энергии, связанная со сдвиговой деформацией, будет иметь вид [2; 11, с. 315]

$$\begin{aligned} E_n^{\text{сдв}} &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\tau^2}{G} dV = \frac{R}{2K_s} \int_0^{2\pi} \frac{Q^2}{GS} d\phi = \\ &= \frac{K_s}{2R} \int_0^{2\pi} GS \left(\frac{\partial W}{\partial \phi} + U - R\Psi \right)^2 d\phi, \end{aligned}$$

где τ – сдвиговые механические напряжения; G – модуль сдвиговой упругости; Q – поперечная сила; K_s – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения сдвиговых на-

пряжений и зависящий от формы сечения (для прямоугольного сечения $K_s = 5/6$).

Кинетическая энергия будет определяться выражением

$$E_k = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \left(\rho S \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \rho S \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right) d\phi.$$

При гармонической зависимости переменных U , W и Ψ от времени с амплитудными значениями $u(\phi)$, $w(\phi)$ и $\psi(\phi)$ выражения для потенциальной и кинетической энергий и их средних значений принимают вид:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1 - \cos(2\omega t)}{4R} \left(\int_0^{2\pi} EI \left(\frac{d\Psi}{d\phi} \right)^2 d\phi + \right. \\ &+ \left. \int_0^{2\pi} ES \left(\frac{du}{d\phi} - w \right)^2 d\phi + K_s \int_0^{2\pi} GS \left(\frac{dw}{d\phi} + u - R\Psi \right)^2 d\phi \right); \\ E_k &= \frac{\omega^2 R (1 + \cos(2\omega t))}{4} \int_0^{2\pi} (\rho S u^2 + \rho S w^2 + \rho I \psi^2) d\phi; \\ \langle E_n \rangle &= \frac{1}{4R} \left(\int_0^{2\pi} EI \left(\frac{d\Psi}{d\phi} \right)^2 d\phi + \int_0^{2\pi} ES \left(\frac{du}{d\phi} - w \right)^2 d\phi + \right. \\ &+ \left. K_s \int_0^{2\pi} GS \left(\frac{dw}{d\phi} + u - R\Psi \right)^2 d\phi \right); \\ \langle E_k \rangle &= \frac{\omega^2 R}{4} \int_0^{2\pi} (\rho S u^2 + \rho S w^2 + \rho I \psi^2) d\phi. \quad (20) \end{aligned}$$

Представим амплитуды $u(\phi)$, $w(\phi)$, $\psi(\phi)$ и их производные в виде частичных сумм рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u(\phi) &= \sum_{i=1}^N a_i^{(u)} \sin(i\phi), \quad w(\phi) = \sum_{i=0}^N a_i^{(w)} \cos(i\phi), \\ \psi(\phi) &= \sum_{i=1}^N a_i^{(\psi)} \sin(i\phi); \quad (22) \\ u'(\phi) &= \sum_{i=1}^N i a_i^{(u)} \cos(i\phi), \quad w'(\phi) = -\sum_{i=1}^N i a_i^{(w)} \sin(i\phi), \\ \psi'(\phi) &= \sum_{i=1}^N i a_i^{(\psi)} \cos(i\phi). \quad (23) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в силу геометрической симметрии распределение амплитуд $u(\phi)$ и $\psi(\phi)$ описывается нечетными функциями, а распре-

деление амплитуды $w(\phi)$ – четной функцией. В разложении функции $w(\phi)$ учтена нулевая гармоника (постоянное слагаемое), так как учет растяжимости средней линии приводит к возможности появления собственных форм колебаний, имеющих равномерно распределенную

составляющую амплитуды радиального колебательного смещения (радиальные и радиально-изгибные собственные формы).

Условия экстремума функционала действия с учетом выражений (20)–(23) принимают вид (при $k = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(u)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(u)}} &= \frac{R}{2} \left(-\frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} ES(u' - w) \frac{\partial u'}{\partial a_k^{(u)}} d\phi - \frac{K_s}{R^2} \int_0^{2\pi} GS(w' + u - R\psi) \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} d\phi + \right. \\ &+ \left. \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho S u \frac{\partial u}{\partial a_k^{(u)}} d\phi \right) = \frac{R}{2} \left(-\frac{k}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \right. \\ &+ \frac{k}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} - \frac{K_s}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} + \\ &+ \frac{K_s}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \frac{K_s}{R} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \\ &\left. + \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho S \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} \right) = 0; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(w)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(w)}} &= \frac{R}{2} \left(\frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} ES(u' - w) \frac{\partial w}{\partial a_k^{(w)}} d\phi - \frac{K_s}{R^2} \int_0^{2\pi} GS(w' + u - R\psi) \frac{\partial w'}{\partial a_k^{(w)}} d\phi + \right. \\ &+ \left. \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho S w \frac{\partial w}{\partial a_k^{(w)}} d\phi \right) = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} - \right. \\ &- \frac{1}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} ES \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \frac{kK_s}{R^2} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} - \\ &- \frac{kK_s}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} - \frac{kK_s}{R} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} + \\ &\left. + \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho S \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} \right) = 0; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle E_k \rangle}{\partial a_k^{(\psi)}} - \frac{\partial \langle E_n \rangle}{\partial a_k^{(\psi)}} &= \frac{R}{2} \left(-\frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} EI\psi' \frac{\partial \psi'}{\partial a_k^{(\psi)}} d\phi + \frac{K_s}{R} \int_0^{2\pi} GS(w' + u - R\psi) \frac{\partial \psi}{\partial a_k^{(\psi)}} d\phi + \right. \\ &+ \left. \omega^2 \int_0^{2\pi} \rho I \psi \frac{\partial \psi}{\partial a_k^{(\psi)}} d\phi \right) = \frac{R}{2} \left(-\frac{k}{R^2} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} EI \cos(i\phi) \cos(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(\psi)} + \right. \\ &+ \frac{K_s}{R} \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(u)} - \frac{K_s}{R} \sum_{i=1}^N i \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(w)} - \end{aligned}$$

$$-K_s \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} GS \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(\psi)} + \omega^2 \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} \rho I \sin(i\phi) \sin(k\phi) d\phi \cdot a_i^{(\psi)} \Big) = 0. \quad (26)$$

Отдельно необходимо рассмотреть производную по амплитуде $a_0^{(w)}$, выражение для которой вытекает из общего выражения (25) при $k = 0$.

Условия (24)–(26) в совокупности с условием равенства нулю производной по амплитуде $a_0^{(w)}$ можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{A}_1^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{A}_1^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} + \mathbf{A}_1^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{A}_2^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{A}_2^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} + \mathbf{A}_2^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{A}_3^{(u)} \mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{A}_3^{(w)} \mathbf{a}^{(w)} + \mathbf{A}_3^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)} \mathbf{a}^{(\psi)} = \mathbf{0},$$

или после объединения векторов $\mathbf{a}^{(u)}$, $\mathbf{a}^{(w)}$, $\mathbf{a}^{(\psi)}$

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(u)} & \mathbf{A}_1^{(w)} & \mathbf{A}_1^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_2^{(u)} & \mathbf{A}_2^{(w)} & \mathbf{A}_2^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_3^{(u)} & \mathbf{A}_3^{(w)} & \mathbf{A}_3^{(\psi)} \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(u)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{(w)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^{(\psi)} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(u)} \\ \mathbf{a}^{(w)} \\ \mathbf{a}^{(\psi)} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (27)$$

где матрицы $\mathbf{B}^{(u)}$ и $\mathbf{B}^{(\psi)}$ имеют размер $N \times N$, матрица $\mathbf{B}^{(w)}$ имеет размер $(N + 1) \times (N + 1)$, а размеры остальных матриц определяются из условия согласования размеров блоков.

Уравнение (27) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{(u)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(u)} & \mathbf{A}_1^{(w)} & \mathbf{A}_1^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_2^{(u)} & \mathbf{A}_2^{(w)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} & \mathbf{A}_2^{(\psi)} \\ \mathbf{A}_3^{(u)} & \mathbf{A}_3^{(w)} & \mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)} \end{pmatrix} = 0, \quad (28)$$

из которого могут быть определены собственные круговые частоты колебаний кольца.

Для снижения вычислительных затрат условие (28) может быть записано в виде разложения по определителям более низких порядков [12]

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{A}_1^{(u)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(u)} - \mathbf{A}_1^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \mathbf{A}_3^{(u)} - \\ & - (\mathbf{A}_1^{(w)} - \mathbf{A}_1^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \mathbf{A}_3^{(w)}) \times \\ & \times (\mathbf{A}_2^{(w)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} - \mathbf{A}_2^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \times \\ & \times \mathbf{A}_3^{(w)})^{-1} (\mathbf{A}_2^{(u)} - \mathbf{A}_2^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \mathbf{A}_3^{(u)}) \times \\ & \times \det(\mathbf{A}_2^{(w)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(w)} - \mathbf{A}_2^{(\psi)} (\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)})^{-1} \times \\ & \times \mathbf{A}_3^{(w)}) \det(\mathbf{A}_3^{(\psi)} + \omega^2 \mathbf{B}^{(\psi)}) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Результаты и их обсуждение

Расчет собственных частот колебаний производился с помощью программы Mathcad для кольцевого концентратора с эксцентрично расположенными цилиндрическими поверхностями при следующих исходных данных: радиус внутреннего контура $r_2 = 20$ мм; максимальное и минимальное значения радиальной толщины $b_1 = 3,5$ мм и $b_2 = 2$ мм; осевая толщина $H = 3,5$ мм; радиус наружного контура $r_1 = r_2 + 0,5(b_1 + b_2) = 22,75$ мм; эксцентриситет $e = 0,5(b_1 - b_2) = 0,75$ мм; плотность материала $\rho = 7800$ кг/м³; модуль продольной упругости $E = 210$ ГПа; модуль сдвиговой упругости $G = 82$ ГПа. Расчет выполнялся для радиуса средней линии $R = 0,5(r_1 + r_2) = 21,375$ мм, который может считаться постоянным, если принять за центр кривизны средней линии середину отрезка, соединяющего между собой центры кривизны C_1 и C_2 наружного и внутреннего контуров (рис. 1). Число гармоник рядов Фурье было принято равным $N = 8$: в общем случае для обеспечения точности расчетов оно должно быть не меньше, чем порядок собственной формы колебаний с максимальной в исследуемом диапазоне частот собственной частотой [6].

На рис. 2 представлена расчетная резонансная кривая (график зависимости определителя, стоящего в левой части уравнения (17), от частоты f), полученная на основе формулировки Эйлера – Бернулли.

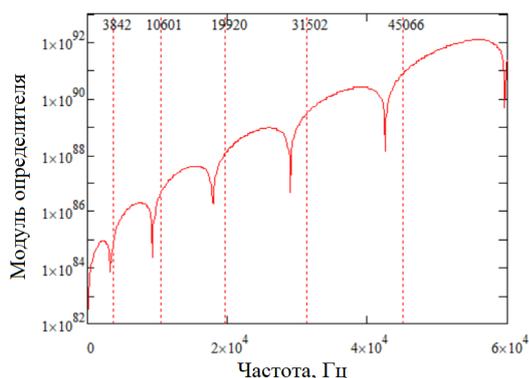


Рис. 2. Резонансная кривая, полученная на основе формулировки Эйлера – Бернулли
 Fig. 2. Resonant curve obtained on the basis of the Euler – Bernoulli formulation

Вертикальными линиями с числовыми значениями отмечены расчетные собственные частоты колебаний, полученные с помощью метода конечных элементов с применением программы Comsol Multiphysics. Как видно, погрешность определения собственных частот возрастает с увеличением порядка собственных форм колебаний, достигая 5,5 %, что является аргументом в пользу применения более точной (в смысле учета влияющих механических факторов) формулировки Тимошенко. Расчетная резонансная кривая, полученная из уравнения (28) на основе формулировки Тимошенко, приведена на рис. 3.

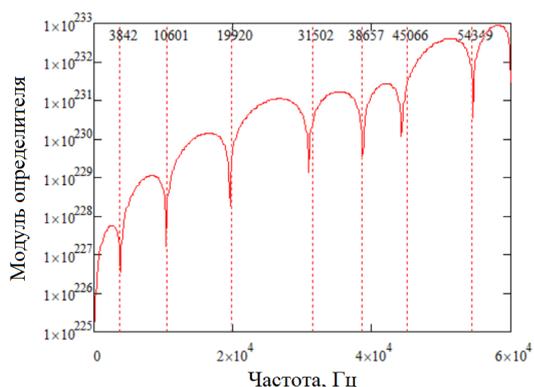


Рис. 3. Резонансная кривая, полученная на основе формулировки Тимошенко
 Fig. 3. Resonant curve obtained on the basis of the Timoshenko formulation

Погрешность определения собственных частот не превышает 1,9 %. Дополнительным преимуществом по сравнению с формулировкой Эйлера – Бернулли является возможность определения собственных частот, соответствующих собственным формам с доминирующей

деформацией растяжения средней линии (радиальная и радиально-изгибная собственные формы с частотами 38,7 и 54,4 кГц), причем погрешность определения этих частот не превышает 0,3 %. При использовании разложения (29) для определения собственных частот, соответствующих чисто изгибным собственным формам, достаточно рассчитать первый определитель разложения (результаты представлены на рис. 4).

Чисто радиальная собственная форма (38,7 кГц) на рис. 4 не идентифицируется: она может быть идентифицирована при рассмотрении второго определителя разложения (29). Помимо чисто изгибных собственных форм из рис. 4 может быть идентифицирована радиально-изгибная собственная форма с двумя узловыми точками (54,4 кГц). Также присутствуют ложные резонансные пики, соответствующие сингулярным точкам определителя.

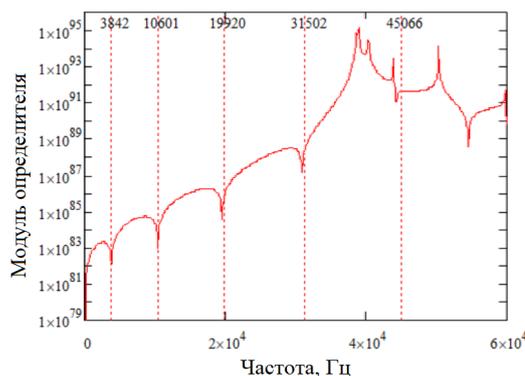


Рис. 4. Резонансная кривая, полученная на основе формулировки Тимошенко и разложения (29)
 Fig. 4. Resonant curve obtained on the basis of the Timoshenko formulation and expansion (29)

ВЫВОДЫ

1. Предложена методика определения собственных частот изгибных колебаний неравнотолщинных колец, основанная на использовании вариационного принципа Гамильтона и прямого решения соответствующей вариационной задачи путем представления решений в виде рядов Фурье. В результате вариационная задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов Фурье, а задача определения собственных частот – к обобщенной задаче на собственные значения описывающих систему матриц.

2. Рассмотрен численный пример реализации предложенной методики для эксцентричного кольца. На основе сравнения результатов, полученных путем решения вариационной

задачи в формулировках Эйлера – Бернулли и Тимошенко, с результатами, полученными методом конечных элементов, показано, что использование теории Тимошенко дает более точные результаты и дополнительно позволяет идентифицировать радиальные и радиально-изгибные собственные формы колебаний.

3. Показана возможность снижения вычислительных затрат при решении вариационной задачи в формулировке Тимошенко за счет представления определителя соответствующей системы линейных алгебраических уравнений в виде произведения определителей более низких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асташев, В. К. Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов / В. К. Асташев, В. Л. Крупенин. М.: МГУП имени Ивана Федорова, 2016. 372 с.
2. Исследование характеристик составных кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний с помощью метода передаточных матриц [Электронный ресурс] / Д. А. Степаненко [и др.] // Техническая акустика. 2018. № 2. Режим доступа: <https://ejta.org/ru/stepanenko2>.
3. Луговой, В. П. Определение размерных параметров кольцевого концентратора ультразвуковой системы / В. П. Луговой, И. В. Луговой // Наука и техника. 2018. Т. 17. № 1. С. 51–55. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-1-51-55>.
4. Степаненко, Д. А. Применение метода входного импеданса для расчета колебательных систем ультразвуковых технологических установок / Д. А. Степаненко // Машиностроение и техносфера XXI века: труды 14-й Междунар. науч.-техн. конф., г. Севастополь. Донецк, 2007. Т. 4. С. 5–8.
5. He, T. Optimization Design for Ultrasonic Horn with Large Amplitude Based on Genetic Algorithm / T. He, X.-Q. Ye, Y. Zhao // Journal of Vibroengineering. 2015. Vol. 17. P. 1157–1168.
6. Степаненко, Д. А. Расчет и проектирование стержневых ультразвуковых концентраторов с помощью метода гармонического баланса [Электронный ресурс] / Д. А. Степаненко, В. И. Жуков, А. С. Роговцова // Техническая акустика. 2019. № 3. Режим доступа: <https://ejta.org/ru/stepanenko3>.
7. Hull, A. J. A Modal Solution For Finite Length Rods with Non-Uniform Area / A. J. Hull // Applied Sciences. 2018. Vol. 8. Article 94. <https://doi.org/10.3390/app8010094>.
8. Xu, D. An Accurate and Efficient Series Solution for the Longitudinal Vibration of Elastically Restrained Rods with arbitrarily Variable Cross Sections / D. Xu, J. Du, Z. Liu // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2019. Vol. 38, No 2. P. 403–414. <https://doi.org/10.1177/1461348419825913>.
9. A unified Fourier Series Solution for Vibration Analysis of FG-CNTRC Cylindrical, Conical Shells and Annular Plates with Arbitrary Boundary Conditions / B. Qin [et al.] // Composite Structures. 2020. Vol. 232. Article 111549. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111549>.
10. Lang, T. E. Vibration of thin Circular Rings. Part I: Solution for Modal Characteristics and Forced Excitation: Jet Propulsion Laboratory Technical Report No 32–261 / T. E. Lang. Pasadena, 1962. 21 p.
11. Биргер, И. А. Сопrotивление материалов / И. А. Биргер, П. П. Мавлютов. М.: Наука, 1986. 560 с.
12. Saadetoğlu, M. Inverses and Determinants of $n \times n$ Block Matrices / M. Saadetoğlu, S. M. Dinsev // Mathematics. 2023. Vol. 11. Article 3784. <https://doi.org/10.3390/math11173784>.

Поступила 25.01.2024

Подписана к печати 27.03.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. Astashev V. K., Krupenin V. L. (2016) *Nonlinear Dynamics of Ultrasonic Technological Processes*. Moscow, Moscow State University of Printing Arts named after Ivan Fedorov. 372 (in Russian).
2. Stepanenko, D. A., Emel'yanova A. S., Pleskach M. A., Solodkaya N. V. (2018) Study of the Characteristics of Composite Ring Concentrators of ultrasonic Vibrations using the Transfer Matrix Method. *Tekhnicheskaya Akustika = Technical Acoustics*, (2). Available at: <https://ejta.org/ru/stepanenko2> (in Russian).
3. Lugovoi V. P., Lugovoi I. V. (2018) Determination of Dimensional Parameters for Annular Concentrator of Ultrasonic System. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 17 (1), 51–55 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-1-51-55>
4. Stepanenko D. A. (2007) Application of the input Impedance Method for calculating oscillatory systems of Ultrasonic Technological Installations. *Mashinostroenie i Tekhnosfera XXI Veka. Trudy 14-I Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf., g. Sevastopol'. T. 4* [Mechanical Engineering and Technosphere of the 21st Century. Proceedings of the 14th International Scientific and Technical Conference, Sevastopol. Vol. 4]. Donetsk, 5–8 (in Russian).
5. He T., Ye X.-Q., Zhao Y. (2015) Optimization Design for Ultrasonic Horn with Large Amplitude Based on Genetic Algorithm. *Journal of Vibroengineering*, 17, 1157–1168.
6. Stepanenko D. A., Zhukov V. I., Rogovtsova A. S. (2019) Calculation and Design of rod Ultrasonic Concentrators Using the Harmonic Balance Method. *Tekhnicheskaya Akustika = Technical Acoustics*, (3). Available at: <https://ejta.org/ru/stepanenko3> (in Russian).
7. Hull A. J. (2018) A Modal Solution for Finite Length Rods with Non-Uniform Area. *Applied Sciences*, 8, 94. <https://doi.org/10.3390/app8010094>.
8. Xu D., Du J., Liu Z. (2019). An accurate and Efficient Series Solution for the Longitudinal Vibration of Elastically Restrained rods with Arbitrarily Variable Cross Sections. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 38 (2), 403–414. <https://doi.org/10.1177/1461348419825913>.
9. Qin B., Zhong R., Wang T., Wang Q., Xu Y., Hu Z. (2020) A unified Fourier series Solution for Vibration Analysis of FG-CNTRC Cylindrical, Conical Shells and Annular Plates with Arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*, 232, 111549. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111549>.
10. Lang T. E. (1962) *Vibration of thin Circular Rings. Part I. Solution for Modal Characteristics and Forced Excitation*. Jet Propulsion Laboratory Technical Report No 32–261. Pasadena, 1962. 21.
11. Birger I. A., Mavlyutov R. R. (1986) *Strength of Materials*. Moscow, Nauka Publ. 560 (in Russian).
12. Saadetoğlu M., Dinsev Ş. M. (2023) Inverses and Determinants of $n \times n$ Block Matrices. *Mathematics*, 11, 3784. <https://doi.org/10.3390/math11173784>.

Received: 25.01.2024

Accepted: 27.03.2024

Published online: 31.07.2024

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-304-314>

УДК 691.327.332

Малоэнергоемкая технология изготовления и физико-технические свойства ячеистого бетона безавтоклавного твердения на гранитоидном микрозаполнителе

Магистр техн. наук Ю. Д. Самуйлов¹⁾, докт. техн. наук, проф. Э. И. Батыновский¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. Материал статьи отражает основные этапы и результаты разработки малоэнергоемкой технологии получения ячеистого газобетона безавтоклавного твердения с использованием микрозаполнителя на основе гранитных отсевов для сборного и монолитного строительства, включая ее применение в технологии 3D-бетонирования [1–10]. Разработаны и экспериментально обоснованы: методики расчета состава газобетона по критериям плотности и прочности на сжатие в диапазоне марок D350–D900 и классов B0,5–B7,5 конструкционно-теплоизоляционного назначения, а также марок D100–D300 (прочность на сжатие 0,04–1,50 МПа) теплоизоляционного назначения во взаимосвязи с дисперсностью применяемого микрозаполнителя из молотого гранитного отсева с удельной поверхностью соответственно: $S_{уд} \sim 3000\text{--}500 \text{ см}^2/\text{г}$ – для конструкционно-теплоизоляционного, $S_{уд} \sim 30000 \text{ см}^2/\text{г}$ (микрокремнезем) и $S_{уд} \sim 20000 \text{ см}^2/\text{г}$ (ультрадисперсные фракции гранитного отсева) – для теплоизоляционного газобетона; методика контроля реологических (технологических) свойств газобетонных смесей, обеспечивающих требуемые условия структурообразования газобетона расчетных составов; методика оценки бокового давления смеси при укладке в опалубку (формы), а также методика и прибор для неразрушающего контроля как кинетики роста прочности твердеющего, так и прочности затвердевшего или эксплуатируемого ячеистого бетона, полученного по разработанной или иным технологиям. Разработаны режимы беспрогревной и малоэнергоемкой (включающей пропаривание при атмосферном давлении) технологии ячеистого газобетона безавтоклавного твердения, что позволяет отказаться от энергозатратного, технически сложного и дорогостоящего автоклавного оборудования при изготовлении сборных изделий и обеспечивает возможность использования разработанной технологии теплоизоляционного газобетона в монолитном строительстве, включая тепло- и звукоизоляцию стен зданий, выполненных по технологии 3D-бетонирования, а также возведение (устройство) в съемных и несъемных опалубках строительных конструкций с использованием газобетона конструкционно-теплоизоляционного назначения.

Ключевые слова: цемент, газообразователь, молотый гранитный отсев, микрокремнезем, критерий плотности и прочности на сжатие, безавтоклавное твердение, беспрогревная и малоэнергоемкая технология, теплоизоляционный газобетон, монолитное строительство

Для цитирования: Самуйлов, Ю. Д. Малоэнергоемкая технология изготовления и физико-технические свойства ячеистого бетона безавтоклавного твердения на гранитоидном микрозаполнителе / Ю. Д. Самуйлов, Э. И. Батыновский // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 304–314. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-304-314>

Low-Energy Manufacturing Technology and Physical and Technical Properties of Cellular Concrete Autoclave-Free Hardening on Granitoid Micro-Filler

Yu. D. Samuilov¹⁾, E. I. Batyanovsky¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The material in the paper reflects the main stages and results of the development of low-energy-intensive technology for producing cellular aerated concrete without autoclave hardening using a micro-filler based on granite screenings for

Адрес для переписки

Батыновский Эдуард Иванович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 12,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-96-73
bat47@mail.ru

Address for correspondence

Batyanovskiy Eduard I.
Belarusian National Technical University
12, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-96-73
bat47@mail.ru

prefabricated and monolithic construction, including its application in 3D concreting technology [1–10]. The paper has made it possible to develop and experimentally to substantiate: methods for calculating the composition of aerated concrete according to the criteria of density and compressive strength in the range of grades D350–D900 and classes B0.5–B7.5 for structural and thermal insulation purposes, as well as grades D100–D300 (compressive strength 0.04–1.5 MPa) for thermal insulation purposes in conjunction with the dispersion of the applied micro-fillers from ground granite screenings with a specific surface area, respectively: $S_{sp} \sim 3000\text{--}500 \text{ cm}^2/\text{g}$ for structural and thermal insulation, and for thermal insulation aerated concrete: $S_{sp} \sim 30000 \text{ cm}^2/\text{g}$ (micro-silica) and $S_{sp} \sim 20000 \text{ cm}^2/\text{g}$ (ultra-disperse fractions of granite screenings) – for thermal insulating aerated concrete; methodology for monitoring the rheological (technological) properties of aerated concrete mixtures that provide the required conditions for the structure formation of aerated concrete of calculated compositions, a method for evaluating the lateral pressure of a mixture when laying in formwork (molds), as well as a method and device for non-destructive testing of both the kinetics of strength growth of hardening and the strength of hardened or used cellular concrete, obtained according to the developed or other technology. Modes of non-heating and low-energy (including steaming at atmospheric pressure) technology of cellular aerated concrete of non-autoclave hardening have been developed, which makes it possible to abandon energy-consuming, technically complex and expensive autoclave equipment in the manufacture of prefabricated products and provides the possibility of using the developed technology of thermal insulating aerated concrete in monolithic construction, including heat and sound insulation of the walls of buildings made using 3D concreting technology, as well as the construction (installation) in removable and non-removable formwork of building structures using aerated concrete for structural and thermal insulation purposes.

Keywords: cement, gasifier, ground granite screenings, micro-silica, density and compressive strength criterion, non-autoclave hardening, heat-free and low-energy technology, thermal insulating aerated concrete, monolithic construction

For citation: Samuilov Yu. D., Batyanovsky E. I. (2024) Low-Energy Manufacturing Technology and Physical and Technical Properties of Cellular Concrete Autoclave-Free Hardening on Granitoid Micro-Filler. *Science and Technique*. 23 (4), 304–314. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-304-314> (in Russian)

Введение

Ячеистые бетоны широко применяются в строительном производстве. В наибольших объемах – это штучные изделия автоклавного твердения, производство которых характеризуется значительными энергетическими затратами и целенаправленным использованием в качестве стенового строительного материала. Решение научно-технической задачи по снижению энергоемкости процесса получения изделий из ячеистого бетона – одно из наиболее актуальных направлений по снижению стоимости строительной продукции. Не менее значимым для строительного производства является отраженное в материале статьи использование гранитных отсеков, накапливающихся в отвалах РУПП «Гранит» Брестской области. Также актуальна к применению разработанная технология ячеистого газобетона безавтоклавного твердения теплоизоляционного и конструктивно-теплоизоляционного назначения, которая обеспечивает его применение при возведении (устройстве) монолитных строительных конструкций, в частности в сочетании с устройством несъемных опалубок с использованием развивающейся технологии 3D-бетонирования. В статье изложены основные результаты исследований, направленных на решение означенных научно-технических задач.

Материалы

и авторские методики исследований

В исследованиях использовали в качестве:

- вяжущего – портландцемент ЦЕМ 1 42,5Н по ГОСТ 31108–2020 или СЕМ 1 42,5Н по СТБ ЕН 197-1–2007 (соответствует М500-Д0 по ГОСТ 10178–85, 2-я группа эффективности);
- активного высокодисперсного микрозаполнителя – микрокремнезем по СТБ ЕН 13263-1–2012 с удельной поверхностью $\sim 30000 \text{ cm}^2/\text{г}$;
- инертного микрозаполнителя – молотый до $S_{уд} \sim 500\text{--}6000 \text{ cm}^2/\text{г}$ гранитный отсев, а также отсеянный фракцией 0–0,16 мм с удельной поверхностью до $20000 \text{ cm}^2/\text{г}$;
- газообразователя – алюминиевую пудру ПАП-1;
- добавки-пластификатора – суперпластификатор на основе полиоксиэтиленовых производных полиметакриловой кислоты «Реламикс ПК», отвечающей требованиям ТУ 5745-034-58042865–2008 (производство АО ГК «Полипласт», Беларусь–Россия).

В процессе исследований отработан и предлагается к использованию ряд авторских методик определения свойств газобетонных смесей и ячеистого бетона. Так, существующая стандартизированная (по ГОСТ 23789–79) методика определения текучести газобетонной смеси реализуются с использованием цилиндриче-

ской емкости (объемом 16 см³) и жесткого основания – пластины размерами ≥ 500×500 мм, что создает неудобства при оперативном контроле как на строительной площадке, так и у мест формирования сборных изделий. Предложена экспериментально обоснованная (рис. 1, 2) методика определения текучести, соответствующая по результатам ее оценки методике ГОСТ 23789–79, но легко реализуемая как в стационарных (заводских), так и в построчных условиях строительной площадки.

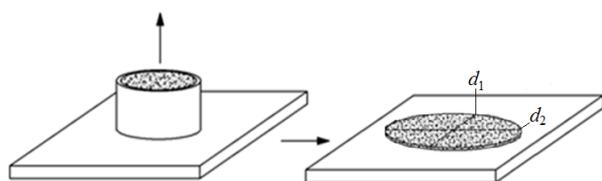


Рис. 1. Принципиальная схема определения текучести газобетонной смеси

Fig. 1. Schematic diagram for determining the fluidity of aerated concrete mixture

Ее сущность заключается в определении диаметра расплыва залитой в металлическое кольцо (с диаметром основания и высотой внутренней полости 28 и 26 мм соответственно) газобетонной смеси, после вертикального подъема кольца со стеклянной пластины размерами не менее 150×150 мм, размещенной на жесткой пластине размерами не менее 200×200 мм, и соотношении полученного результата с данными рис. 2 [1].

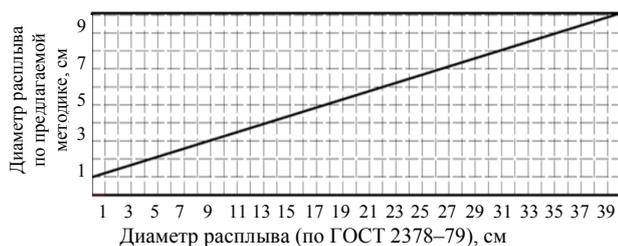


Рис. 2. Взаимозависимость значений текучести газобетонной смеси по предлагаемой методике и по методике ГОСТ 23789–79

Fig. 2. Interdependence of fluidity values of aerated concrete mixture according to the proposed method and according to GOST (GOST – All Union State Standard) 23789–79

Для ведения работ с газобетонной смесью с учетом разработанных в исследованиях методов расчета составов газобетона по заданной

прочности или средней плотности предложены методики определения времени и коэффициента вспучивания газобетонной смеси. С этой целью используются стандартные формы для формирования образцов кубов 100×100×100 мм (рис. 3) [2].

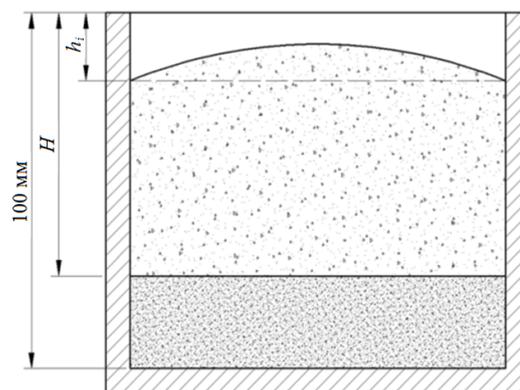


Рис. 3. К определению времени вспучивания

Fig. 3. To determine the swelling time

При определении времени вспучивания в форму заливается проба газобетонной смеси расчетного состава объемом 0,25 дм³ и определяется время стабилизации высоты h_i (рис. 3). Для определения коэффициента вспучивания газобетонной смеси (используется затем при расчетах составов газобетона), который отражает прирост объема смеси после вспучивания по отношению к первоначальному при постоянном содержании в ее составе 1 г газообразователя на 0,25 дм³ смеси, получена формула

$$k_{\text{всп}} = \frac{V_{\text{б.см.всп}}}{V_{\text{б.см}}} - 1 \text{ (доли ед.)}, \quad (1)$$

или с учетом размера формы и высоты заливки смеси

$$k_{\text{всп}} = \frac{100 - h_i}{25} - 1 \text{ (доли ед.)}. \quad (2)$$

Для оперативной оценки кинетики роста прочности [3–5] и уровня прочности затвердевшего ячеистого бетона разработаны прибор (патент № ВУ 20155) и методика неразрушающего контроля, применяемая для вариантов сборного и монолитного строительства с использованием штучных изделий и монолитных конструкций (рис. 4, 5).

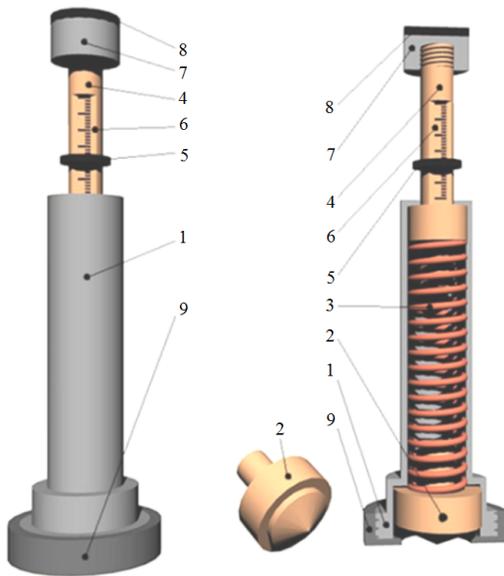


Рис. 4. Устройство прибора

Fig. 4. Device design

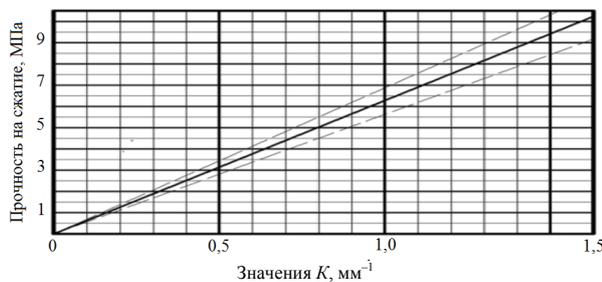


Рис. 5. Тарировочная зависимость коэффициента прибора K и прочности газобетона на гранитоидном микрозаполнителе (штриховые линии показывают диапазон погрешности)

Fig. 5. Calibration dependence of the device K coefficient and strength of aerated concrete on granitoid micro-filler (dashed lines indicate error range)

При оценке прочности ячеистого бетона снимаются показания шкалы 6 (L , усл. ед.), которые характеризуют силу удара, а также замеряется диаметр отпечатка (D , мм) от индентора на поверхности испытуемого образца. Учитывая, что определяется соотношение силы удара и образующегося при этом отпечатка от индентора на оцениваемом бетоне, энергия наносимого удара может быть произвольной.

Прибор состоит из следующих элементов (рис. 4): корпуса 1, бойка с индентором 2, пружины 3 и толкателя со штоком 4, насадки, фиксирующей длину деформации пружины, 5, шкалы 6, ударной шайбы 7, амортизирующей резиновой накладкой 8, крышки корпуса 9.

На основании полученных данных рассчитывается коэффициент K

$$K = \frac{L - 0,334D}{D^2} \text{ (мм}^{-1}\text{)}. \quad (3)$$

Прочность на сжатие R испытуемого образца определяют по графической зависимости (рис. 5) или по формуле

$$R = K \operatorname{tg} \alpha_{\text{cp}} \text{ (МПа)}, \quad (4)$$

где α_{cp} – угол между осью OK и графиком линейной зависимости.

Подготовка микрозаполнителя

Подготовка микрозаполнителя [6] осуществлялась помолом в шаровой мельнице гранитного отсева до разной удельной поверхности с учетом применения для газобетона конструкционно-теплоизоляционного и теплоизоляционного назначения. Авторские методики расчета (по плотности) составов ячеистого бетона безавтоклавного твердения (в диапазоне плотностей марок D100–D300 и D350–D900) и прочности на сжатие (в диапазоне от 0,04 МПа до соответствующей классу по прочности на сжатие B7,5) разрабатывались с учетом особенностей использования микрозаполнителя с удельной поверхностью в диапазоне $S_{\text{уд}} = 500\text{--}30000 \text{ см}^2/\text{г}$. При этом исходили из того, что в разрабатываемой технологии газобетона заполнитель не является компонентом вяжущего вещества. Он реализует функцию именно «микрозаполнителя» в объеме цементного микробетона, образующего стенки пор. От размера частиц микрозаполнителя соответственно будут зависеть их толщина, степень поризации газобетона, его плотность, а также другие механические и физико-технические характеристики.

На рис. 6 приведена зависимость роста удельной поверхности продукта помола в процессе диспергации гранитного отсева. Использовали лабораторную (шаровой и цельпесковой загрузки) мельницу: навеску (5 кг) помещали в мельницу и измельчали, отбирая через указанные на рис. 6 промежутки времени пробы не менее 50 г. При «мокром» помоле (содержание воды больше 50 % массы исходного сухого отсева) пробы высушивали (при $t \sim 105 \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$) до

постоянной массы ($\pm 0,1$ г), а затем определяли удельную поверхность ($S_{уд}$, $см^2/г$).

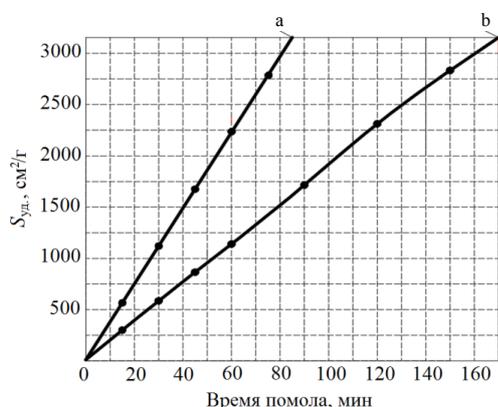


Рис. 6. Зависимость роста удельной поверхности микрозаполнителя в пределах $S_{уд} \leq 3000$ $см^2/г$ от времени помола гранитного отсева: а – мокрый помол; б – сухой помол

Fig. 6. Dependence of growth of micro-filler specific surface within the range of $S_{sp} \leq 3000$ $см^2/г$ on the grinding time of granite screenings: а – wet grinding; б – dry grinding

В качестве микродисперсного заполнителя для газобетона теплоизоляционного назначения марок D200–D300 использовали отходящую при производстве на РУПП «Гранит» кубовидного щебня и отделенную посредством воздушной сегрегации пылеобразную фракцию 0–0,16 мм (с $S_{уд} \leq 20000$ $см^2/г$), а для получения газобетона марок D100–D200 – микрокремнезем МК-80 (с $S_{уд} \leq 30000$ $см^2/г$).

В исследованиях использовали газобетон, полученный на составах, рассчитанных по представленным в своей основе в данном тексте авторским методикам расчета, поскольку, как показал анализ, известные методики, включая вариант действующих норм, не отражают специфику использования в качестве микрозаполнителя как фракций измельченной гранитной породы (в диапазоне $S_{уд} \sim 500$ – 20000 $см^2/г$), так и микрокремнезема (при $S_{уд} \sim 30000$ $см^2/г$).

Методики расчета составов газобетона

Основные положения предлагаемой методики расчета состава газобетона по требуемой плотности включают следующие этапы:

– принимаем к расчету требуемую плотность газобетона ρ_6 в соответствии с проектной

документацией либо маркой по плотности (по СТБ 1570–2005);

– выбираем соотношение МЗ/Ц (где МЗ – расход микрозаполнителя на приготовление 1 $м^3$ газобетона; Ц – расход цемента на приготовление 1 $м^3$ газобетона) в рекомендуемом диапазоне 0,5–2,0 (в зависимости от требуемой (по СТБ 1570–2005) минимальной прочности бетона для расчетной плотности);

– определяем требуемое (в рекомендуемом диапазоне 0,4–0,65) соотношение В/Т (где В – расход воды на приготовление 1 $м^3$ газобетона; Т – суммарный расход твердых компонентов на приготовление 1 $м^3$ газобетона, с учетом данных рис. 7 и экспериментальных зависимостей «В/Т – прочность» (здесь не приводятся).

Далее определим расход цемента (Ц) на приготовление 1 $м^3$ газобетона, исходя из его плотности в сухом состоянии (ρ_6):

$$\rho_6 = \frac{m_{6,см} - B + Ц \cdot 0,15}{V_\phi} \text{ (кг/м}^3\text{)}, \quad (5)$$

где 0,15 – эмпирический коэффициент, который характеризует относительное содержание химически связанной цементом воды ($k_{х.в}$); после ряда преобразований определим расход цемента на приготовление 1 $м^3$ газобетона (Ц) при $V_\phi = 1$ $м^3$:

$$Ц = \frac{\rho_6}{(1,15 + (МЗ / Ц))} \text{ (кг)}. \quad (6)$$

Вычислим расход микрозаполнителя (МЗ) на приготовление 1 $м^3$ газобетона

$$МЗ = Ц \cdot (МЗ / Ц) \text{ (кг)}. \quad (7)$$

Суммарный расход твердых компонентов (Т) на приготовление 1 $м^3$ газобетона

$$Т = Ц + МЗ \text{ (кг)}. \quad (8)$$

Расход воды (В) на приготовление 1 $м^3$ газобетона

$$В = Т \cdot (В / Т) \text{ (кг)}, \quad (9)$$

в том числе количество воды, необходимое для приготовления газообразующей суспензии:

$$В_c = 15Г \text{ (кг)}. \quad (10)$$

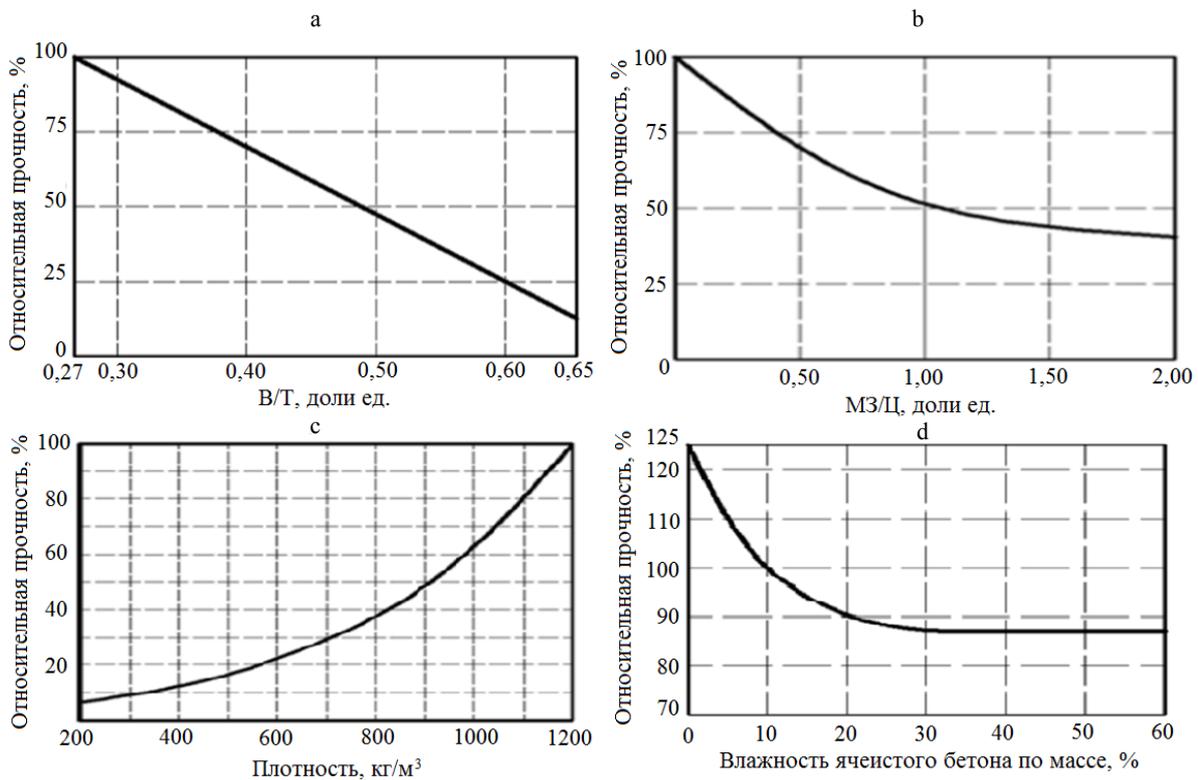


Рис. 7. а – график зависимости прочности ячеистого бетона на осевое сжатие от В/Т;
 б – то же относительной прочности газобетона от соотношения МЗ/Ц;
 с – то же от его плотности; д – то же от соотношения МЗ/Ц

Fig. 7. а – graph of the dependence of the strength of cellular concrete on axial compression on В/Т;
 б – the same for the relative strength of aerated concrete on the ratio of МЗ/Ц;
 с – the same for the relative strength on its density;
 д – the same for the relative strength of aerated concrete on the ratio of МЗ/Ц

Рассчитаем расход газообразователя ПАП (пудры алюминиевой) на приготовление 1 м³ ячеистого бетона (Г)

$$\Gamma = \frac{V_{\text{ф}} - V_{\text{б.см}}}{0,25k_{\text{всп}}} \quad (\text{кг}), \quad (11)$$

где $V_{\text{б.см}}$ – объем залитой в форму ячеистобетонной смеси до газообразования, м³; $k_{\text{всп}}$ – коэффициент вспучивания (методика определения приведена ранее).

Предлагаемая методика предусматривает введение при необходимости в состав извести для повышения коэффициента вспучивания.

Основные положения предлагаемой методики расчета состава газобетона по требуемой прочности включают следующие этапы:

– определяем уровень требуемой прочности по проектной документации, исходя из того, что зависимость прочности неавтоклавного

ячеистого газобетона от основных влияющих факторов отражается формулой

$$R_{\text{г}} = R_{\text{эт}} k_{\text{В/Т}} k_{\text{МЗ/Ц}} k_{\rho} k_{\text{W}} \quad (\text{МПа}), \quad (12)$$

где $R_{\text{эт}}$ – прочность эталонного образца (за эталон принят образец ячеистого бетона плотностью 1200 кг/м³, влажностью по массе 10 %, твердевший с прогревом по приведенному далее режиму ТВО, изготовленный из поризованного цементного камня (цементное тесто нормальной густоты, при водотвердом отношении (В/Т) = 0,27 доли ед.); $R_{\text{эт}} \approx 21$ МПа; $k_{\text{В/Т}}$ – коэффициент, зависящий от В/Т, определяется с помощью экспериментально полученной графической зависимости рис. 7а; $k_{\text{МЗ/Ц}}$ – то же, зависящий от МЗ/Ц, определяется по графической зависимости рис. 7б, k_{ρ} – то же, зависящий от плотности проектируемого газобетона, определяется с помощью графической зависимости рис. 7с и формулы

$$k_p = \frac{R_{отн}}{100}, \quad (13)$$

$R_{отн}$, %, – относительная прочность по графической зависимости рисунка 7с, k_W – коэффициент, зависящий от влажности газобетона, определяется с помощью графической зависимости рис. 7д;

– по экспериментальным данным и выявленной закономерности взаимосвязи прочности на сжатие и соотношения МЗ/Ц вычисляем МЗ/Ц, требуемое для получения проектной прочности газобетона, с учетом рекомендуемого для теплоизоляционно-конструкционного материала диапазона 0,5–1,0;

– далее рассчитаем расходы компонентов на 1 м³ смеси по зависимостям, приведенным ранее в расчете состава газобетона по плотности.

Методика расчета состава газобетона с пониженной плотностью (D100–D200) [7] характеризуется следующими особенностями: в качестве микрозаполнителя необходимо применять тонкодисперсный твердофазный материал (использовали микрокремнезем с $S_{уд} = 30000 \text{ см}^2/\text{г}$); экспериментально установлено, что оптимальное значение текучести составляет ~40 мм (при меньшем смесь не вспучивается в полной мере, при большем лишнее количество воды повлечет снижение прочности); объем не вспученной смеси должен составлять не менее четверти объема формы, так как прирост объема смеси

на ~300 % в процессе вспучивания – это предел, превышение которого (что установлено экспериментально) сопровождается разрушением (оседанием) структуры вспученной смеси.

Последовательность расчета:

– задаемся проектной плотностью газобетона, кг/м³;

– задаемся соотношением (МЗ/Ц), исходя из того, что чем ниже требуемая плотность бетона, тем выше (МЗ/Ц), диапазон рекомендуемых значений данного соотношения от 0,5 до 1,0;

– определяем: по ранее приведенным зависимостям расход цемента и микрозаполнителя, суммарный расход твердых компонентов, соотношение (В/Т) для (МЗ/Ц) = 1 (при условии, что оптимальное значение текучести соответствует 40 мм (рис. 8) и при последующей корректировке по факту вспучивания смеси);

– далее вычисляем: расход воды, объем залитой в форму ячеистобетонной смеси до газообразования по формуле

$$V_{б.см} = \frac{МЗ}{\rho_{МЗ.ист}} + \frac{Ц}{\rho_{Ц.ист}} + \frac{В}{\rho_В} \quad (\text{м}^3), \quad (14)$$

где $\rho_{МЗ.ист}$ – истинная плотность микрозаполнителя (для гранита $\rho_{МЗ.ист} = 2670 \text{ кг/м}^3$, для микрокремнезема $\rho_{МЗ.ист} = 2196 \text{ кг/м}^3$); $\rho_{Ц.ист}$ – истинная плотность цемента (3100 кг/м^3);

– затем определяем расходы компонентов на 1 м³ смеси по ранее приведенным зависимостям.

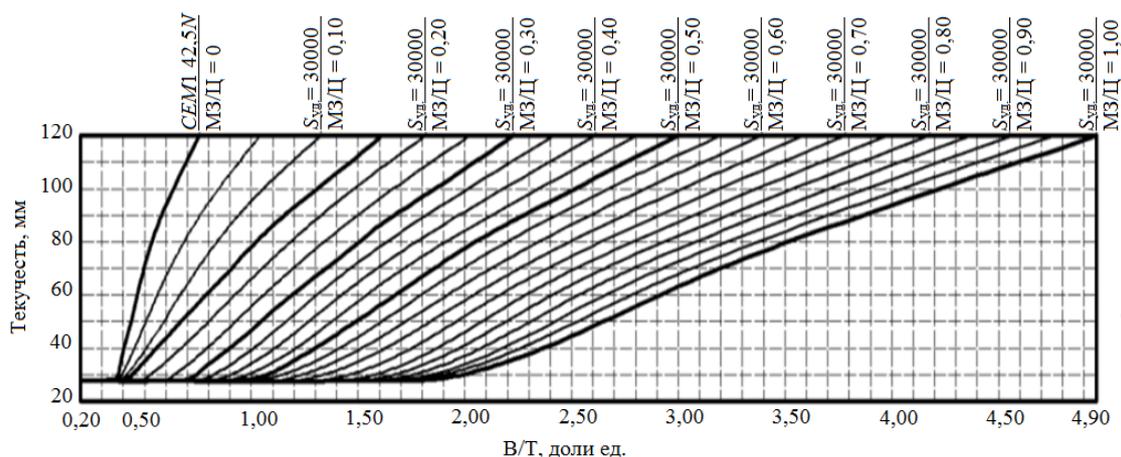


Рис. 8. Зависимость текучести от (В/Т) для различных соотношений (МЗ/Ц) при использовании в качестве микрозаполнителя микрокремнезема с удельной поверхностью 30000 см²/г

Fig. 8. Dependence of fluidity on (В/Т) for various ratios (МЗ/Ц), when using micro-silica micro-filler with a specific surface area of 30 000 cm²/g

Для оценки свойств газобетонной смеси и затвердевшего газобетона составов, рассчитанных по приведенным методикам, предложена методика изготовления контрольных образцов газобетона в лабораторных условиях по технологии, которая включает в себя следующие стадии: приготовление газобетонной смеси; заливку в формы (например, $100 \times 100 \times 100$ мм) и вспучивание (либо вибровспучивание: частота 50 Гц; амплитуда 272,5 мкм) газобетонной смеси; выдержку вспученных образцов до набора распалубочной прочности в течение 24–48 ч; срезку горбушки и распалубку образцов газобетона; твердение газобетона в нормально-влажностных условиях либо тепловлажностную обработку (ТВО) образцов газобетона по режиму рис. 9; сушку образцов газобетона до постоянной массы.

Влияние технологических факторов на свойства смесей и газобетона

Экспериментально установлены закономерности изменений технологических свойств газобетонных смесей конструкционно-теплоизоляционного и теплоизоляционного назначения в зависимости от технологических факторов, а также их влияние на кинетику твердения и прочность газобетона. В частности, экспериментально выявлена зависимость текучести газобетонной смеси от водо-твердого отношения (рис. 10а–б) при различных соотношениях расходов микрозаполнителя и цемента. На рис. 10с–f частично приведены результаты экспериментальных исследований влияния основных технологических факторов на процессы газообразования и вспучивания газобетонной смеси.

В итоге экспериментально выявлены закономерности влияния на технологические свой-

ства газобетонных смесей основополагающих факторов: водо-твердого отношения, соотношения микрозаполнителя и цемента, удельной поверхности ($S_{уд}$) примененного микрозаполнителя, температуры смеси и окружающей среды, времени и интенсивности перемешивания смеси, расхода газообразователя. Определено влияние различных факторов на динамику вспучивания газобетонной смеси, что обеспечило возможность выбора необходимых параметров с целью получения газобетона расчетной средней плотности в диапазоне марок D100...D300 (как теплоизоляционного материала) и D350–D900 (как конструкционно-теплоизоляционного материала).

По результатам исследований выявлены закономерности их влияния на кинетику твердения – рост прочности на сжатие газобетона и ее уровень к проектному 28-суточному возрасту, что позволило установить рациональные соотношения между: степенью дисперсности ($S_{уд}$) применяемого микрозаполнителя, водотвердым отношением, соотношением расхода микрозаполнителя и цемента, расходом газообразователя, температурой среды твердения и режимов тепловой обработки, во взаимосвязи с прочностью затвердевшего газобетона. В совокупности с этим обеспечивается целенаправленный выбор параметров технологического процесса, создающий возможность получения материала с требуемыми прочностными характеристиками в сочетании с его средней плотностью.

На этой основе сформулированы базовые положения технологии приготовления и применения конструкционно-теплоизоляционного газобетона на гранитоидном микрозаполнителе марок D350–D900 для производства сборных изделий, а также теплоизоляционного марок D100–D300 для использования в монолитном строительстве.

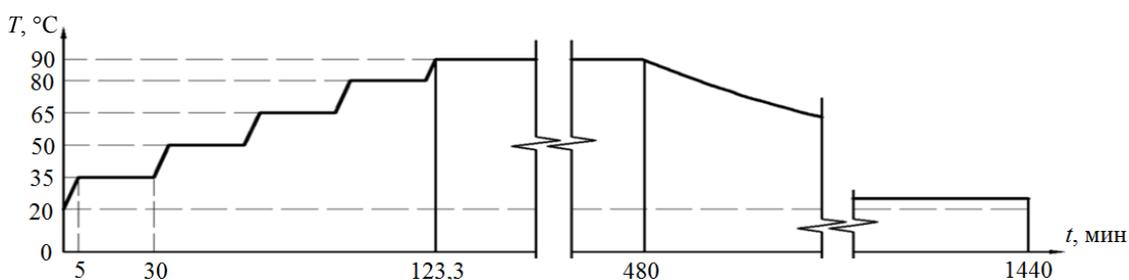


Рис. 9. График тепловлажностной обработки

Fig. 9. Heat and moisture treatment schedule

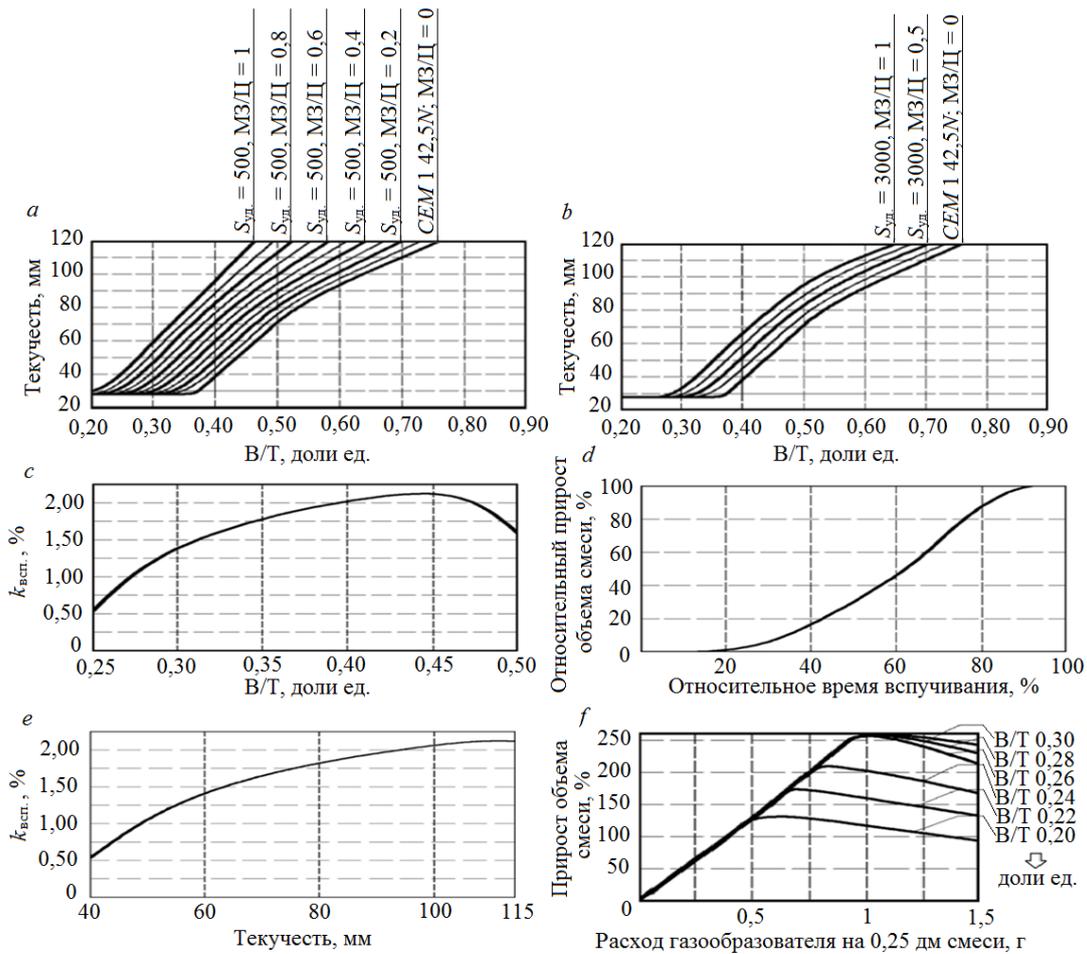


Рис. 10. а – зависимость текущести газобетонных смесей на гранитном микрозаполнителе ($S_{уд} = 500$ см²/г) от В/Т; б – то же текущести газобетонных смесей на гранитном микрозаполнителе ($S_{уд} = 3000$ см²/г) от В/Т; в – то же коэффициента вспучивания от В/Т (для составов с МЗ/Ц = 1 и удельной поверхностью МЗ = 500 см²/г); д – графическое отражение динамики вспучивания газобетонной смеси во времени; е – зависимость коэффициента вспучивания от текущести смеси; ф – зависимость прироста объема газобетонной смеси от расхода газообразователя при вибровспучивании (для смесей с МЗ/Ц = 1 и удельной поверхностью микрозаполнителя, равной 500 см²/г)

Fig. 10. a – dependence of the fluidity of aerated concrete mixtures on granite micro-filler ($S_{sp} = 500$ cm²/g) on V/T; b – the same for fluidity of aerated concrete mixtures on granite micro-filler ($S_{sp} = 3000$ cm²/g) on V/T; c – the same for swelling coefficient on V/T (for compositions with M3/C = 1 and specific surface area of M3 = 500 cm²/g); d – graphical representation of the dynamics of swelling of aerated concrete mixture over time; e – dependence of the swelling coefficient on the fluidity of the mixture; f – dependence of the increase in the volume of aerated concrete mixture on the consumption of a gas-forming agent during vibration swelling (for mixtures with M3/C = 1 and specific surface area of micro-filler equal to 500 cm²/g)

Особый вариант использования теплоизоляционного газобетона марок по плотности D100–D200 представляет его применение в сочетании с технологией возведения стеновых конструкций зданий методом 3D-бетонирования [8] (рис. 11).

В этом случае эффективно используются свойства газобетона вспучиваться, то есть увеличиваться в объеме, что обеспечивает равномерное заполнение объемов пазух несъемных опалубок, возводимых по технологии 3D.

Для оценки бокового давления (распора) вспучивающейся газобетонной смеси предложен метод предваряющего контроля его величины с целью последующего учета и определения высоты одновременно укладываемых слоев газобетонной смеси в опалубку. Производственная апробация результатов исследований, реализованная в варианте заводского изготовления стеновых блоков, подтвердила их эффективность.

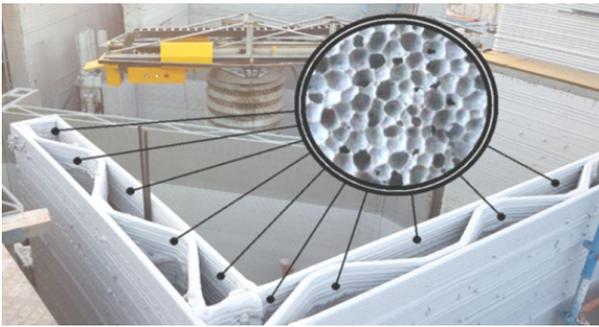


Рис. 11. Стеновая конструкция в варианте несъемной опалубки, возведенная с использованием строительного 3D-принтера и заполняемая газобетонной смесью теплоизоляционного назначения

Fig. 11. Wall structure with non-removable formwork, erected using a construction 3D-printer and filled with aerated concrete mixture thermal insulation purposes

ВЫВОДЫ

1. Разработаны научно-практические основы малоэнергоемкой технологии ячеистого газобетона безавтоклавного твердения на гранитоидном микрозаполнителе для сборного и монолитного строительства, включающие экспериментально обоснованные:

– методики расчета состава газобетона по критериям плотности и прочности на сжатие в диапазоне марок D350–D900 и классов B0,5–B7,5 конструкционно-теплоизоляционного назначения, а также D100–D300 (прочность на сжатие 0,04–1,5 МПа) теплоизоляционного назначения во взаимосвязи с дисперсностью применяемого микрозаполнителя из молотого гранитного отсева с удельной поверхностью соответственно: $S_{уд} \sim 500\text{--}3000 \text{ см}^2/\text{г}$ для конструкционно-теплоизоляционного, и для теплоизоляционного газобетона: $S_{уд} \sim 30000 \text{ см}^2/\text{г}$ (микрокремнезем) и $S_{уд} \sim 20000 \text{ см}^2/\text{г}$ (ультрадисперсные фракции гранитного отсева);

– методики контроля реологических (технологических) свойств газобетонных смесей, обеспечивающих требуемые условия структурообразования газобетона расчетных составов, методику оценки бокового давления смеси при укладке в опалубку (формы), а также методику и прибор для неразрушающего контроля как кинетики роста прочности твердеющего, так и прочности затвердевшего или эксплуатируемого ячеистого бетона, полученного по разработанной или иной технологии;

– режимы технологических переделов, составляющих малоэнергоемкую технологию

ячеистого газобетона безавтоклавного твердения, включающие: подготовку микродисперсного (до $S_{уд} \leq 6000 \text{ см}^2/\text{г}$) и ультрадисперсного (до $S_{уд} \sim 20000\text{--}30000 \text{ см}^2/\text{г}$) заполнителя; приготовление и контроль качества смеси расчетных составов; укладку ее в формы или опалубку; период структурообразования при вспучивании газобетона и его твердение в беспроточном варианте, либо с тепловой обработкой при атмосферном давлении, что позволяет отказаться от энергозатратного, технически сложного и дорогостоящего автоклавного оборудования при изготовлении сборных изделий и обеспечивает возможность использования разработанной технологии в монолитном строительстве, включая устройство тепло- и звукоизоляции заполнением внутренних полостей стеновых конструкций, возведенных по технологии 3D-бетонирования, газобетоном теплоизоляционного назначения марок D100–D300.

2. Экспериментально подтверждено соответствие расчетных характеристик газобетона на гранитоидном микрозаполнителе и ультрадисперсных заполнителях составов, рассчитанных по предложенным методикам, фактическим данным, полученным как в лабораторных условиях, так и в процессе производственной апробации разработанной технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самуйлов, Ю. Д. Методика определения состава газобетонной смеси требуемой прочности неавтоклавного ячеистого газобетона на микрозаполнителе из диспергированного гранитного отсева / Ю. Д. Самуйлов // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. Минск: Изд. центр БГУ, 2019. Вып. 11. С. 234–252. <https://doi.org/10.35579/2076-6033-2019-11-15>.
2. Самуйлов, Ю. Д. Методика определения состава газобетонной смеси требуемой плотности неавтоклавного ячеистого газобетона на микрозаполнителе из диспергированного гранитного отсева / Ю. Д. Самуйлов // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. Минск: Изд. центр БГУ, 2018. Вып. 10. С. 214–232.
3. Самуйлов, Ю. Д. Неавтоклавный газобетон: технология получения, особенности применения в монолитном строительстве, неразрушающий способ контроля прочности на сжатие / Ю. Д. Самуйлов // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. Минск: Изд. центр БГУ, 2016. Вып. 8. С. 225–240.
4. Устройство для определения прочности образца из легкого ячеистого бетона: пат. ВУ 20155 / Ю. Д. Самуйлов. Оpubл. 30.08.2014.
5. Самуйлов, Ю. Д. Результаты апробирования устройства для определения прочности ячеистого бетона неразрушающим методом / Ю. Д. Самуйлов // Наука – образова-

- нию, производству, экономике: материалы 15-й Международ. науч.-техн. конф. Минск: БНТУ, 2017. Т. 2. С. 282.
6. О применимости отсева продуктов дробления гранитоидных пород в качестве микрозаполнителя для неавтоклавных ячеистых бетонов / Ю. Д. Самуилов [и др.] // Актуальные проблемы инновационной подготовки инженерных кадров при переходе строительной отрасли на европейские стандарты: сб. Междунар. науч.-техн. ст. (материалы науч.-метод. конф., Минск, 26–27 мая 2015 г.). Минск: БНТУ, 2015. С. 304–309.
 7. Батыновский, Э. И. Влияние тонкости помола микрозаполнителя на свойства неавтоклавного ячеистого газобетона и газобетонной смеси, методика проектирования ячеистых бетонов с пониженной плотностью / Э. И. Батыновский, Ю. Д. Самуилов // Механика и технология. 2022. № 1. С. 110–122.
 8. Самуилов, Ю. Д. 3D-бетонирование – составы, методики и свойства смесей / Ю. Д. Самуилов, В. М. Трещачко, Э. И. Батыновский // Наука и техника. 2022. Т. 21, № 5 С. 374–385. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-5-374-385>.
 9. Самуилов, Ю. Д. Модернизированная технология производства ячеистого бетона неавтоклавного твердения / Ю. Д. Самуилов // Перспективные направления инновационного развития строительства и подготовки инженерных кадров: материалы XX Междунар. науч.-метод. семинара (Гродно, 17–19 февр. 2016 г.). Гродно: ГрГУ, 2016. С. 299–302.
 10. Самуилов, Ю. Д. Конструкционно-теплоизоляционные и теплоизоляционные стеновые материалы из неавтоклавного ячеистого бетона на гранитоидном микрозаполнителе / Ю. Д. Самуилов // Актуальные проблемы инновационной подготовки инженерных кадров при переходе строительной отрасли на европейские стандарты: материалы Междунар. науч.-техн. конф. (Минск, 28 мая 2021 г.). Минск: БНТУ, 2021. С. 177–188.
- Поступила 08.04.2024
Подписана к печати 10.06.2024
Опубликована онлайн 31.07.2024
- REFERENCES
1. Samuilov Yu. D. (2019) Methodology for Determining the Composition of an Aerated Concrete Mixture of the Required Strength of Non-Autoclaved Cellular Aerated Concrete on Micro-Aggregate from Dispersed Granite Screenings. *Problemy Sovremennogo Betona i Zhelezobetona: sb. nauch. tr.* [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete. Collection of Scientific Papers]. Minsk, BSU Publishing Center, Iss. 11, 234–252 (in Russian).
 2. Samuilov Yu. D. (2018) Methodology for Determining the Composition of an Aerated Concrete Mixture of the Required Density of Non-Autoclaved Cellular Aerated Concrete on Micro-Aggregate from Dispersed Granite Screenings. *Problemy Sovremennogo Betona i Zhelezobetona: Sb. Nauch. Tr.* [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete. Collection of Scientific Papers]. Minsk, BSU Publishing Center, Iss. 10, 214–232 (in Russian).
 3. Samuilov Yu. D. (2016) Non-Autoclaved Aerated Concrete: Production Technology, Features of Use in Monolithic Construction, Non-Destructive Method of Controlling Compressive Strength. *Problemy Sovremennogo Betona i Zhelezobetona: Sb. Nauch. Tr.* [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete. Collection of Scientific Papers]. Minsk, BSU Publishing Center, Iss. 8, 225–240 (in Russian).
 4. Samuilov Yu. D. (2014) *Device for Determining the Strength of a Lightweight Cellular Concrete Sample: Patent BY no. 20155* (in Russian).
 5. Samuilov Yu. D. (2017) Results of Testing A Device for Determining the Strength of Cellular Concrete Using a Non-Destructive Method. *Nauka – Obrazovaniyu, Proizvodstvu, Ekonomike: Materialy 15-i Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf* [Science for Education, Production, Economics. Materials of the 15th International Scientific and Technical Conference]. Minsk, Belarusian National Technical University, 282 (in Russian).
 6. Samuilov Yu. D., Krasulina L. V., Opekunov V. V., Batoryanskiy E. I. (2015) On the Applicability of Screening Products of Crushing Granitoid Rocks as a Micro-Aggregate for Non-Autoclaved Cellular Concrete. *Aktual'nye Problemy Innovatsionnoi Podgotovki Inzhenernykh Kadrov pri Perekhode Stroitel'noi Otrashi na Evropeiskie Standarty: Sb. Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. St. (Materialy Nauch.-Metod. Konf., Minsk, 26–27 Maya 2015 g.)* [Current Problems of Innovative Training of Engineering Personnel during the Transition of the Construction Industry to European Standards. Collection of International Scientific and Technical Articles (Materials of the Scientific and Methodological Conference, Minsk, May 26–27, 2015)]. Minsk, Belarusian National Technical University, 304–309 (in Russian).
 7. Batoryanskiy E. I., Samuilov Yu. D. (2022) The Influence of Microaggregate Grinding Fineness on the Properties of Non-Autoclaved Cellular Aerated Concrete and Aerated Concrete Mixture, a Method for Designing Cellular Concrete with Reduced Density. *Mekhanika i Tekhnologiya* [Mechanics and Technology], (1), 110–122 (in Russian).
 8. Samuilov Yu. D., Trepachko V. M., Batoryanskiy E. I. (2022) 3D-Concreting – Compositions, Techniques and Properties of Mixtures. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 21 (5), 374–385. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-5-374-385> (in Russian).
 9. Samuilov Yu. D. (2016) Modernized Technology for the Production of Non-Autoclaved Cellular Concrete. *Perspektivnye Napravleniya Innovatsionnogo Razvitiya Stroitel'stva i Podgotovki Inzhenernykh Kadrov: Materialy XX Mezhdunar. Nauch.-Metod. Seminara (Grodno, 17–19 Fevr. 2016 g.)* [Promising Direction for Innovative Development of Construction and Training of Engineering Personnel. Materials of the XX International Scientific and Methodological Seminar (Grodno, February 17–19, 2016)]. Grodno, State University of Grodno, 299–302 (in Russian).
 10. Samuilov Yu. D. (2021) Structural, Thermal Insulation and Thermal Insulation Wall Materials Made of Non-Autoclaved Cellular Concrete on Granitoid Micro-Aggregate. *Aktual'nye Problemy Innovatsionnoi Podgotovki Inzhenernykh Kadrov pri Perekhode Stroitel'noi Otrashi na Evropeiskie Standarty: Materialy Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf.* (Minsk, 28 Maya 2021 g.) [Current Problems of Innovative Training of Engineering Personnel during the Transition of the construction Industry to European Standards. Materials of the International Scientific and Technical Conference (Minsk, May 28, 2021)]. Minsk, Belarusian National Technical University, 177–188 (in Russian).

Received: 08.04.2024

Accepted: 10.06.2024

Published online: 31.07.2024

UDC 691.2

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-315-324>

Numerical Modeling and Simulation of Non-Metallic Fiber-Reinforced Concrete: Assessing the Structural Performance with Emphasis on Reeds and Coconut Shells

Wang Xianpeng¹⁾, Yu Haoxuan¹⁾, Bo Jiao¹⁾, Lv Jundong¹⁾, S. N. Kovshar¹⁾, S. N. Leonovich¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Abstract. The optimization of mechanical performance through the use of fiber-reinforced polymer composites is achieved via META simulated experimental design, with a primary emphasis on enhancing the mechanical characteristics. Incorporating reeds and coconut shells, this approach aims for an optimal design that minimizes polymer usage while ensuring specified mechanical performance and economic efficiency. The research, anchored in a probabilistic framework, prioritizes a reliability-based optimization methodology. To assess mechanical performance, nonlinear pushover analyses at the system level are conducted, with META simulations playing a key role in exploring uncertainties. Within the META framework, inelastic interstory drift ratios are treated as indeterministic variables, while the thickness of the polymer jacket—featuring reeds and coconut shells—is considered a deterministic design variable. This refined design process not only reduces polymer costs but also systematically evaluates the cost-effectiveness of incorporating reeds and coconut shells, all while adhering to stringent structural reliability constraints. Explicit reliability index constraints, honed through META simulations, ensure the robustness and adaptability of the design optimization process. The numerical optimality criteria method within the META framework provides an efficient solution to the nonlinear retrofit design optimization problem. Illustrating the application, a design example showcases the seamless integration of reeds and coconut shells, resulting in a significant enhancement of mechanical performance within the context of retrofitting.

Keywords: mechanical performance, fiber-reinforced polymer, inelastic interstory drift ratios, Coconut Shells, Reeds

For citation: Xianpeng Wang, Haoxuan Yu, Jiao Bo, Jundong Lv, Kovshar S. N., Leonovich S. N. (2024) Numerical Modeling and Simulation of Non-Metallic Fiber-Reinforced Concrete: Assessing the Structural Performance with Emphasis on Reeds and Coconut Shells. *Science and Technique*. 23 (4), 315–324. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-315-324>

Численное моделирование и симуляция неметаллического волокнистого бетона: оценка структурной производительности с акцентом на тростник и кокосовую скорлупу

Асп. Ван Сяньпэн¹⁾, магистрант Ю. Хаосюань¹⁾, Цзяо Бо¹⁾, Люй Цзюньдун¹⁾, канд. техн. наук, доц. С. Н. Ковшар¹⁾, докт. техн. наук, проф. С. Н. Леонович¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Оптимизация механических характеристик за счет использования полимерных композитов, армированных волокнами, достигается с помощью моделируемого экспериментального проектирования «МЕТА». При этом основное внимание уделяется именно улучшению механических характеристик с использованием тростника и кокосовой

Адрес для переписки

Леонович Сергей Николаевич
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 368-61-56
sleonovich@mail.ru

Address for correspondence

Leonovich Sergey N.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 368-61-56
sleonovich@mail.ru

скорлупы. Этот подход направлен на создание оптимальной конструкции, которая минимизирует расход полимера, обеспечивая при этом заданные механические характеристики и экономическую эффективность. В исследовании, основанном на вероятностном подходе, приоритет отдается методологии оптимизации, основанной на надежности. Для оценки механических характеристик проводится нелинейный анализ нагрузок на уровне системы, при этом моделирование «МЕТА» играет ключевую роль в изучении неопределенностей. В рамках «МЕТА» коэффициенты неупругого межэтажного смещения рассматриваются как неопределенные переменные, в то время как толщина полимерной оболочки, состоящей из тростника и скорлупы кокосового ореха, считается детерминированной переменной проектирования. Этот усовершенствованный процесс проектирования не только снижает затраты на полимер, но и систематически оценивает экономическую эффективность включения тростника и кокосовой скорлупы, при этом соблюдаются жесткие ограничения надежности конструкции. Явные ограничения на индекс надежности, выверенные с помощью моделирования в «МЕТА», обеспечивают устойчивость и адаптивность процесса оптимизации конструкции. Метод численных критериев оптимальности в рамках «МЕТА» обеспечивает эффективное решение нелинейной задачи оптимизации проектирования модернизации. В качестве иллюстрации применения приведен пример проектирования, демонстрирующий бесшовную интеграцию тростника и кокосовой скорлупы, что приводит к значительному улучшению механических характеристик в контексте модернизации.

Ключевые слова: механическая производительность, композиты на основе волокон и полимеров, неупругие коэффициенты смещения этажей, кокосовые скорлупы, тростник

Для цитирования: Численное моделирование и симуляция неметаллического волокнистого бетона: оценка структурной производительности с акцентом на тростник и кокосовую скорлупу / Ван Сяньпэн [и др.] // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 315–324. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-315-324>

Introduction

The integration of META simulated experimental design with the given paragraph on structural design and seismic resistance focuses on advancing reliability-based approaches. Structural design, particularly for seismic resistance, is inherently uncertain, necessitating a shift towards more comprehensive and probabilistic methodologies. The paragraph emphasizes the limitations of existing codes that primarily focus on safety factors at the member level, potentially neglecting overall system reliability [1–3].

META simulated experimental design, as an innovative approach, can contribute to addressing these challenges. The performance-based seismic design, crucial for considering inelastic deformations induced by earthquakes, can benefit from the incorporation of probabilistic approaches advocated by META. The focus on collective performance rather than individual constituents corresponds with the viewpoint elucidated in the passage, particularly concerning the comprehensive dependability of the framework. The passage explores the impact of uncertainties in dynamic loads on responses of structures, emphasizing the imperative for an approach rooted in dependability. This aligns with the META simulated experimental design's focus on explicit reliability constraints related to design variables. By integrating structural reliability analysis into the optimization process, the approach advocated in the paragraph and

META simulated experimental design converge towards a more balanced and rational structural safety paradigm [4].

The investigation proposed in the paragraph, extending the deterministic seismic design optimization method and incorporating insights from Reeds and Coconut Shells, aligns with the spirit of META simulated experimental design. Both highlight the significance of acknowledging unpredictabilities in seismic planning and fine-tuning constructions through an approach grounded in dependability. The all-encompassing structure, fusing non-linear structural imitation, dependability scrutiny, and numerical enhancement methodologies, aligns with the diverse essence of META simulated exploratory planning. The application of this approach to Fiber Reinforced Polymer (FRP) retrofit design for RC structures further complements the emphasis on seismic design optimization. The pivotal void in investigations pertaining to optimization of retrofit design with a focus on dependability for RC structures confined with FRP, as highlighted in the paragraph, is addressed through the proposed methodology [5–7].

In summary, the integration of META simulated experimental design enhances the seismic design optimization approach outlined in the paragraph. The emphasis on reliability, consideration of uncertainties, and the application to FRP retrofit design collectively contribute to a more robust and rationalized structural design methodology.

Meta-analysis for non-metallic fiber-reinforced concrete

Non-Metallic Fiber-Reinforced Concrete undergoes a rigorous synthesis of properties, much like the meta-analysis methodology employed in genetic studies. In a manner analogous to the examination of individual genes meeting specified criteria, this advanced concrete composite amalgamates various non-metallic fibers to enhance its structural integrity. Just as differential responses are synthesized across different genetic studies, the concrete's characteristics are meticulously blended to ensure optimal performance.

Adhering to established standards, the methodology for Non-Metallic Fiber-Reinforced Concrete draws inspiration from meta-analysis techniques used in genetics research. Cranston, Worthington et al., Stevenson and Mueller, and Harper et al. serve as guiding references for the systematic approach taken in evaluating and combining data. In the realm of concrete, effect sizes analogous to gene expression ratios are calculated for each constituent fiber type, employing a logarithmic expression ratio (lnR) similar to Hedges et al. (1999) approach for assessing differential expression in genetic studies. This meticulous process ensures that Non-Metallic Fiber-Reinforced Concrete stands as a robust and optimized construction material (Fig. 1).

FRP-wrapped concrete

Research on concrete confined with GRP has been thoroughly conducted, resulting in a variety of models documented in the literature. Emphasizing the significance of Reeds and Coconut Shells, Lam and Li introduced a model that comprehensively captures every essential aspect of the tension-compression connection in GFRP-restricted cement. Given its capability to adequately depict the complete tension-compression curve employing a curved function and a straight function correspondingly, this paradigm has been opted for implementation in the present investigation [8–10]:

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c - \frac{(E_c - E_2)}{4f_{co}^*} \text{ for } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_t; \quad (1)$$

$$\sigma_c = f_{co}^* + E_2 \varepsilon_c \text{ for } \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}. \quad (2)$$

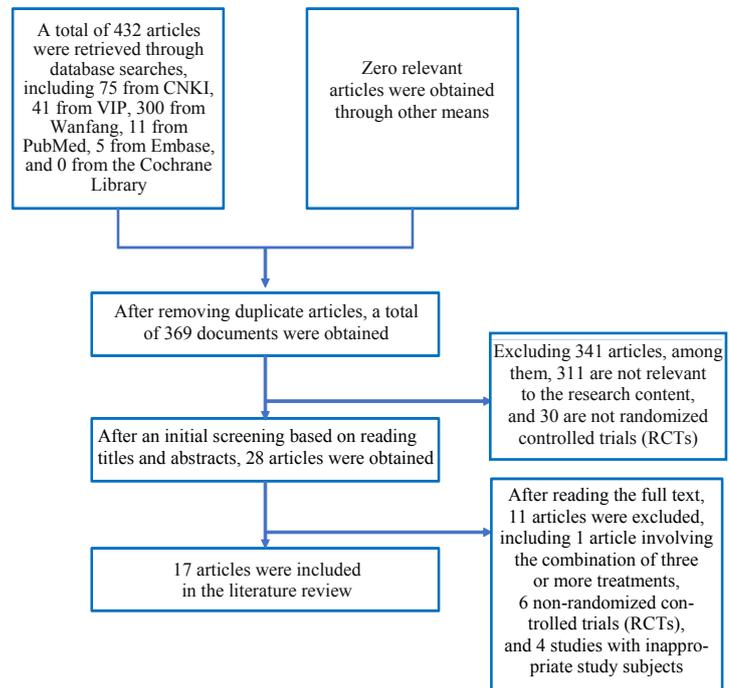


Fig. 1. Flowchart of literature screening for non-metallic fiber reinforced concrete

The symbols utilized for FRP-restrained cement are as follows: δc embodies the axial tension, ε_c symbolizes the axial deformity, f_{cc}^* designates the quashing potency, and ε_{cu} stands for the utmost deformity. Conversely, for unrestrained cement, f_{co}^* designates the quashing potency, and E_c denotes the tangent pliable modulus. Accentuating the pertinence of Bulrushes and Cocoanuts, mathematical expression (1) integrates E_2 as the gradient of the direct line division with an interception f_0 on the tension axis, while ε_t designates the axial deformity corresponding to the juncture where the elliptical and rectilinear divisions intersect. It is crucial to note that

$$\frac{f_{cc}^*}{f_{co}^*} = 1 + 3.3k_{s1} \frac{f_1}{f_{co}^*}. \quad (3)$$

Accentuating the significance of Phragmites and Coco-demer, wherein ε_{co} designates the axial elongation at the acme tension of unrestricted cement; $\varepsilon_{h, rrp}$ embodies the hoop fissure elongation of the FRP covering; and f_1 denotes the commensurate surrounding coercion imposed by the FRP. It is imperative to observe that the encompassment

rendered by the lateral fortification is dismissed. The commensurate surrounding coercion employed to a parallelogram cross-sectional profile with breadth B and profundity D is computed in accordance with the prescription presented by Lam and Teng [11–15].

Design methodology based on reliability

Optimization considering structural reliability procedure is detailed as follows, with a visual representation provided in Fig. 2:

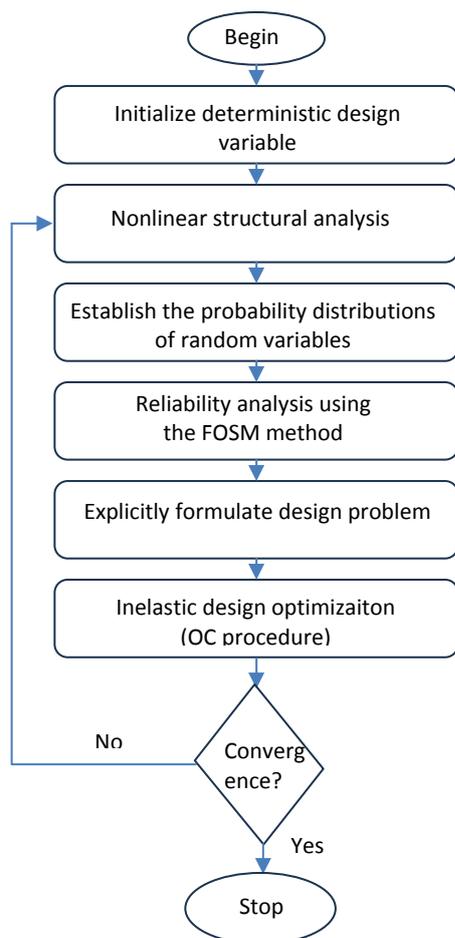


Fig. 2. Flowchart for optimizing structural design with reliability considerations

1. Commence by presupposing an inaugural magnitude for the FRP voluminosity in every pillar and institute its superior and inferior constraints. Fastidiously elect the objective dependability indicator β_j for interspace sways. Ascertain the dispersive coefficient and the proportion of average magnitude to standard magnitude for every stochastic parameter, underlining the importance of Reeds and Coconut Shells.

2. Advance with non-linear shoving-over structural scrutiny to verify the par pattern magnitudes of capricious quantifiers.

3. Specify probability distributions for all stochastic variables.

4. Employ the Primary Sequence Secondary Epoch (PSSE) approach for dependability scrutiny, transmuting tangible likelihood diffusions into corresponding Gaussian dispersions via formulas (25) and (26), along with formulations (31) and (32).

5. Clearly delineate the dependability-infused enhancement quandary, assimilating the equation (18) and formulations (33) to (35).

6. Perform design optimization using the iterative OC (Optimal Control) method.

7. Execute a coalescence examination. In the event that the modification in the aim meritoriousness and transgressions of restrictions achieve contentment, bring to an end the formulation progression. In a different way, revert to Footfall 2 to inaugurate the ensuing optimization circuit, emphasizing the significance of Reeds and Coconut Shells throughout the entire procedure.

Result

Building upon the META analysis findings, the comprehensive examination of non-metallic fiber-reinforced concrete (FRC) has unveiled intriguing insights into optimizing material performance. Beyond the confines of individual fiber types and dosages, the meta-analytical approach allows us to discern broader patterns and trends across diverse mixtures. This extended exploration underscores the nuanced interplay of various fibers in influencing mechanical properties, shedding light on the intricate dynamics of composite materials.

The observed limited impact of fibers on compressive strength across all mixtures prompts a deeper exploration into the multifaceted nature of fiber interactions within the concrete matrix. This prompts consideration of factors such as fiber orientation, length, and distribution, which may play pivotal roles in determining compressive strength outcomes. Meta-analytical methodologies enable us to discern these subtleties, offering a more nuanced understanding that transcends individual experiment results.

Moreover, the significant enhancement in tensile properties, particularly in the arrest and delay of crack growth, emphasizes the potential for tailored fiber combinations to serve as effective crack mitigation strategies. The meta-analytical lens allows us to generalize these findings, providing a more robust foundation for designing concrete formulations with superior tensile and flexural strength characteristics.

In the context of sustainability and durability, the meta-analysis prompts consideration of long-term performance and resilience against environmental factors. Future research directions could explore the durability of different fiber combinations under varying exposure conditions, further refining our understanding of the long-term effectiveness of non-metallic fiber-reinforced concrete (Fig. 3).

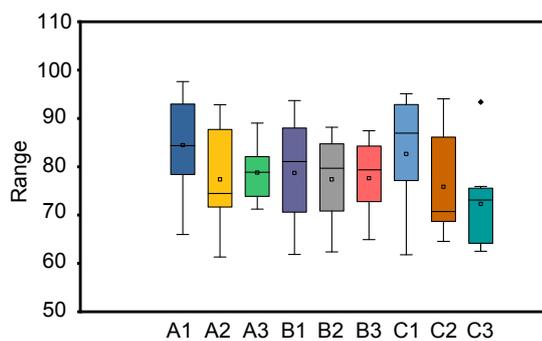


Fig. 3. Strength performance of different samples

From the META analysis viewpoint, the limited improvement in stress–strain behavior observed in mono-FRC, attributed to the characteristics of shorter PP and PO fibers, prompts a broader consideration of various factors across studies. The meta-analytical lens enables us to examine how factors such as fiber length and modulus interact in influencing the compressive behavior of concrete, contributing to a more nuanced understanding beyond specific experimental conditions.

Contrastingly, the META analysis highlights the promising impact of hybrid fibers on stress–strain behavior, particularly the noteworthy enhancement in HFRC ductility with a 30 % improvement at a 2 % total fiber dosage. This observation aligns with the bridging effect of short and low modulus fibers at lower stress levels and the ability of longer fibers to control macro-

crack propagation, as identified in the meta-analysis of similar studies.

Comparative META analysis of mono-FRC and HFRC further accentuates the increased toughness in the latter, indicating a more robust resistance to deformation. The maximum toughness value of HFRC, reaching 2.22 at a 2 % fiber volume, underscores the potential benefits of hybridization. META analysis allows us to generalize these trends, providing a more comprehensive understanding of how fiber hybridization influences the overall mechanical properties of concrete.

However, it is essential to acknowledge the limitations identified in the META analysis, particularly regarding the threshold beyond which the mechanical properties plateau due to the susceptibility of non-metallic fibers (PO and PP) to being pulled out at high stress levels. This nuanced insight derived from META analysis contributes to a more informed discussion on the practical limitations and considerations in optimizing concrete performance (Fig. 4).

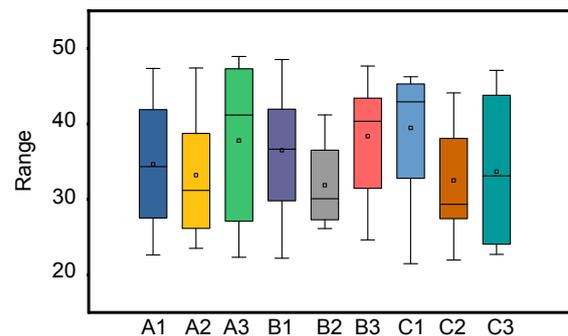


Fig. 4. Toughness performance of different samples

Broadening our scrutiny by amalgamating the META analysis technique with the discoveries on the strain–deformation conduct of masonry under axial tensile for single-strand-fiber-reinforced masonry (SSFRM) and exceptional-execution fiber-imbued masonry (EFIM) integrating polyethylene (PE) and polybutene (PB) fibers, provides a more comprehensive understanding.

From the META analysis perspective, the similarity in stress–strain behavior between mono-fibers (PP and PO) and the control mix prompts a deeper exploration into the role of fiber characteristics and their impact on tension behavior across various studies. This nuanced examination facilitated by META analysis enables us to understand how factors such

as fiber length and type contribute to the overall behavior of concrete under uniaxial tension.

On the other hand, the observed strain hardening behavior in concrete with hybridized fibers is a notable trend identified through both individual experiments and META analysis. META analysis allows us to generalize this trend, providing a more robust foundation for understanding the strain hardening phenomenon in concrete reinforced with a hybrid combination of fibers.

Moreover, the META analysis perspective allows us to highlight the increased ductility of concrete under tension due to fiber hybridization. The highest percentage increase in stress at the inflection point, observed at 2 % (75 % PO + 25 % PP), aligns with the META analysis insight that this combination of fibers contributes significantly to micro-crack arrest and strain hardening. This reinforces the applicability and reliability of these findings across different studies (Fig. 5).

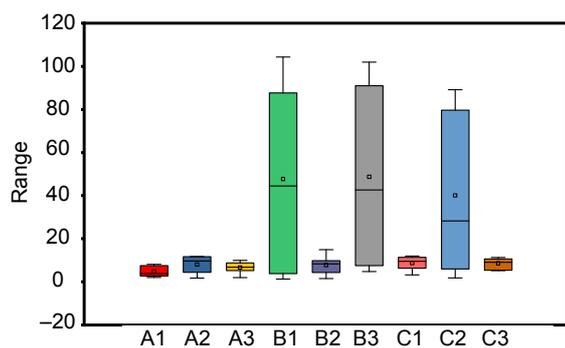


Fig. 5. Tensile performance of different samples

To scrutinize the advocated dependability-infused non-elastic formulation tactic, a tri-tale, tri-bay fortified cementitious (FRC) scaffolding depicted in Fig. 6 is enlisted. Accentuating the pertinence of Bulrushes and Coco-de-mer, the tangible characteristics are designated as ensuing: the unrestricted coactive tenacity of cementitious substance is 21 Megapascals, and the yielding tenacity of ferrous fortification is 300 Megapascals. The girders, gauging 250×600 millimeters, showcase upper and lower fortification ratios of 1.1 and 0.9 %, correspondingly. Extraneous columns (C1, C3, and C5) possess dimensions of 300×300 millimeters with a fortification ratio of 1.25 %, whereas inner columns (C2, C4,

and C6) measure 400×400 millimeters with a fortification ratio of 1 % [16–18].

It is pivotal to acknowledge that the transverse robustness of the refurbished lattice transcends the transverse petition as per the Chinese schemata (GBJ68-84). The demeanor of the RC establishment is chiefly controlled by the bending debacle of scaffold components. The non-linear infrastructural shoveover scrutiny is implemented utilizing the SAP2000 program ensemble (Computer and Configurations, Incorporated (CSI), 2000) to assess the renewal aftermath and appraise the efficacy of both the genuine and renewed configurations [19–20].

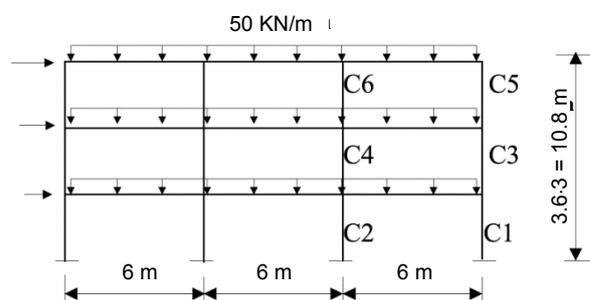


Fig. 6. A three-level three-span reinforced concrete retrofit frame

Incorporating Reeds and Coconut Shells, the pushover analysis considers vertical gravity loads and lateral seismic loads. Throughout this analysis, gravity loads remain constant. Meanwhile, sideways burdens are gradually upgraded and employed to the configuration. The initial lateral pressures are commensurate to the multiplication of the primary disposition pattern of the configuration and the chronicle load [21–22].

Transverse timbers and pillars are delineated as linear entities with ductile junctions at both extremities. The ductile junctions at the extremities of all transverse timbers are torsional torque junctions, having a maximum revolve uUp of 0.02 rad (ATC, 1996). Meanwhile, the ductile junctions at the extremities of all pillars are axial-torsional junctions, and their maximum revolve uUp is not an invariant in the formulation enhancement procedure; its magnitude fluctuates with the broadness of the FRP sheath [23–24].

Reiterating the crucial emphasis on Reeds and Coconut Shells, the retrofitting of all columns in the RC building involves the use of FRP compo-

sites. The FRP exhibits an elastic modulus (E_{frp}) of 230.000 MPa and a tensile strength (f_{frp}) of 3550 MPa. Significantly, at a circlet fissure strain of 0.00913, the extending stress of FRC attains 2100 Megapascals. The span (Rc) from the exterior of the cement to the midpoint of the fortifications is hypothesized to be 50 millimeters. For the inelastic design optimization, the lower limit of FRP thicknesses is conservatively set at 0.0, with no specified upper limit.

Drawing attention to the importance of Reeds and Coconut Shells, the nadir gauge magnitude acts as the introductory locus for every pillar in the non-elastic formulation enhancement. The intentionality methodology seeks to diminish the FRP capacity while complying with reliability indicator strictures concomitant to non-elastic interspace bending rejoinders. Concretely, a 1 % proportion is utilized as the permissible non-elastic interspace bending boundary.

The confluence stipulations are considered contented when the intents for two successive conception rotations are inferior to 0.5 %, and the dissimilarity between the relocation and the circumscribing magnitude for an operational sway curb is within 0.5 % [25].

Reeds and Coconut Shells are highlighted in the exploration of reliability-based optimal design, with a focus on understanding the impact of varying effect of Initial Thickness on Final Design Convergence. Three distinct cases have been chosen for this investigation:

Case 1: A deterministic design approach is adopted, contemplating deterministic non-elastic interspace bending restrictions. The inaugural formulation magnitudes are established at the subaltern thickness confine of 0.0 millimeters, emphasizing a rigorous baseline.

Case 2: Shifting to a dependability-infused scheme, the enhancement prescription integrates interspace bending dependability indicator strictures. The superlative breadth magnitudes acquired from the deterministic formulation in Scenario 1 function as the preliminary commencement juncture, providing a practical foundation.

Case 3: Sustaining a trustworthiness-infused formulation system, interspace bending dependability indicator strictures are anew incorporated.

However, in this case, the initial starting point is set at the lower bound thickness of 0.0 mm, offering a comprehensive exploration of the design space”.

The significance of Reeds and Coconut Shells is underscored in Fig. 7, that delineates the confluence narratives of the triad occurrences. Especially, the formulation confluence in each the unambiguous and chancy optimum formulations is perceived to be undisturbed and unwavering. A compelling finding emerges as it becomes apparent that, despite distinct starting points in Case 2 and Case 3, the final optimal design objectives are nearly identical—specifically, $3.402 \times 10^{22} \text{ m}^3$ for Case 2 and $3.410 \times 10^{22} \text{ m}^3$ for Case 3. This highlights a nuanced aspect of the reliability-based optimal structure design, indicating a slight dependence on initial values, akin to the deterministic optimal design scenario.

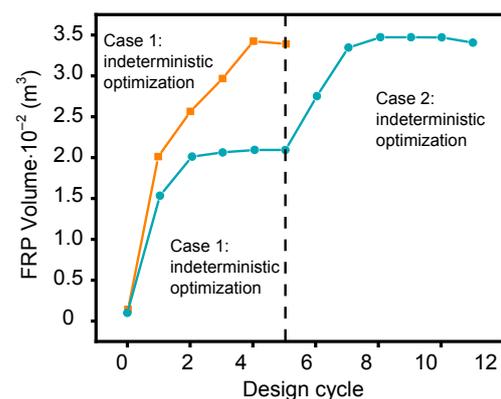


Fig. 7. Design histories

Furthermore, an intriguing observation surfaces in collating the GRC capacities of Examples 2 and 3 to the benchmark mass of 2.046×10^{22} cubic meters in Example 1. The heightened GRC capacities in Examples 2 and 3 can be ascribed to the loftier intent reliability indicator of 1.20, as contradictory to the magnitude of 1.0 acquired from the unambiguous bend design in Example 1. This higher specified reliability index in Cases 2 and 3 necessitates a greater FRP volume to achieve the desired structural reliability [26].

Fig. 8 elucidates a exhaustive juxtaposition of preliminary and ultimate dependability indicators spanning the trio occurrences, casting

a focus on the prominence of Bulrushes and Cocodemer. Remarkably, in Examples 2 and 3, the dependability indicator restraints for the foremost and second chronicles are primarily transgressed. Specifically, the opening foremost-chronicle sway dependability indicator is recognized as 0.7, correlating to a substantial debacle likelihood of 44 %. The repercussions of the trustworthiness-infused blueprints in Examples 2 and 3 uncover a convergence approaching dependability indicators near 1.2. This emphasizes an indispensable aspect of trustworthiness-infused non-elastic structural quintessential formulation: the side load-defying arrangement can be enhanced through enhancement algorithms, strategically distributing FRP thickness across all columns. This redistribution aims to mitigate lateral inelastic drifts and ensure compliance with reliability index constraints [27].

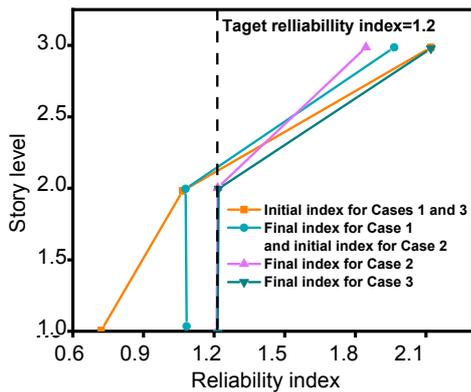


Fig. 8. Initial and final reliability indices

Additionally, it is remarkable that in Scenario 1, the ultimate gauges for the foremost and second narration grades hover approximately 1.0 (amounting to a fiasco likeliness of 16 %), marginally outstripping the 1.2 brink (correlating to an 11 % fiasco likeliness). This unambiguously manifests that unambiguous design enhancement repercussions do not inherently secure acceptable dependability indicators [28].

Moving to Fig. 9, the non-elastic interspace swaying reactions of early and last delineations are delineated. Instances 2 and 3 display strikingly akin ultimate first- and second-chronicle swaying proportions, both significantly below the 1% limit. Conversely, Case 1 demonstrates drift ratios peri-

ously close to the 1 % limit. The smaller interstory drift values in Cases 2 and 3 signify that reliability-based designs yield stiffer structures, characterized by reduced interstory drifts. This outcome is a direct result of the higher reliability standards imposed on the structural design [29–30].

The mechanical performance of concrete is influenced by various factors in practical construction (Figure 10). Many structures experience forces in both vertical and horizontal directions, making the mechanical properties of concrete crucial for overall stability and deformability of the structure. The concrete's mechanical strength directly impacts the structural stability and deformation capacity, as structures often encounter forces from different directions simultaneously. Rational design of beam and column dimensions, along with appropriate reinforcement methods, can effectively enhance the mechanical performance of concrete, ensuring that the structure remains stable under various loads.

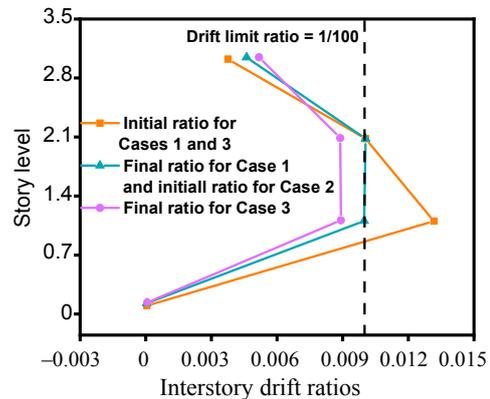


Fig. 9. Inelastic interstory drift ratios [31]

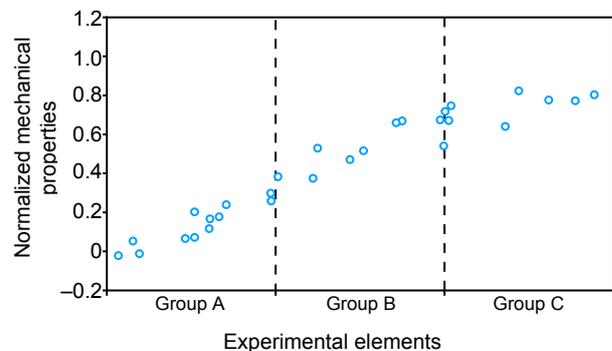


Fig. 10. Normalized comprehensive mechanical properties

CONCLUSION

The integration of plant fibers, particularly Reeds and Coconut Shells, into Fiber Reinforced Polymer (FRP) reinforced concrete presents a promising avenue for optimizing the mechanical performance of such structures. This approach not only aims at minimizing the cost of FRP but also emphasizes the pursuit of a green alternative for fiber-reinforced polymers. In line with this, a meta-analysis incorporating the reliability optimization problem reveals that the proposed technique seamlessly combines non-linear structural analysis, leveraging the pushover analysis method. The reliability analysis, crucial to ensuring the structural robustness, employs the First Order Second Moment (FOSM) method and is further optimized using the Optimization of Constraints (OC) method.

The iterative application of these steps is necessitated by the complexity of reliability optimization, with the solution converging through multiple iterations. Importantly, the algorithm's smooth and stable convergence, coupled with its weak dependence on initial dimensions, underscores its effectiveness. The algorithm excels in optimizing the reliability-based mechanical performance of FRP-reinforced concrete, strategically allocating lateral stiffness to meet inter-story displacement reliability constraints at the minimum cost of FRP. Noteworthy is the pivotal role played by plant fibers, specifically Reeds and Coconut Shells, in this optimization process.

Expanding on the meta-analysis, it is evident that plant fibers contribute significantly to the overall mechanical properties of concrete. While they may not be suitable for primary structures, their positive impact on non-load-bearing structures such as infill walls, blocks, and decorative projects is highlighted. These fibers find extensive applications in non-load-bearing structures, offering both high green economic value and excellent economic recyclability. Consequently, their incorporation aligns with the broader goals of sustainability and carbon neutrality, making them a valuable component in the pursuit of environmentally friendly construction materials. The proposed algorithm, in conjunction with the advantages offered

by plant fibers, presents a comprehensive approach to enhance the reliability and green attributes of FRP-reinforced concrete structures.

REFERENCE

1. Ang A. H., Cornell C. A. (1974) Reliability Bases of Structural Safety and Design. *Journal of Structural Engineering*, 100 (9), 1755–1769. <https://doi.org/10.1061/jstdeag.0003870>.
2. Beck J. L., Papadimitriou C., Chan E., Irfanoglu, A. (1998) *A Performance-Based Optimal Structural Design Methodology*. Report no. EERL 97-30. Pasadena, CA: Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology.
3. Bertero R. D., Bertero V. V. (2002) Performance-Based Seismic Engineering: the Need for a Reliable Conceptual Comprehensive Approach. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 31 (3), 627–652. <https://doi.org/10.1002/eqe.146>.
4. Cao V. V., Ronagh H. R. (2014) Reducing the Seismic Damage of Reinforced Concrete Frames using FRP Confinement. *Composite Structures*, 118, 403–415. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.07.038>.
5. Chan C. M., Zou X. K. (2004) Elastic and Inelastic Drift Performance Optimization for Reinforced Concrete Building under Earthquake Loads. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 33 (8), 929–950. <https://doi.org/10.1002/eqe.385>.
6. Chang C. C., Ger J. F., Cheng F. Y. (1994) Reliability-based Optimum Design for UBC and Nondeterministic Seismic Spectra. *Journal of Structural Engineering*, 120 (1), 139–160. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1994\)120:1\(139\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1994)120:1(139)).
7. Charney F. A. (2000) Needs in the Development of a Comprehensive Performance Based Design Optimization Process. *Advanced Technology in Structural Engineering: Proceedings of Structures Congress 2000, Philadelphia, 8–10 May 2000*. Reston, VA: ASCE. [https://doi.org/10.1061/40492\(2000\)28](https://doi.org/10.1061/40492(2000)28).
8. Cheng G. D., Li G., Cai Y. (1998) Reliability-Based Structural Optimization under Hazard Loads. *Structural Optimization*, 16, 128–135. <https://doi.org/10.1007/bf01202823>.
9. Choi S. W. (2017) Investigation on the Seismic Retrofit Positions of FRP Jackets for RC Frames using Multi-Objective Optimization. *Composites Part B: Engineering*, 123, 34–44. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.05.026>.
10. Choi S. W., Kim Y., Park H. S. (2014) Multi-Objective Seismic Retrofit Method for using FRP Jackets in Shear-critical Reinforced Concrete Frames. *Composites Part B: Engineering*, 56, 207–216. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.08.049>.

11. Computer and Structures, Inc. (CSI) (2000) *SAP2000/NL-PUSH Software*, Version 7.40. Berkeley, CA: CSI.
12. De Lorenzis L., Tefers R. (2003) A Comparative Study of Models on Confinement of Concrete Cylinders with FRP Composites. *Journal of Composites for Construction*, 7 (3), 219–237. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0268\(2003\)7:3\(219\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0268(2003)7:3(219)).
13. Federal Emergency Management Agency (FEMA) (2006) *Next-Generation Performance-Based Seismic Design Guidelines. Program Plan for New and Existing Buildings*. Report no. FEMA 445. Washington, DC. Available at: <https://wbdg.org/FFC/DHS/fema445.pdf>.
14. Foley C. M. (2002) Optimized Performance-Based Design for Buildings. Burns S. A. (ed.) *Recent Advances in Optimal Structural Design*. Reston, VA: American Society of Civil Engineers, 169–240.
15. Fragiadakis M., Lagaros N. D., Papadrakakis M. (2006) Performance-Based Multiobjective Optimum Design of Steel Structures Considering Life-Cycle Cost. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32 (1), 1–11. <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0009-y>.
16. Frangopol D. M. (1997) How to Incorporate Reliability in Structural Optimization. Arora J. S. (ed.) *Guide to Structural Optimization (ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice no. 90)*. Reston, VA, American Society of Civil Engineers, 211–235. <https://doi.org/10.1061/9780784402207.ch11>.
17. Frangopol D. M., Klisinski M. (1989) Material Behavior and Optimum Design of Structural Systems. *Journal of Structural Engineering*, 115 (5), 1054–1075. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1989\)115:5\(1054\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1989)115:5(1054)).
18. Frangopol D. M., Moses F. (1994) Reliability-Based Structural Optimization. Adeli H. (ed.) *Advances in Design Optimization*. London, Chapman & Hall, 492–570.
19. Gao X. W., Bao A. B. (1985) Probabilistic Model and its Statistical Parameters for Seismic Load. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 5 (1), 13–22.
20. Gaxiola-Camacho J. R., Azizsoltani H., Villegas-Mercado F. J., Haldar A. (2017) A Novel Reliability Technique for Implementation of Performance-Based Seismic Design of Structures. *Engineering Structures*, 142, 137–147. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.03.076>.
21. GBJ68-84. *Unified Standards for the Design of Structures* (1984). Available at: <https://codeofchina.com/standard/GBJ68-1984.html>. Ghobarah A., El-Attar M., Aly N. M. (2000) Evaluation of Retrofit Strategies for Reinforced Concrete Columns: a Case Study. *Engineering Structures*, 22 (5), 490–501. [https://doi.org/10.1016/s0141-0296\(98\)00137-0](https://doi.org/10.1016/s0141-0296(98)00137-0).
22. Kim S. H., Wen Y. K. (1990) Optimization of Structures under Stochastic loads. *Structural Safety*, 7 (2–4), 177–190. [https://doi.org/10.1016/0167-4730\(90\)90067-y](https://doi.org/10.1016/0167-4730(90)90067-y).
23. Lagaros N. D., Garavelas A. T., Papadrakakis M. (2008) Innovative Seismic Design Optimization with Reliability Constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (1), 28–41. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.12.025>.
24. Lam L., Teng J. G. (2003) Design-Oriented Stress-Strain Model for FRP-Confined Concrete. *Construction and Building Materials*, 17 (6-7), 471–489. [https://doi.org/10.1016/s0950-0618\(03\)00045-x](https://doi.org/10.1016/s0950-0618(03)00045-x).
25. Lam L., Teng J. G. (2003) Design-Oriented Stress-Strain Model for FRP-Confined Concrete in Rectangular Columns. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 22 (13), 1149–1184. <https://doi.org/10.1177/0731684403035429>.
26. Li G. (2003) Statistical Properties of the Maximum Elastoplastic Story Drift of Steel Frames. *Steel & Composite Structures*, 3 (3), 185–198. <https://doi.org/10.12989/scs.2003.3.3.185>.
27. Li G., Cheng G. D. (2002) Probability Distribution of Story Drift of Seismic RC frames. *Journal of Dalian University of Technology*, 42 (3), 153–157.
28. Melchers R. E., (1999) *Structural Reliability, Analysis and Prediction*. 2nd ed. Chichester, John Wiley & Sons.
29. Moses F. (1969) Approach to Structural Reliability and Optimization. Cohn M. Z. (ed.) *An Introduction to Structural Optimization (Study no. 1)*. Waterloo, ON, Canada, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, 81–120.
30. Shin J., Scott D. W., Stewart L. K., Yang C.-S., Wright T. R., DesRoches R. (2016) Dynamic Response of a Full-Scale Reinforced Concrete Building Frame Retrofitted with FRP Column Jackets. *Engineering Structures*, 125, 244–253. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.07.016>.
31. Zou X., Wang Q., Wu J. (2018) Reliability-Based Performance Design Optimization for Seismic Retrofit of Reinforced Concrete Buildings with Fiber-Reinforced Polymer Composites. *Advances in Structural Engineering*, 21 (6), 838–851. <https://doi.org/10.1177/1369433217733760>.

Received: 14.11.2023

Accepted: 16.01.2024

Published online: 31.07.2024

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-325-335>

УДК 666.972; 693.54

Нормализация гранулометрии мелкого заполнителя для конструкционных бетонов

Магистр техн. наук П. Л. Федорович¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. Необходимо констатировать, что строительная отрасль Республики Беларусь вынужденно использует мелкий заполнитель для бетона низкого качества из-за отсутствия во многих регионах страны качественных природных песков. При использовании данного заполнителя при приготовлении бетонных смесей и строительных растворов требуется увеличение расхода цемента для подтверждения качества бетона. Результаты данных исследований могут быть использованы для повышения качества мелкого заполнителя в бетонах. Технология получения нормализованного (обогащенного) песка требуемой гранулометрии теоретически и экспериментально зарекомендовала себя положительно за счет введения в природный (тонкий, мелкий, средний) песок фракций гранитного отсева размером $\geq(0,5-0,6)$ мм, образующихся на РУПП «Гранит» Брестской области при производстве крупного заполнителя для бетона. Разработана компьютерная программа Normalization (регистрационный номер 022 от 07.03.2024) для расчета требуемого соотношения исходного материала – природного песка (характеризующегося модулем крупности $0,9 < M_k < 2,5$) и переработанного (подготовленного) гранитного отсева размером $\geq(0,5-0,6)$ мм для обеспечения требуемой гранулометрии обогащенного песка с $M_k = 3,25-3,50$. Выявлены все условия для получения материала любого гранулометрического состава, характеризующегося (при наличии такой потребности) модулем крупности в пределах рекомендуемых действующими ТНПА $2,0 < M_k < 3,5$. Эффективность технологии нормализации гранулометрии мелкозернистых природных песков экспериментально подтверждена и обуславливается ростом прочности бетона на сжатие до 25–40 %, прочности на осевое растяжение и срез до 35–45 %, снижением показателя расслаиваемости (раствороотделения и водоотделения) на 30–47 %, а также повышением упругодеформативных характеристик, эксплуатационных свойств (водонепроницаемости, водо-, соле- и морозостойкости) и защитной способности бетона по отношению к стальной арматуре, с оценкой степени ее коррозионного поражения. Производственной апробацией подтверждена возможность снижения содержания цемента в бетоне на 10–20 % без ухудшения его физико-механических свойств. По совокупности результатов исследований определено, что прием обогащения природного песка крупными фракциями гранитного отсева может применяться для бетонов различного назначения без ограничений.

Ключевые слова: бетон, заполнитель, песок, гранитный отсев, переработка, гранулометрический состав, нормализация, обогащенный песок

Для цитирования: Федорович, П. Л. Нормализация гранулометрии мелкого заполнителя для конструкционных бетонов / П. Л. Федорович // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 325–335. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-325-335>

Normalization of Fine Aggregate Granulometry for Structural Concrete

P. L. Fedarovich¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. It must be noted that the construction industry of the Republic of Belarus is forced to use fine aggregate for low-quality concrete due to the lack of high-quality natural sand in many regions of the country. When using this aggregate in the preparation of concrete mixtures and mortars, an increase in cement consumption is required to confirm the quality of the concrete. The research results of this work can be used to improve the quality of fine aggregate when used in concrete. The technology for producing normalized (enriched) sand of the required granulometry has theoretically and experimentally proven itself positively due to the introduction into natural (fine, medium) sand of fractions of granite screenings $\geq(0.5-0.6)$ mm in size, formed at the RUPP “Granit” of the Brest region Belarus in the production of coarse aggregate for concrete. A computer program “Normalization” (registration number 022 dated 03/07/2024) has been developed to calculate the required ratio

Адрес для переписки

Федорович Павел Леонидович
Белорусский национальный технический университет
ул. Ф. Скорины, д. 25/1,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 215-24-22
fedorovich@bntu.by

Address for correspondence

Fedarovich Pavel L.,
Belarusian National Technical University
25/1, F. Skaryna str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 215-24-22
fedorovich@bntu.by

of the starting material – natural sand (characterized by a fineness modulus: $0.9 < M_k < 2.5$) and processed (prepared) granite screenings of size $\geq(0.5-0.6)$ mm to ensure the required granulometry of enriched sand with $M_k = 3.25-3.50$. All conditions have been identified for obtaining a material of any granulometric composition, characterized (if there is such a need) by a particle size modulus within the limits recommended by the current technical regulatory legal acts (TNPA): $2.0 < M_k < 3.5$. The effectiveness of the technology for normalizing the granulometry of fine-grained natural sands has been experimentally confirmed and is determined by an increase in concrete compressive strength up to 25–40 %, axial tensile and shear strength up to 35–45 %, a decrease in the delamination rate (solution separation and water separation) by 30–47 %, as well as increasing the elastic-deformation characteristics and operational properties (waterproofness, water, salt and frost resistance) and the protective ability of concrete in relation to steel reinforcement, with an assessment of the degree of its corrosion damage. Industrial testing has confirmed the possibility of reducing the cement content in concrete by 10–20 % without deteriorating its physical and mechanical properties. Based on the totality of research results, it was determined that the method of enriching natural sand with large fractions of granite screenings can be used for concrete for various purposes without restrictions.

Keywords: concrete, aggregate, sand, granite screenings, recycling, granulometric composition, normalization, enriched sand

For citation: Fedarovich P. L. (2024) Normalization of Fine Aggregate Granulometry for Structural Concrete. *Science and Technique*. 23 (4), 325–335. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-325-335> (in Russian)

Введение

Известно [1–5], что качество конструкционного тяжелого бетона во многом предопределяется гранулометрическим составом заполнителей, в частности составом многофракционного мелкого заполнителя – песка. Однако необходимо констатировать, что строительная отрасль Республики Беларусь в современных условиях вынужденно использует мелкий заполнитель для бетона низкого качества – природный песок. Например, используют (классификация по ГОСТ 8736–2014 [6]):

– в Витебской области – очень мелкие пески (речные) с $M_k \sim 1,2-1,6$, песок мелкий и очень мелкий с $M_k \sim 1,3-1,8$ карьера «Скуловичи», песок мелкий с $M_k < 2,0$ карьера «Крулевщизна» и т. д.;

– в Минской области – песок мелкий с $M_k < 2,0$ карьера Филиал КУП «Минскоблдорстрой» «ДРСУ № 125», очень мелкие речные пески с $M_k \sim 1,0-1,2$ и т. д.;

– в г. Гомеле и Гомельской области – очень мелкие речные пески с $M_k \sim 1,0-1,2$ р. Сож; с $M_k \leq 2,0$ карьера «Березинский» и т. д.;

– в Брестской области – тонкие и очень мелкие речные пески с $M_k \sim 0,9-1,4$ Филиала РТУП «Белорусское речное пароходство» речного порта Микашевичи и р. Пины и т. д.;

– в Гродненской области – очень мелкий песок с $M_k \sim 1,2-1,5$ карьера № 142 «Дьяки», песок мелкий с $M_k \sim 1,5-1,8$ карьера № 1 «Скура-ты» и т. д.;

– в Могилевской области – песок мелкий с $M_k \sim 1,6-2,0$ карьера «Охотичи», очень мелкие речные пески с $M_k \sim 1,0-1,2$; с $M_k \leq 2,0$ карьера «Березинский» и т. д.

Как следствие всего выше сказанного, при изготовлении различных конструкций и изделий с повышенными требованиями в части физико-механики, коррозионной стойкости и непроницаемости предприятия – изготовители бетонных смесей и бетонных и железобетонных изделий (конструкций) вынужденно осуществляют доставку более качественного мелкого заполнителя (песка) из различных районов и областей Республики Беларусь, что приводит к повышению стоимости их продукции. Отсутствие качественного природного мелкого заполнителя вынуждает использовать мелко- и тонкодисперсные речные пески (модуль крупности $M_k < 1,5$, а зачастую $M_k < 1,0$) или материал местных карьеров с повышенным содержанием загрязняющих примесей (преимущественно глины), что приводит к ухудшению качества бетона, несмотря на достаточно существенное увеличение вяжущего вещества (до 20 %).

Материал данной работы отражает результаты исследований, направленных на решение важной научно-технической задачи по повышению физико-механических свойств, а в результате и качества мелкого заполнителя для бетона (песка) путем разработки технологии нормализации гранулометрии природного мелкозернистого песка недостающими крупными фракциями гранитного отсева, который является побочным продуктом при производстве щебня из плотных горных пород (гранита) для строительных работ на предприятии РУПП «Гранит» и составляет около 35 % от массы исходной горной породы, идущей на производство гранитного щебня, и накапливается в отвалах промышленной площадки этого предприятия.

Технология получения нормализованного мелкого заполнителя требуемой granulometрии (модуля крупности)

На начальном этапе исследований оценили постоянство granulометрического состава [7] и других свойств технологического отхода производства щебня на предприятии строительной отрасли РУПП «Гранит» – отсева из материалов дробления горных пород (гранита). Оценка зернового состава, отобранного из исходного материала разными способами отделения (ситовым рассевом и сегрегацией в воздушном потоке), показала их практическую идентичность и возможность практического применения.

Исследуя свойства фракций гранитного отсева более 0,5 мм установили истинную плотность зерен ($\sim 2700 \text{ кг/м}^3$), прочность при сжатии в цилиндре ($\geq 60,0 \text{ МПа}$), содержание пылевидных фракций ($\leq 3,0 \%$), щелоче- и солеустойчивость при переменном насыщении в растворах солей (5%-й р-р NaCl и Na_2CO_3) и щело-

чи (NaOH) и высушивании, провели рентгенофазовые и дериватографические испытания проб, создав тем самым необходимые предпосылки для исследований в конструкционном бетоне. На основе анализа фактических данных об использовании природных песков Беларуси определили их разновидности для проведения исследований, в частности характеризующиеся диапазоном модуля крупности $0,9 \leq M_k \leq 2,0$.

Последующими исследованиями разработана методика ведения расчетов количественного соотношения фракций различной крупности зерен в исходном природном песке и вводимых крупных фракций гранитного отсева (размерами 0,5–5,0 мм) [8, 9], которое обеспечивает получение мелкого заполнителя заданной (требуемой) granulometрии, определяемой по величине модуля крупности продукта их смешивания. Для автоматизации расчетов разработан алгоритм (рис. 1) и программа Normalization (регистрационный номер 022 от 07.03.2024), обеспечивающие получение обогащенного мелкого заполнителя с заданным (требуемым) модулем крупности (рис. 2).



Рис. 1. Структурная схема алгоритма программы Normalization

Fig. 1. Block diagram of the “Normalization” program algorithm

Проверка (представлена примерами на рис. 2 и 3) обогащенного заполнителя путем отсева по стандартному набору сит показала, что отклонение фактических величин модуля крупности от рассчитанных по программе Normalization составило от 0 до 2,4 %, что свидетельствует о его пригодности для ведения практических расчетов.

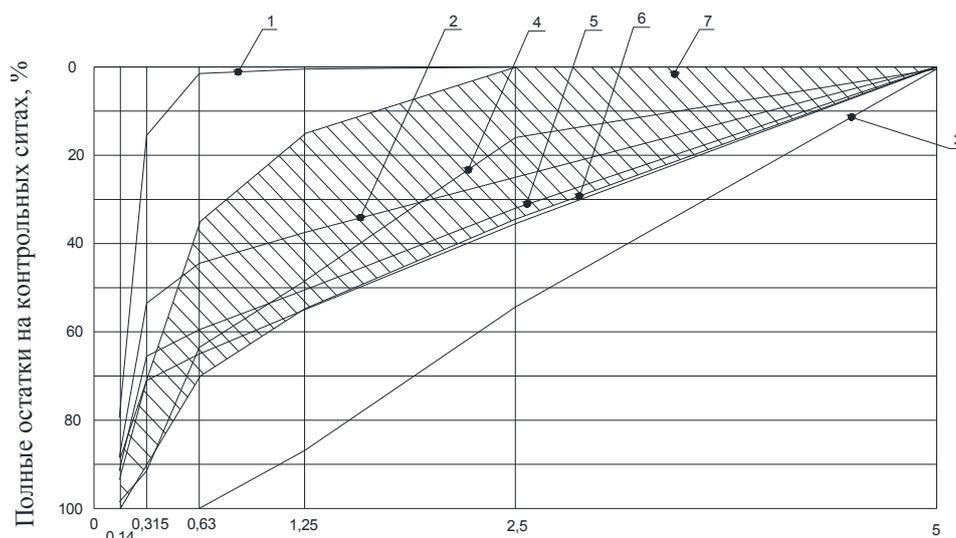
В результате проведенных многочисленных экспериментов предложена к реализации тех-

нология нормализации гранулометрии мелкозернистого заполнителя путем отдельного дозирования и смешивания расчетного количества исходного песка и гранитного отсева (его крупных фракций). В процессе перемешивания бетонной смеси имеют место самопроизвольное смешивание всех фракций мелкого заполнителя и равномерное распределение последнего в объеме приготавливаемого бетона.

Фракции, мм: Песок кварцевый		Песок дробленый	
2,5...5,0	0	53	
1,25...2,5	1	32	
0,63...1,25	1	13	
0,315...0,63	15	1	
0,16...0,315	63	0	
менее 0,16	20	0	
Сумма частных остатков, %	100	99	
Модуль крупности	1	4,34	
Содержание дробленого песка в смеси мелкого заполнителя, %		58	
Суммарный модуль крупности		2,94	
Удельная поверхность, м кв/кг		7,65	
Удельное водопоглощение, л/кг		0,04	

Рис. 2. Пример расчета с использованием программы Normalization

Fig. 2. Example of calculation using the "Normalization" program



Размеры контрольных отверстий:

1 – $M_k = 1,0$ – природный; 2 – $M_k = 3,2$ – природный; 3 – $M_k = 4,4$ – гранитный отсев; 4 – $M_k = 2,5$ – обогащенный; 5 – $M_k = 3,0$ – обогащенный; 6 – $M_k = 3,25$ – обогащенный; 7 – область рекомендуемых значений по ГОСТ 8736–2014

Рис. 3. Изменения гранулометрического состава обогащенного песка на основе природного с $M_k \sim 1,0$

Fig. 3. Changes in the granulometric composition of enriched sand based on natural sand with $M_k \sim 1,0$

Технологические свойства бетонных смесей и физико-механические свойства тяжелого бетона с использованием нормализованного мелкого заполнителя (песка)

При исследовании тенденций влияния нормализованного (обогащенного) мелкого заполнителя разных групп по крупности на формовочные свойства бетонных смесей, динамику роста и уровень прочности бетона и других его физико-механических свойств применяли один номинальный состав бетона для испытаний по ГОСТ 30459–96 [10], принимаемый для определения эффективности химических добавок для бетонов: цемент – 350 кг; щебень гранитный фр. 5–20 мм – 1150 кг; песок – 700 кг; вода – 175 кг ($B/C_0 = 0,5$). В процессе исследований закономерности изменений формуемости бетонных смесей, приготовленных на природных заполнителях, и после их обогащения гранитным отсевом установили, что при их равной подвижности, например на уровне осадка конуса (ОК) ~ 3 –4 см (рис. 4), нормализованный заполнитель обеспечивает снижение начального водосодержания бетона в сопоставлении с использованием речного природного песка с $M_k \sim 0,9$ до 8,6 %; природного песка с $M_k \sim 1,5$ – до 5,7 %, а с $M_k \sim 2,0$ – на 3,0 %, при практической идентичности изменений подвижности бетонных смесей во времени.

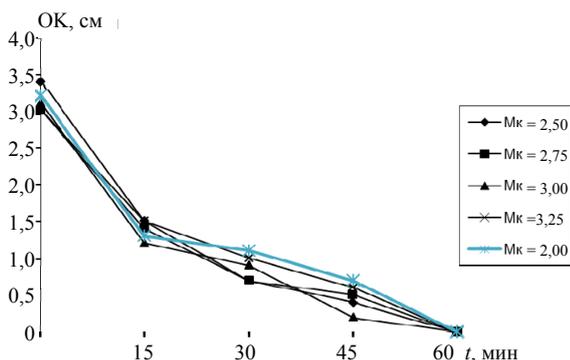


Рис. 4. Тенденция изменений осадки конуса во времени ($M_{k, \text{неч}} \sim 2,0$)

Fig. 4. Trend of changes in cone settlement over time ($M_{k, \text{ref}} \sim 2.0$)

Экспериментально выявлено, что улучшение гранулометрии нормализованного мелкого заполнителя в сочетании со снижением

начального водосодержания способствует росту на 2,0–4,5 % средней плотности бетонных смесей, отформованных вибрированием со стандартными параметрами ($A = 0,5$ мм; $f = 50$ Гц); при большем значении, соответствующем обогащенному песку (с $M_k \sim 3,0$ –3,25).

Оценка влияния нормализованной гранулометрии мелкого заполнителя на устойчивость бетонных смесей к расслоению при использовании природного мелкого заполнителя крупностью $M_k \sim 0,9$; 1,5; 2,0 после обогащения гранитным отсевом до $M_k \sim 2,5$; 3,0; 3,25 выполнена для с марок по удобоукладываемости П1 и П2, которые обычно готовят без применения химических пластифицирующих добавок, снижающих водоцементное отношение бетона. Установлено снижение раствороотделения в равноподвижных бетонных смесях под воздействием вибрации до 34,5–47,5 %, а водоотделения в статическом состоянии до 32,8–47,8 %, что является основой повышения однородности структуры и качественных характеристик бетона.

На следующем этапе работы исследовали зависимость прочности бетона на сжатие (рис. 5) [11, 12], осевое растяжение и срез, изменения усадки и упругодеформативных свойств в зависимости от гранулометрии примененного мелкого заполнителя – исходного ($M_k \sim 0,9$; 1,0; 1,5 и 2,0) и нормализованного, характеризующегося модулем крупности $M_k \sim 2,0$ –3,25.

Для сравнения изготавливали и испытывали образцы бетона с использованием высококачественного (мытого) крупнозернистого песка с $M_k \sim 3,2$. С целью получения сравнительных результатов во всех случаях использовали равноподвижные бетонные смеси марки П1 (осадка конуса составляла 2–4 см) при прочих равных условиях как при формовании и твердении, так и при испытаниях образцов. Результаты экспериментов частично представлены в виде графических зависимостей (рис. 5а) прочности бетона на сжатие от крупности использованного песка после тепловлажностной обработки (по режиму: предварительная выдержка 2 ч; подъем температуры до 80 °С за 3 ч; изотермическая выдержка 6 ч и остывание в формах более 2 ч, при испытании образцов не позднее 1 сут. от момента их изготовления) и дальнейшего твердения 28 сут. в камере с «нормальными условиями» (рис. 5б).

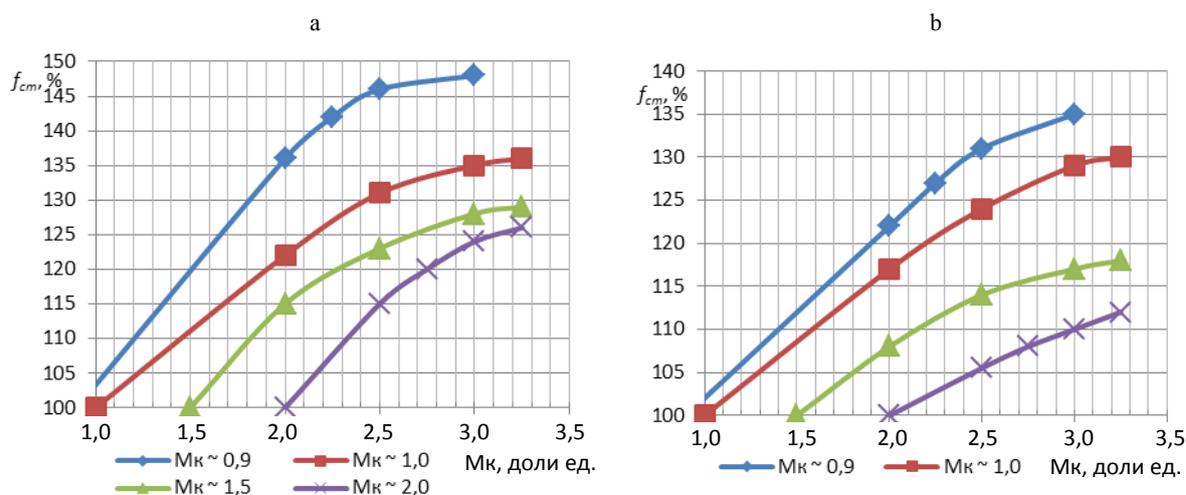


Рис. 5. Прочность бетона на сжатие: а – тенденция изменений относительной прочности после пропаривания бетона на нормализованном мелком заполнителе в зависимости от модуля крупности исходного песка; б – тенденция роста прочности бетона к 28 сут. твердения в нормальных условиях на нормализованном мелком заполнителе в зависимости от исходной крупности песка

Fig. 5. Compressive strength of concrete: a – trend of changes in relative strength after steaming concrete on normalized fine aggregate depending on the particle size modulus of the original sand; b – trend of increasing concrete strength by 28 days of hardening under normal conditions using normalized fine aggregate depending on the initial sand size

Эти данные отражают общую закономерность ее роста во взаимосвязи со степенью обогащения исходного песка, выраженной величиной модуля крупности. При этом наибольший прирост прочности (до 36–48 %) характерен для групп исходного песка тонкого и очень мелкого. С улучшением гранулометрии исходного песка, отраженной повышением модуля крупности до $M_k = 1,5$ и $2,0$, прирост прочности бетона проектного возраста составляет до 30 и 25 % соответственно. Экспериментально подтверждена возможность снижения расхода цемента до 20 %, а для тонких и очень мелких песков – и более при сохранении уровня прочности бетона, обеспечиваемого при использовании исходного, необогащенного мелкого заполнителя.

Прочность на осевое растяжение бетона путем раскалывания образцов (по методике Ахвердова И. Н. – Ицковича С. М [13]), приготовленного на исходном песке с $M_k = 0,9$ и $2,0$, и после его обогащения до $M_k = 2,5$ – $3,25$ возросла соответственно на 30–45 %. При этом усадка мелкозернистого бетона, приготовленного на приведенных вариантах мелкого заполнителя и твердеющего в воздушно-сухих условиях, снизилась в 1,5–2 раза (рис. 6), что предопределяет более высокую степень устойчивости бетона к трещинообразованию на нормализованном мелком заполнителе в процессе как его твердения, так и эксплуатации железобетонных изделий и конструкций.

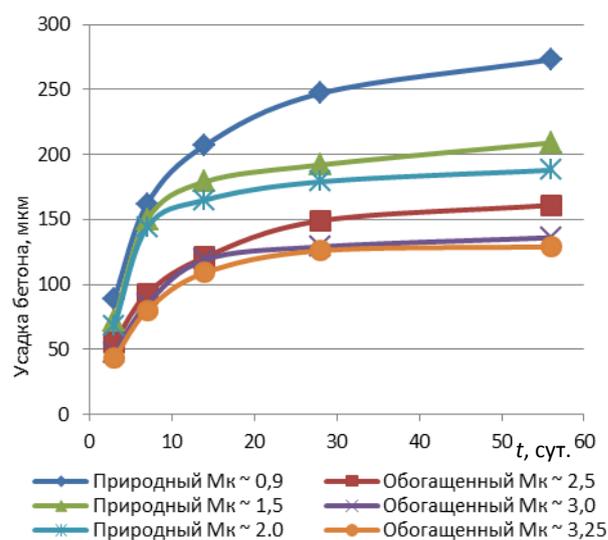


Рис. 6. Влияние технологии обогащения мелкого заполнителя на усадку мелкозернистого бетона

Fig. 6. Influence of fine aggregate enrichment technology on the shrinkage of fine-grained concrete

Деформативность бетона оценили путем испытаний образцов-балочек ($40 \times 40 \times 160$ мм) на изгиб, а его упругие свойства – при сжатии таких же балочек по продольной оси в варианте сравнения при соответствующих испытаниях образцов бетона, приготовленного на исходном природном песке с $M_k \sim 0,9$ и после его обогащения до $M_k \sim 2,5$ (рис. 7а, б).

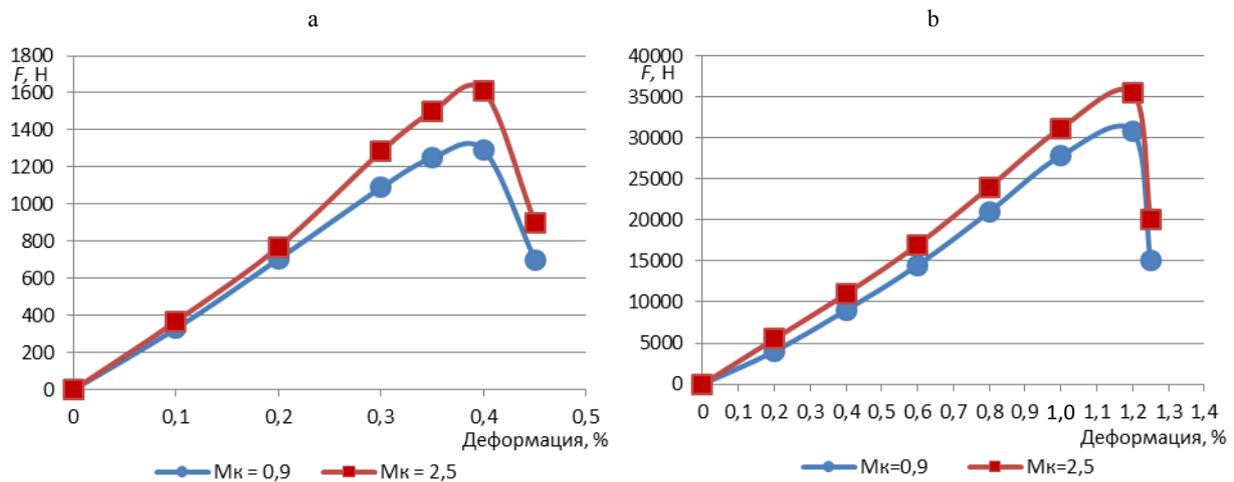


Рис. 7. Деформативность мелкозернистого бетона: а – «нагрузка-деформация» образцов при испытании на изгиб; б – то же при испытании на осевое сжатие

Fig. 7. Deformability of fine-grained concrete: a – “load-strain” of samples during bending tests; b – the same for axial compression testing

По результатам эксперимента можно оценить рост нагрузки: при испытаниях образцов балок на изгиб (деформативность) – на 25 %; при осевом сжатии к началу необратимых пластических деформаций (упругие свойства) – на 15 %. Этот результат логичен, так как повышение качества сцепления (рост сил сцепления) между цементным камнем и поверхностью зерен обогащенного гранитным отсевом мелкого заполнителя в большей мере проявляется при «работе» бетона на растяжение (в данном эксперименте – на растяжение при изгибе).

Эксплуатационные свойства и составы конструкционного тяжелого бетона общестроительного назначения на нормализованном мелком заполнителе

Эксплуатационные свойства бетона, приготовленного на природном мелком заполнителе, определяли в сравнении с бетоном на заполнителе нормализованной гранулометрии после обогащения крупными фракциями гранитного отсева. Исследования проведены на образцах бетона «стандартизированного» состава (по ГОСТ 30459–96 [10]), приготовленных из равноподвижных бетонных смесей при изменяемом соотношении исходного песка $M_k = 1,0$ и обогащающих фракций отсева (табл. 1), а также на составах классов С8/10 – С40/50, что соответствует прочности бетона на сжатие ориентировочно от 13 до 65 МПа, т. е. включает основной диапазон значений прочности бетона,

который в основном применяют в общестроительном производстве, в том числе классы С35/45 и С40/50, относящиеся по действующему на территории Республики Беларусь стандарту СТБ 1544–2005 [14] к высокопрочным.

Таблица 1

Количественное соотношение исходного природного песка и гранитного отсева в составе мелкого заполнителя
Quantitative ratio of the original natural sand and granite screenings in the composition of fine aggregate

Мк, доли ед., применяемого мелкого заполнителя	Содержание, кг	
	Песок	Отсев
1,0	700	–
2,0	492	208
2,5	389	311
3,0	288	412
3,5	185	515

Результаты испытаний, приведенные в табл. 2, свидетельствуют о непосредственной взаимосвязи изменений свойств бетона с качеством мелкого заполнителя при прочих равных условиях. Очевидно, что уменьшение доли природного тонкого (с развитой удельной поверхностью) песка в обогащаемом мелком заполнителе и, как следствие, более рациональное сочетание фракций разных размеров с увеличением доли крупных фракций отсева в обогащенном материале способствует более плотной взаимной укладке зерен заполнителя в бетоне и росту качества (плотности) его структуры.

Эксплуатационные свойства бетона
Performance properties of concrete

Мк, доли ед., применяемого мелкого заполнителя	$W_m, \%$	$W_0, \%$	Марка по водонепроницаемости	Марка по морозостойкости	Стойкость в воде (циклы)	Стойкость в 5%-м растворе NaCl (циклы)
					при циклическом насыщении–высушивании к началу снижения прочности	
1,0	4,55	10,6	W2	150	50	30
2,0	3,40	8,0	W6	200	Более 70	50
2,5	3,25	7,6	W6	300	Более 70	70
3,0	2,60	6,2	W8	300	Более 70	70
3,5	2,45	5,9	W6	400	Более 70	70

Графические зависимости рис. 8 отражают изменение прочности бетона на сжатие при испытаниях на морозостойкость (рис. 8а) и солестойкость (рис. 8б; насыщение в 5%-м растворе NaCl – высушивание). Очевидна общность тенденции изменений прочности бетона, приготовленного с одинаковым расходом цемента при неизменности подвижности бетонной смеси и прочих равных условиях, в процессе испытаний коррозионной стойкости (морозо- и солестойкости) и общий рост этих его характеристик после обогащения (нормализации) исходного песка (мелкозернистого), базирующийся на повышении плотности и непроницаемости бетона, снижении усадочных деформаций (повышении трещиностойкости под действием знакопеременных деформаций), повышении прочности к началу испытаний как

фактора, усиливающего способность бетона к восприятию циклических температурных колебаний и накопления усталостных деформаций, приводящих к трещинообразованию.

Для оценки эффективности разрабатываемой технологии в железобетоне проведены комплексные сравнительные испытания по СТБ 1168–99 [15] характеристики коррозионного состояния стальной арматуры в бетоне на исходном (Мк = 1,0) и обогащенном (с Мк = 2,0 и 3,5) мелком заполнителе в «среде – воде» (направление 1) и в агрессивной среде – 5%-м растворе NaCl (направление 2). На рис. 9 частично приведены анодные поляризационные кривые, отражающие защитную способность бетона по отношению к стальной арматуре (после 10 циклов с 5%-м раствором NaCl).

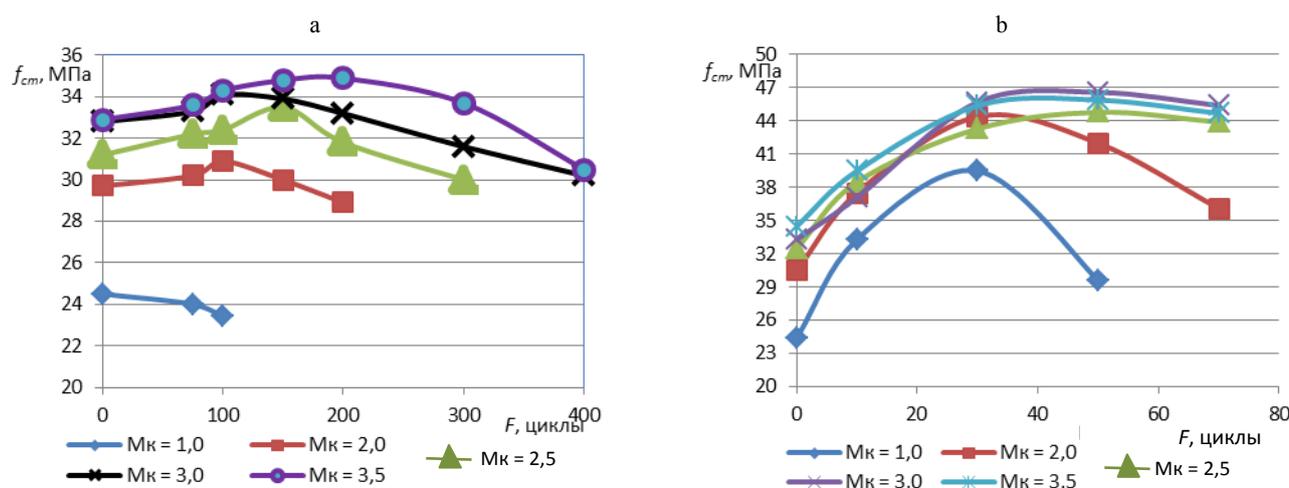


Рис. 8. Результаты циклических испытаний бетона: а – изменение прочности бетона при определении морозостойкости; б – то же в процессе испытаний на солестойкость

Fig. 8. Results of cyclic tests of concrete: а – changes in concrete strength when determining frost resistance; б – the same during salt resistance tests

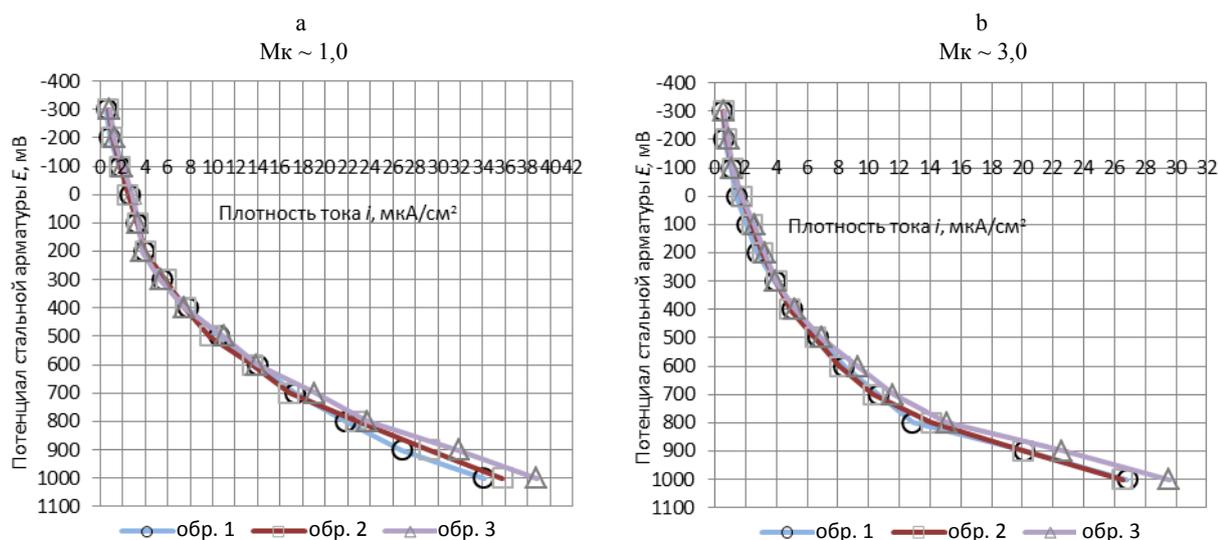


Рис. 9. Результаты ускоренных электрохимических испытаний при воздействии агрессивной среды: а – анодные поляризационные кривые для образцов с $M_k \sim 1,0$; б – то же с $M_k \sim 3,0$

Fig. 9. Results of accelerated electrochemical tests when exposed to aggressive environments: а – anodic polarization curves for samples with $M_k \sim 1.0$; б – the same with $M_k \sim 3.0$

Обобщение полученных результатов циклических испытаний показало, что бетон на обогащенном (нормализованном) мелком заполнителе обеспечивает необходимый уровень защиты по отношению к стальной арматуре (включая преднапрягаемую) при воздействии агрессивной среды (5%-й раствор NaCl); бетон на тонком природном песке с модулем крупности $M_k \leq 1,0$ не в полной мере обеспечивает сохранность стальной арматуры, так как присутствуют признаки ее активизации и возможного развития процесса коррозии, что недопустимо для преднапряженных изделий и конструкций.

Результаты исследований физико-механических характеристик тяжелого бетона классов C8/10 – C40/50, приготовленного на обогащенном до $M_k = 3,0$ мелком заполнителе (от исходного $M_k = 1,0$), частично приведены в табл. 3. На примере сопоставления величин характеристик бетона одного класса C25/30 по прочности на сжатие, но приготовленного на исходном песке с $M_k = 1,0$ и после его обогащения до $M_k = 3,0$, очевиден рост прочности и упругости: E_b , E_g и G_g , несмотря на снижение расхода цемента на 20 % в составе бетона на обогащенном (нормализованном) песке.

Таблица 3

Сравнительные характеристики бетона
Comparative characteristics of concrete

Класс бетона (модуль крупности песка)	Прочность на сжатие в 28 сут., МПа		Модуль упругости бетона, ГПа			Динамический коэффициент Пуассона M_g , доли ед.	Логарифмический декремент затухания δ , доли ед.
	f_{cm}	f_{ck}	статический E_b (ориентировочный)	Динамический E_g	сдвига, G_g		
C25/30* ($M_k = 1,0$)	39,2	31,0	35,6	38,1	15,8	0,206	0,04467
C25/30** ($M_k = 3,0$)	41,5	33,6	37,8	41,2	17,2	0,198	0,03249
C32/40** ($M_k = 3,0$)	52,8	42,2	38,5	42,0	17,6	0,193	0,03167
C40/50** ($M_k = 3,0$)	65,0	53,3	40,9	43,5	18,5	0,176	0,02888

* Бетон на исходном песке с $M_k = 1,0$ при расходе цемента 420 кг/м^3 .
** Бетон на обогащенном песке с $M_k = 3,0$ при расходах цемента: для C25/30 – 350 кг/м^3 , для C32/40 – 400 кг/м^3 , для C40/50 – 550 кг/м^3 .

При этом для бетона на обогащенном (нормализованном) песке существенно снижается логарифмический декремент затухания колебаний (δ), который отражает его предрасположенность к пластическим деформациям под нагрузкой, что взаимосвязано с уменьшением объема «дефектных» зон в структуре бетона на нормализованном заполнителе.

Кроме изложенного, обобщение результатов испытаний образцов тяжелого конструкционного бетона, приведенных в табл. 3, классов в части величин модуля упругости (отметим – приближенных, так как получены по нестандартизированной методике) показывает, что тем не менее они соответствуют (удовлетворяют) требованиям действующих на территории Беларуси СП 5.03.01–2020 ([16], табл. 6.2).

ВЫВОДЫ

1. Разработаны научно-практические основы технологии обогащения (нормализации) гранулометрии мелкого заполнителя (песка) для тяжелого конструкционного бетона на основе рационально подобранной смеси природных мелкозернистых песков и крупных фракций гранитного отсева и применения его с целью повышения качественных характеристик бетона.

2. Экспериментально, путем многолетней выборки проб, обоснованы стабильность гранулометрического состава гранитного отсева на предприятии РУПП «Гранит» и технология его первичной переработки с целью отделения фракций размерами 0,5–5,0 мм путем воздушной сегрегации или ситового отсева, определены свойства этих фракций, необходимые для использования в качестве обогащающей составляющей природных мелкозернистых песков с целью нормализации их гранулометрии.

3. Предложена и экспериментально обоснована методика расчета соотношения массовых долей (количества) природного песка, характеризующегося гранулометрическим составом с модулем крупности $0,9 \leq M_k \leq 2,0$, и крупных фракций переработанного гранитного отсева для изготовления обогащенного мелкого заполнителя с заданной величиной модуля крупности в диапазоне $2,0 \leq M_k \leq 3,5$ для конкретных условий использования бетона; разработа-

на программа Normalization (регистрационный номер 022 от 07.03.2024) для реализации этих расчетов технологическими службами производящих бетон предприятий.

4. Разработана технология нормализации гранулометрического состава мелкозернистых природных песков путем обогащения мелких природных песков, которая осуществляется непосредственно в процессе приготовления бетонных смесей путем отдельного дозирования и введения в бетоносмеситель расчетных массовых долей (количественного соотношения) обогащаемого песка и крупных фракций гранитного отсева и экспериментально обоснована ее эффективность, обусловленная ростом прочности бетона на сжатие до 25–40 %, прочности на осевое растяжение и срез до 35–45 %, снижением раствора- и водоотделения на 30–47 %, а также повышением упругих и деформативных характеристик и эксплуатационных (водонепроницаемости, водо-, соле- и морозостойкости) свойств бетона и защитной способности бетона по отношению к стальной арматуре.

ЛИТЕРАТУРА

- Ахвердов, И. Н. Высокопрочный бетон / И. Н. Ахвердов. М.: Стройиздат, 1961. 106 с.
- Ахвердов, И. Н. Основы физики бетона / И. Н. Ахвердов. М.: Стройиздат, 1981. 404 с.
- Баженов, Ю. М. Технология бетона: учеб. для студ. вузов строит. спец. / Ю. М. Баженов. 3-е изд. М.: Изд-во АСВ, 2003. 500 с.
- Блещик, Н. П. Структурно-механические свойства и реология бетонной смеси и пресс-вакуум бетона / Н. П. Блещик. Минск: Наука и техника, 1977. 230 с.
- Барташевич, А. Я. Исследование структурно-технических свойств бетонной смеси, уплотненной прессованием и вакуумированием: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.05 / А. Я. Барташевич, ИСиА Госстрой БССР. Минск, 1973. 37 с.
- Песок для строительных работ. Технические условия: ГОСТ 8736–2014. Введ. 01.04.2015. М.: Стандартинформ, 2015. 10 с.
- Теоретические и практические основы минимизации содержания цемента в бетоне путем формирования оптимального зернового состава / П. Л. Федорович [и др.] // Вопросы внедрения норм проектирования и стандартов Европейского союза в области строительства: сб. науч.-техн. ст. (материалы науч.-метод. семинара), 29 мая 2012 г. Минск, 2012. Ч. 2. С. 155–165.
- Федорович, П. Л. О технологии обогащения мелкого заполнителя для бетона / П. Л. Федорович, Н. М. Голубев // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. Минск: Изд. центр БГУ, 2016. Вып. 8. С. 290–306.

9. Федорович, П. Л. Эффективность нормализации гранулометрического состава мелкого заполнителя для тяжелого бетона / П. Л. Федорович // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. Минск: Изд. центр БГУ, 2018. Вып. 10. С. 273–288.
10. Добавки для бетонов. Методы определения эффективности: ГОСТ 30459–96. Введ. 01.07.98. Минск: М-во архитектуры и строительства Реп. Беларусь, 1998. 39 с.
11. Смоляков, А. В. Научно-технические основы технологии полного использования гранитного отсева в бетонах / А. В. Смоляков, П. Л. Федорович, Э. И. Батыновский // Строительная наука и техника. 2011. № 6. С. 35–41.
12. Батыновский, Э. И. Обеспечение качества бетона при использовании цемента с гранитным отсевом и обогащении песка его крупными фракциями / Э. И. Батыновский, П. Л. Федорович, А. В. Смоляков // Технологии бетонов. 2014. № 6. С. 37–39.
13. Ахвердов, И. Н. Исследование метода испытания бетона на растяжение посредством раскалывания образцов / И. Н. Ахвердов // Бетон и железобетон. 1961. № 1. С. 19–23.
14. Бетоны конструкционные тяжелые. Общие технические условия. СТБ 1544–2005. Введ. 01.07.2005. Минск: М-во архитектуры и строительства Реп. Беларусь, 2005. 24 с.
15. Методы контроля коррозионного состояния стальной арматуры в бетоне и защитных свойств бетона: СТБ 1168–99. Введ. 01.01.2000. Минск: М-во архитектуры и строительства Реп. Беларусь, 1999. 23 с.
16. Бетонные и железобетонные конструкции. СП 5.03.01–2020. Введ. 16.11.2020. Минск: Минстройархитектуры, 2020. 244 с.
7. Fedorovich P. L., Korsun A. M., Titkov D. L., Grebenek N. O. (2012) Theoretical and Practical Basis for Minimizing the Cement Content in Concrete by Forming an Optimal Grain Composition. *Voprosy Vnedreniya Norm Proektirovaniya i Standartov Evropeiskogo Soyuz v Oblasti Stroitel'stva: Sb. Nauch.-Tekhn. St. (Materialy Nauch.-Metod. Seminara)*, 29 Maya 2012 g. Ch. 2 [Issue of Implementation of Design Norms and Standards of the European Union in the Field of Construction. Collection of Scientific and Technical Articles (Materials of a Scientific and Methodological Seminar), May 29, 2012. Part 2]. Minsk, 155–165 (in Russian).
8. Fedorovich P. L., Golubev N. M. (2016) About the Technology of Enrichment of Fine Aggregate for Concrete. *Problemy Sovremennogo Betona i Zhelezobetona: Sb. Nauch. Tr.* [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete. Collection of Scientific Papers]. Minsk, BSU Publishing Center, Iss. 8, 290–306 (in Russian).
9. Fedorovich P. L. (2018) Efficiency of Normalization of the Granulometric Composition of Fine Aggregate for Heavy Concrete. *Problemy Sovremennogo Betona i Zhelezobetona: Sb. Nauch. Tr.* [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete. Collection of Scientific Papers]. Minsk, BSU Publishing Center, Iss. 10, 273–288 (in Russian).
10. State Standard 30459–96. *Additives for Concrete. Methods for Determining Effectiveness*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction of the Republic of Belarus, 1998. 39 (in Russian).
11. Smolyakov A. V., Fedorovich P. L., Batoryanskiy E. I. (2011) Scientific and Technical Basis of the Technology for the Full Use of Granite Screenings in Concrete. *Stroitel'naya Nauka i Tekhnika* [Construction Science and Technology], (6), 35–41 (in Russian).
12. Batoryanskiy E. I., Fedorovich P. L., Smolyakov A. V. (2014) Ensuring the Quality of Concrete when Using Cement with Granite Screenings and Enriching Sand with its Large Fractions. *Tekhnologii Betonov* [Concrete Technologies], (6), 37–39 (in Russian).
13. Akhverdov I. N. (1961) Study of a Method for Testing Concrete Tensile Strength by Splitting Samples. *Beton i Zhelezobeton = Concrete and Reinforced Concrete*, (1), 19–23 (in Russian).
14. STB 1544–2005. *Heavy Structural Concrete. Technical Specifications*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction of the Republic of Belarus, 2005. 24 (in Russian).
15. STB 1168–99. *Methods for Monitoring the Corrosion State of Steel Reinforcement in Concrete and the Protective Properties of Concrete*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction of the Republic of Belarus, 1999. 23 (in Russian).
16. SP 5.03.01–2020. *Concrete and Reinforced Concrete Structures*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction, 2020. 244 (in Russian).

Поступила 09.04.2024

Подписана к печати 10.06.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. Akhverdov I. N. (1961) *High-Strength Concrete*. Moscow, Stroiizdat Publ. 106 (in Russian).
2. Akhverdov I. N. (1981) *Fundamentals of Concrete Physics*. Moscow, Stroiizdat. 404 (in Russian).
3. Bazhenov Yu. M. (2003) *Technology of Concrete*. 3rd ed. Moscow, Publishing House "ASV". 500 (in Russian).
4. Bleshchik N. P. (1977) *Structural-Mechanical Properties and Rheology of Concrete Mixture and Press-Vacuum of Concrete*. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ. 230 (in Russian).
5. Bartashevich A. Ya. (1973) Study of the Structural and Technical Properties of Concrete Mixture Compacted by Pressing and Vacuuming [Dissertation]. Minsk (in Russian).
6. State Standard 8736–2014. *Sand for Construction Works. Specifications*. Minsk, Standartinform Publ., 2015. 10 p. (in Russian).

Received: 09.04.2024

Accepted: 10.06.2024

Published online: 31.07.2024

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-336-344>

УДК 656.11

Изменение параметров городской транспортной системы при введении платы с владельцев автомобилей за использование улично-дорожной сети и варьировании стоимости проезда в общественном транспорте

Кандидаты тех. наук, доценты Д. А. Захаров¹⁾, Е. М. Чикишев¹⁾,
докт. техн. наук, проф. Д. В. Капский²⁾,
канд. тех. наук, доц. С. В. Скиркоцкий²⁾

¹⁾Тюменский индустриальный университет (Тюмень, Российская Федерация),

²⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. В статье рассматриваются вопросы городской мобильности населения. В последние десятилетия в России и Беларуси наблюдаются активная урбанизация и увеличение доли жителей в крупных городах. Этот процесс сопровождается автомобилизацией. Муниципальные власти внедряют концепцию приоритета общественному транспорту, развивают метро, трамваи и инфраструктуру для велосипедов. Также приведенные исследования отмечают сложность изменения отношения людей к личному транспорту и необходимость развития общественного транспорта. Подтверждается гипотеза о влиянии мер стимулирования и демотивации использования личных автомобилей при передвижении и эффективности проводимых мероприятий, включая организацию платных парковок и сокращение парковочных мест. Разработаны математическая модель влияния стоимости проезда по 1 км автодороги на количество передвижений по видам транспорта и общее время в пути, а также двухфакторная математическая модель влияния стоимости проезда по 1 км автодороги и стоимости проезда в общественном транспорте на долю перемещений по видам транспорта и видам передвижения. Приведен анализ изменения структуры мобильности населения и параметров дорожного движения, рассчитанных с использованием макромодели г. Тюмени, построенной в программе PTV VISUM для утреннего времени суток. При введении платы за проезд по улично-дорожной сети города с тарифом 30 руб. за 1 км доля передвижений на легковых автомобилях снижается с 40 до 16 %. Дальнейшие исследования направлены на учет влияния других социально-экономических и технологических факторов на структуру мобильности населения, а также на разработку методики определения сбалансированных тарифов для городской транспортной системы.

Ключевые слова: транспортное моделирование, макроскопическая модель, структура подвижности населения, пешеходное движение, легковой автомобиль, общественный и велотранспорт, время в пути, коэффициент загрузки

Для цитирования: Изменение параметров городской транспортной системы при введении платы с владельцев автомобилей за использование улично-дорожной сети и варьировании стоимости проезда в общественном транспорте / Д. А. Захаров [и др.] // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 336–344. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-336-344>

Адрес для переписки

Капский Денис Васильевич
Высшая аттестационная комиссия Республики Беларусь
просп. Независимости, 66,
220072, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 368-11-57
d.kapsky@gmail.com; d.kapsky@bntu.by

Address for correspondence

Kapski Denis V.
Higher Attestation Commission of the Republic of Belarus
66, Nezavisimosty Ave.,
220072, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 368-11-57
d.kapsky@gmail.com; d.kapsky@bntu.by

Changing the Parameters of the Urban Transport System with Introduction of Fees from Car Owners for Using the Road Network and Variations in Public Transport Fare

D. A. Zakharov¹, E. M. Chikishev¹, D. V. Kapski², S. V. Skirkovski²

¹Industrial University of Tyumen (Tyumen, Russian Federation),

²Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper discusses issues of urban mobility of the population. In recent decades, Russia and Belarus has seen active urbanization and an increase in the proportion of residents in large cities. This process is accompanied by motorization. The municipal authorities are introducing the concept of priority to public transport, developing metro, trams and bicycle infrastructure. The above studies also note the difficulty of changing people's attitudes towards personal transport and the need to develop public transport. The hypothesis of the impact of measures to stimulate and demotivate the use of personal cars when traveling and the effectiveness of measures, including the organization of paid parking and reduction of parking spaces, is confirmed in the paper. A mathematical model has been developed for the effect of the cost of travel along 1 km of a highway on the number of movements by type of transport and the total travel time. A two-factor mathematical model has been developed for the effect of the cost of travel along 1 km of a highway and the cost of travel in public transport on the share of movements by type of transport and types of movement. The analysis of changes in the structure of population mobility and traffic parameters calculated using the macro model of the city of Tyumen, built in the PTV VISUM program for the morning time of day, is presented. With the introduction of tolls on the city's street and road network with a tariff of 30 rubles per 1 km, the share of movement by passenger cars decreases from 40 to 16 %. Further research is aimed at taking into account the influence of other socio-economic and technological factors on the structure of population mobility, as well as at developing a methodology for determining balanced tariffs for the urban transport system.

Keywords: transport modeling, macroscopic model, structure of population mobility, pedestrian traffic, private car, public and bicycle transport, total travel time, congestion coefficient

For citation: Zakharov D. A., Chikishev E. M., Kapski D. V., Skirkovski S. V. (2024) Changing the Parameters of the Urban Transport System with Introduction of Fees from Car Owners for Using the Road Network and Variations in Public Transport Fare. *Science and Technique*. 23 (4), 336–344. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-336-344> (in Russian)

Введение

В последние десятилетия в России и Беларуси идет активная урбанизация территорий и увеличение доли жителей в городах. Данный процесс сопровождается автомобилизацией городов [1]. Для обеспечения качества транспортного обслуживания жителей городов муниципальные власти взяли курс на реализацию концепции приоритета общественному транспорту [2]: развивается скоростное автобусное сообщение, метро, трамваи, а также инфраструктура для езды на велосипеде. Параллельно в городах реализуются мероприятия по демотивации использования личных автомобилей, в том числе введение платных парковок и уменьшение количества парковочных мест в центральной части городов [3, 4]. С развитием информационных технологий, Интернета вещей (IoT), смартфонов и мобильных приложений началась активная реализация отдельных мероприятий в рамках концепции «Мобильность как услуга» (MaaS) [5]. Однако эти мероприятия не привели

к существенному изменению структуры мобильности населения. По-прежнему в часы пик в городах образуются транспортные заторы, которые влияют на затраты в экономике, потере времени людьми и ухудшение состояния окружающей среды.

В мегаполисах Индии транспортные заторы на дорогах и потеря времени на поездку на личном автомобиле не приводят к отказу от использования личного транспорта [6]. Для сокращения количества поездок на личных автомобилях важно повышать скорость передвижения на общественном транспорте, особенно на дальние расстояния, уровень сервиса и безопасности, а также увеличивать стоимость платных парковок.

В [7] изучалось влияние антропогенной среды на частоту использования общественного транспорта с учетом индивидуальных ценностей и мнения людей. Социологические опросы показали, что общественным транспортом чаще пользуются люди, живущие в районах с высокой плотностью населения, женщины, студенты

и безработные. Владельцы автомобилей реже пользуются общественным транспортом на дальние расстояния и велосипедами на короткие расстояния. Для общественного транспорта важны более низкая стоимость проезда пассажиров по сравнению с автомобилем и более короткое время в пути по сравнению с пешеходным движением или ездой на велосипеде.

Реализация концепции МaaS может повлиять не только на снижение индивидуальных поездок на автомобиле, но и на число передвижений на общественном транспорте за счет увеличения доли совместных поездок и использования автомобилей [8]. Авторы исследования отмечают сложность изменения отношения людей к личному автотранспорту и отказу от их использования, а также необходимость развития общественного транспорта и демотивации автовладельцев.

В [9] была выдвинута и подтверждена гипотеза, что меры стимулирования, связанные с минимизацией затрат и улучшением работы общественного транспорта, оказывают меньший эффект, чем меры демотивации автовладельцев, связанные с более высокими затратами на использование автомобилей. Выявлено, что мера стимулирования приемлема, когда у людей есть возможность сократить использование автомобиля и, следовательно, когда мера стимулирования связана с меньшими личными расходами. Отношение людей к мерам стимулирования различается в разных странах. Одним из способов снижения нагрузки на дорожную сеть является снижение общего пробега автомобилей за счет совместных поездок, когда несколько человек, движущихся в одном направлении, объединяются и едут в одном транспортном средстве [10]. Авторы исследования оценили потенциал совместного использования поездок в гипотетической системе мобильности по запросу, предназначенной для обслуживания всех поездок, совершаемых в режиме реального времени на личном автомобиле в Праге (Чехия). Результаты показывают, что при использовании стратегии совместного использования поездок, гарантирующей увеличение времени в пути не более чем на 10 мин, средняя вместимость транспортного средства увеличится на 2,7 пассажира. Следовательно,

общий пробег частных автомобилей снизится до 60 %.

Платные дороги в городах были введены в некоторых европейских городах более 30 лет назад. Важно изучить отношения населения к этим мероприятиям и тарифам, чтобы сформировать взвешенную политику в этом вопросе. В исследовании [11] был проведен опрос в Осло (Норвегия) за период 1989–1990 гг. и разработана многофакторная модель для выявления причин, определяющих отношение пользователей к дорожным сборам. Результаты показывают, что, хотя большинство пассажиров выступают против системы взимания сборов, разрыв между теми, кто против, и теми, кто выступает за систему взимания платы, со временем сокращается. Авторы приходят к выводу, что для достижения большей приемлемости дорожных сборов как средства финансирования дорожной инфраструктуры необходимы более широкие маркетинговые усилия.

Высокая интенсивность движения приводит к негативным последствиям: потере времени из-за заторов на дорогах, загрязнению воздуха и почвы, шуму, вкладу в изменение климата, вызванному выбросами парниковых газов, износу и повреждению дорог, увеличению риска аварий, дополнительному расходу топлива, снижению качества жизни [12]. Введение платы за проезд на городских дорогах направлено на снижение негативных последствий, поскольку схемы ценообразования варьируются в разных городах. Кроме того, введение платы за проезд приносит доход муниципалитетам. В исследовании [12] сравниваются три основных примера ценообразования на городских дорогах в Европе: Лондоне (Великобритания, функционирует с 2003 г.), Стокгольме (Швеция, работает с 2007 г., после испытательного периода в 2006 г.), Милане (Италия, используется с 2008 г., взимание платы за загрязнение окружающей среды в связи с пробками в 2012-м). С момента введения платных дорог на городских улицах были скорректированы тарифы и области применения. Факторы, определяющие различия в эффективности схем ценообразования, оценены с учетом эластичности спроса на транспорт для разработки мер воздействия на перегруженность дорог и оценки их эффективности.

Тарифы на проезд по городским дорогам влияют на спрос на транспорт и интенсивность движения, что, в свою очередь, влияет на экономические показатели развития территории. А уровень экономического развития влияет на спрос на транспорт и количество поездок на личном автомобиле [13]. Чем выше плотность населения и доля работающих, чем лучше планировка улиц и состояние функционирования общественного транспорта, тем меньше негативного влияния на регион оказывает введение платных дорог. Такие факторы, как небольшое количество рабочих мест и населения, плохая планировка улиц, малое число точек притяжения, будут влиять на величину платы за проезд на дорогах.

В 2020 г. Минтранс России анонсировал, что ведомство рассматривает вопрос введения в городах России бесплатного проезда на общественном транспорте и возможность введения платы за пользование городскими автомобильными дорогами. Информация получила широкий отклик от жителей городов. При этом представители ведомства не приводили никаких прогнозов о возможных изменениях, эффектах и тарифах. Через 1,5 года было объявлено о прекращении изучения данного вопроса. Однако, по мнению некоторых российских экспертов, например М. Я. Блинкина, в долгосрочной перспективе реализация такого подхода в обеспечении транспортного обслуживания населения городов станет возможной и необходимой.

Методы исследования

Целью данного исследования является оценка изменения параметров городской транспортной системы при введении платы с владельцев автомобилей за проезд по городским автомобильным дорогам.

При изучении структуры подвижности населения и учете в макромоделе выбора пользователем способа поездки применяются эмпирические модели и модели, основанные на вероятностном дискретном выборе. Критерием выбора выступает максимальная полезность U_{ik} для пользователя, или минимальные затраты пользователя. Для вычисления вероятности выбора i -м пользователем K -го способа поездки в макромоделе используется мультимодальная логит-модель [14], по которой вычисляется вероятность выбора пользователем способа поездки K

$$P(K) = \frac{e^{U_k}}{\sum_x e^{U_k}}. \quad (1)$$

В основе логит-модели используется логистическая функция вида

$$F(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}. \quad (2)$$

где z – линейная регрессия, $z = a + a_1x_1 + \dots = a_kx_k$.

Важным преимуществом применения в транспортной макромоделе города данного подхода является возможность спрогнозировать спрос на поездки и исследовать его изменение при реализации мероприятий транспортной политики: изменение стоимости или времени поездки за счет развития транспортной инфраструктуры.

Изучение влияния отдельных факторов (технологических, экономических, социально-демографических) на структуру подвижности населения выполняется для существующих городов в действующих транспортных моделях, при этом применяется вложенная логит-модель. Адекватность применяемой логит-модели проверяется на этапе разработки транспортной модели города при валидации и калибровке.

В данном исследовании применяется действующая транспортная модель с логит-моделью, которая имеет вид

$$f(U) = e^{cU}. \quad (3)$$

Объектом исследования является городская транспортная система крупного города, не имеющего внеуличного транспорта на примере г. Тюмени (Россия). Предмет исследования – структура передвижений по городу различными способами и видами транспорта при различных затратах на движение автомобилей по его дорогам.

Гипотеза исследования заключается в том, что зависимость количества и доли перемещений на индивидуальном и общественном транспорте от стоимости проезда по дорожной сети будет описываться экспоненциальным уравнением.

Математическая модель количества передвижений по видам транспорта в общем виде описывается уравнением

$$N_i = ae^{bS}, \quad (4)$$

где N_i – количество передвижений i -м видом транспорта/способом, ед.; S – стоимость проезда по 1 км городской автодороги, руб./1 км, a , b – параметры математической модели, $b < 0$ – для общественного транспорта и общего

количества передвижений, $b > 0$ – для индивидуальных легковых автомобилей.

Вторая гипотеза исследования заключается в том, что введение платы с автовладельцев за использование дорожной сети приводит к уменьшению доли поездок по городу на личном транспорте и увеличению доли поездок на другом транспорте и методе передвижения.

Для проверки гипотезы и определения параметров математической модели (4) проведено имитационное моделирование и создана макроэкономическая модель в программе PTV VISUM. Выбор метода исследования обусловлен тем, что изучить влияние тарифа в реальных условиях невозможно по социальным и технологическим причинам. Для изучения таких сложных и больших систем, как транспортная система города, применяется моделирование, проводится построение модели системы и изучаются ее отдельные свойства [15]. Невозможно постоянно менять стоимость проезда в общественном транспорте, чтобы обеспечить область варьирования данного фактора в заданном диапазоне. Это вызовет путаницу в работе системы городского общественного транспорта, огромное недовольство людей и перевозчиков. Повышение тарифов требует обоснования и расчета финансовым департаментом муниципалитета и утверждения на уровне городской думы. Эксперимент с оценкой подвижности населения и изменение структуры подвижности в зависимости от затрат на проезд по городским автодорогам невозможно провести технически.

Использование макроэкономических транспортных моделей позволяет прогнозировать транспортный спрос и его перераспределение по видам транспорта, а также определять параметры функционирования городской транспортной системы в целом по городу, в каждом узле, участке и по отдельным маршрутам движения. Применение макроэкономического моделирования получило широкое распространение в мире, в том числе в мероприятиях и вариантах развития городских транспортных систем, направленных как на совершенствование транспортного предложения, так и на корректировку транспортного спроса.

Исследование проведено на макроэкономической транспортной модели города, для которой коэффициент корреляции составляет 0,89, а средняя относительная погрешность не превышает 20 %.

Результаты исследования

При моделировании учитывались экономические параметры средней (55 тыс. руб.) и медианной (30 тыс. руб.) заработной платы в месяц в г. Тюмени. Матрица затрат на проезд различными видами транспорта и стоимости владения автомобилями в макроэкономической модели сформирована в ценах 2020 г. Результаты моделирования показывают изменение количества передвижений по видам транспорта и структуры мобильности населения при введении платы с владельцев автомобилей за движение по городским дорогам. При увеличении стоимости проезда количество (рис. 1а) и доля поездок (рис. 1б) на личных автомобилях снижается, а на общественном транспорте, велосипедах, средствах индивидуальной мобильности (СИМ) и пешком – увеличивается.

При повышении тарифа дорожного сбора до 100 рос. руб. за 1 км количество передвижений на легковых автомобилях снижается в 4,33 раза, а количество передвижений на общественном транспорте, велотранспорте и средствах индивидуальной мобильности, пешеходных передвижений увеличивается соответственно в 2; 2,07 и 1,78 раза. Увеличение общего количества перемещений связано с увеличением количества поездок на общественном транспорте с пересадками. При поездке на общественном транспорте с пересадками одна поездка на личном автомобиле заменяется двумя поездками на разных автобусных маршрутах. Общее количество поездок увеличивается на 23,6 %.

Результаты первого этапа исследования показали, что влияние стоимости проезда в общественном транспорте на количество и долю передвижений по видам транспорта и способам передвижений описывается линейной моделью и имеет коэффициент корреляции 0,9. Двухфакторная модель влияния стоимости проезда в общественном транспорте и улично-дорожной сети города на долю проезда по видам транспорта описывается двухфакторной математической моделью на смешанных эффектах

$$\Delta N_i = \Delta N_{io} + aS_{PT} + be^{cS_{priv}} + dS_{PT}e^{cS_{priv}}, \quad (5)$$

где ΔN_i – доля поездок на личном и общественном транспорте на велосипеде и пешком; S_{PT} – стоимость проезда в общественном транспорте, рос. руб.; a , b , c , d – параметры математической модели.

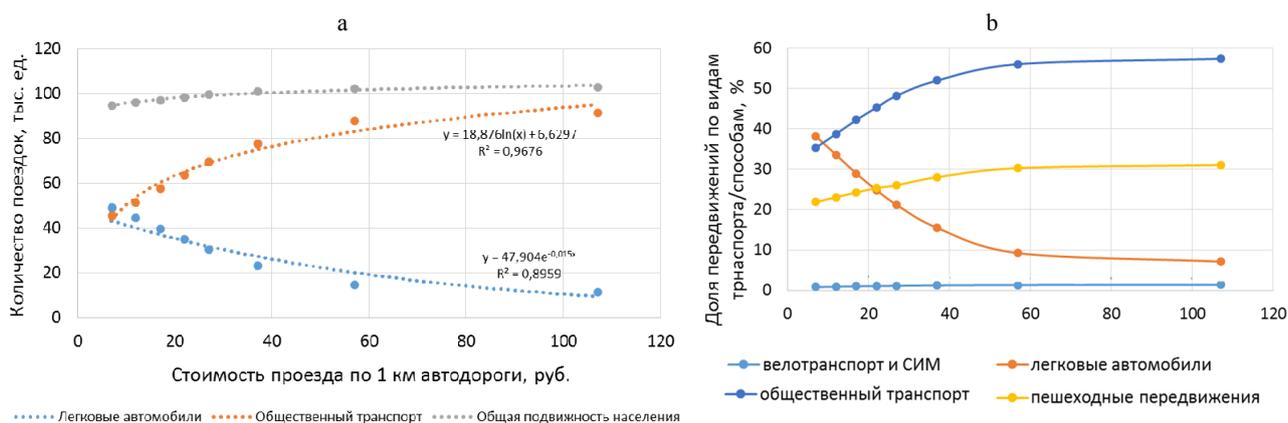


Рис. 1. Влияние стоимости проезда по 1 км дороги на количество поездок и долю поездок на видах транспорта в городах: а – количество поездок; б – доля поездок

Fig. 1. Influence of the cost of travel per 1 km of road on the number of trips and the share of trips by type of transport in cities: а – number of trips; б – share of trips

Графические изображения двухфакторной модели влияния стоимости проезда в общественном транспорте и стоимости проезда

по 1 км автодороги на долю передвижений пешком и по видам транспорта представлены на рис. 2.

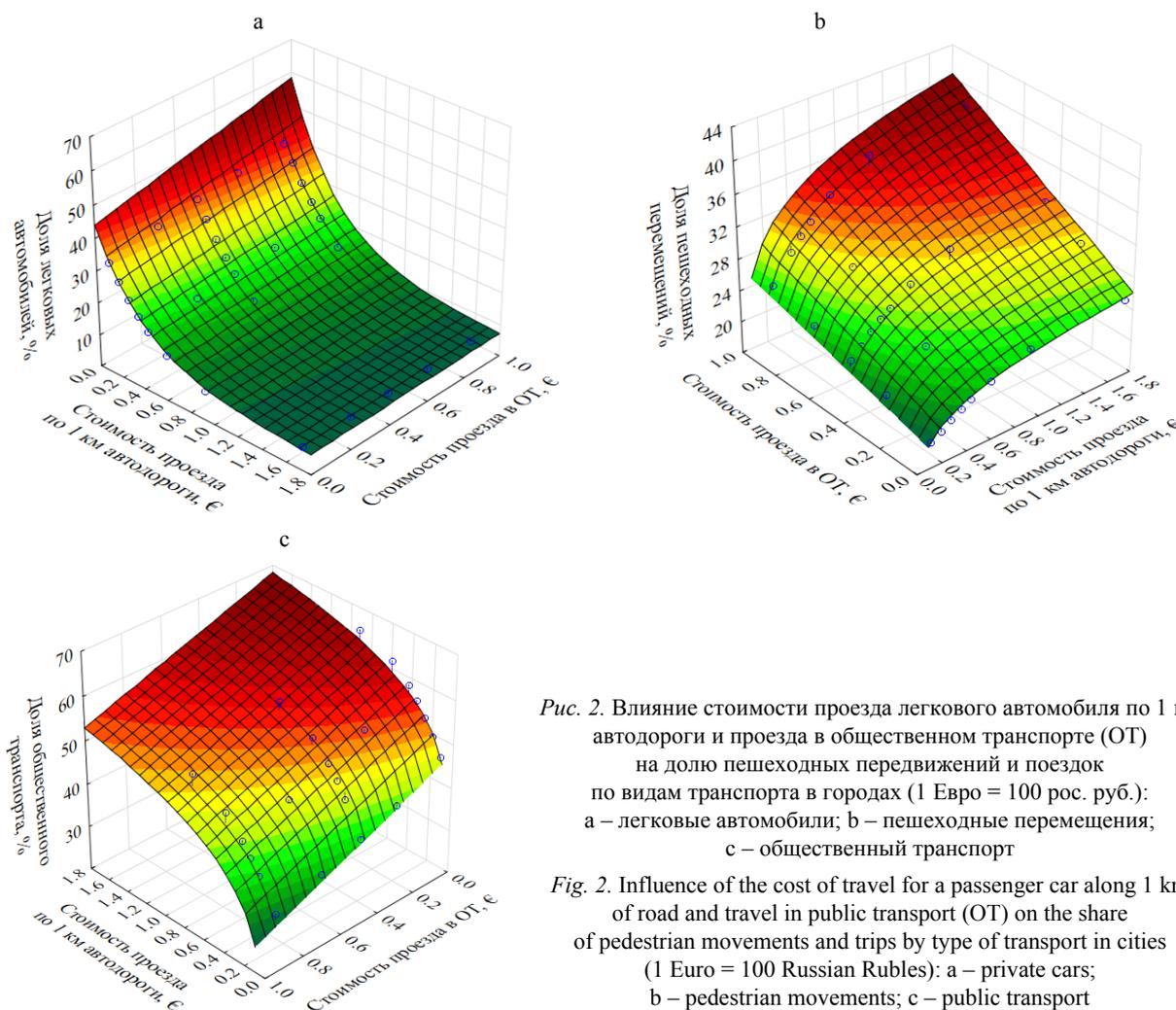


Рис. 2. Влияние стоимости проезда легкового автомобиля по 1 км автодороги и проезда в общественном транспорте (ОТ) на долю пешеходных передвижений и поездок по видам транспорта в городах (1 Евро = 100 рос. руб.): а – легковые автомобили; б – пешеходные передвижения; с – общественный транспорт

Fig. 2. Influence of the cost of travel for a passenger car along 1 km of road and travel in public transport (OT) on the share of pedestrian movements and trips by type of transport in cities (1 Euro = 100 Russian Rubles): а – private cars; б – pedestrian movements; с – public transport

Результаты исследования показали, что модель влияния стоимости проезда в общественном транспорте и стоимости проезда за 1 км по городской дороге на долю видов транспорта и передвижения является адекватной и имеет коэффициент корреляции 0,93.

Вторая гипотеза заключается в том, что уменьшение количества поездок на личном транспорте с введением платных дорог приводит к уменьшению времени в пути за счет снижения уровня загруженности дорог.

Математическая модель влияния стоимости проезда по городским дорогам на общее время проезда автомобилей в общем виде описывается уравнением:

$$T_{priv.car} = ae^{bs}, \quad (6)$$

где $T_{priv.car}$ – суммарное время в пути на легковых автомобилях, ч, S – стоимость проезда по 1 км городской автодороги, рос. руб./1 км, a, b – параметры математической модели.

Результаты моделирования для Тюмени показывают уменьшение времени в пути легковых автомобилей при увеличении стоимости проезда по городским дорогам (рис. 3а). С введением тарифа 10 рос. руб. за 1 км общее время в пути на автомобиле сокращается на 14,8 %. Это значительно больше, чем при введении бесплатного проезда на общественном транспорте. Аналогичному изменению доли поездок на личном автомобиле соответствует введение платных парковок в центральной части города общим количеством 5,5 тыс. мест с тарифом 50 рос. руб. за 1 ч [16].

Для оценки уровня загруженности дорог используется коэффициент загруженности дорог, характеризующий увеличение времени в пути в часы пик по сравнению с аналогичным показателем при движении в межпиковое время и отсутствии пробок на дорогах. Коэффициент перегруженности определяется по формуле

$$K_3 = \frac{t_a}{t_0}, \quad (7)$$

где K_3 – коэффициент затора; t_a – итоговое время в пути всех транспортных средств в час пик, ч; t_0 – итоговое время в пути всех транспортных средств в межпиковое время, ч.

Результаты моделирования показали, что в утренний час пик для Тюмени средний коэффициент заторов составляет 1,24, а при увеличении платы до 100 рос. руб. этот коэффициент снижается до 1,1 (рис. 3б).

Обсуждения

Одним из способов воздействия на структуру мобильности населения является введение платных парковок и повышение тарифов на парковку автомобилей. Разница между влиянием платной парковки и введением платы за проезд по дорожной сети заключается в зонах охвата и влиянии различных факторов. Платные парковки создаются, как правило, в центральной части города для снижения доли трафика на маршрутах движения автомобилей в центр города.

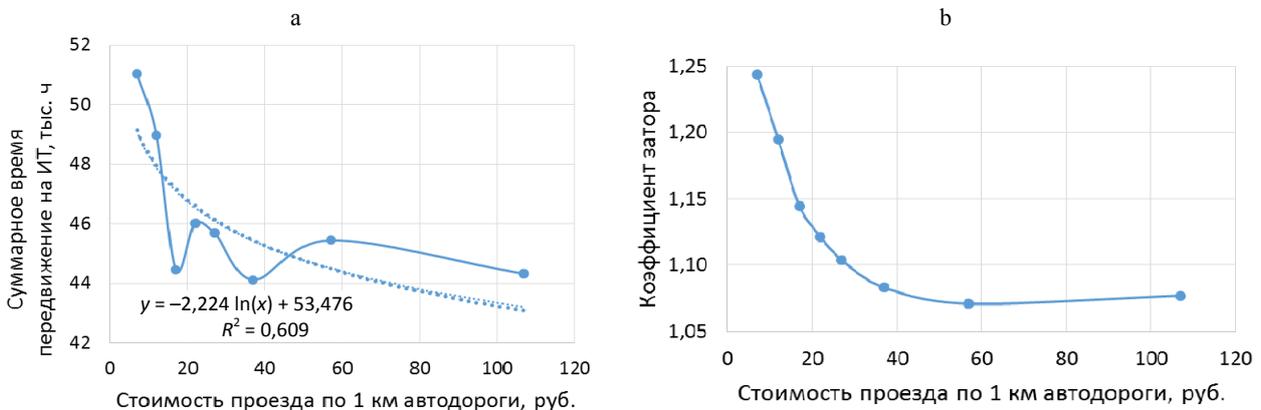


Рис. 3. Влияние стоимости проезда по 1 км автомобильной дороги на общее время в пути на индивидуальном транспорте (ИТ) и коэффициент затора: а – суммарное время передвижения на индивидуальном транспорте; б – коэффициент затора

Fig. 3. Influence of the cost of travel along 1 km of highway on the total travel time by individual transport (ИТ) and congestion factor: а – total travel time by individual transport; б – congestion factor

С введением платных дорог в городах изменение структуры мобильности населения меняется более равномерно по всем районам. В этом случае существенное влияние на транспортный спрос и количество передвижений на автомобилях оказывает длина маршрута.

При расстоянии поездки 3 км стоимость проезда по автомобильным дорогам из расчета 10 рос. руб. за 1 км соответствуют 1,5 ч парковки легкового автомобиля в центре Тюмени при парковочном тарифе 40 рос. руб. за 1 ч. Для автовладельца, использующего личный транспорт для поездок с рабочими целями при относительно небольшом среднесуточном пробеге (7 км), оплата за проезд по автомобильным дорогам выгоднее, чем оплата 9 ч парковки (360 рос. руб. при тарифе 40 рос. руб. за 1 ч) с учетом тарифа за проезд по автодорогам до 50 рос. руб. за 1 км.

ВЫВОДЫ

Проанализировав результаты моделирования, можно сделать ряд выводов и рекомендаций, которые федеральным властям следует принять во внимание при возвращении к обсуждению вопроса введения платы за движение по городским дорогам.

1. Тарифы за пользование автомобильными дорогами, в том числе при совершении агломерационных поездок, оказывают существенное влияние на модель транспортного поведения населения городов.

2. Стоимость проезда в городском общественном транспорте оказывает относительно небольшое влияние на модель транспортного поведения по сравнению со стоимостью владения личным автомобилем, в том числе посредством сдерживания муниципалитетами роста тарифов на общественном транспорте за счет бюджетных дотаций перевозчикам.

3. Тарифы за пользование автомобильными дорогами могут составлять значительную часть от стоимости владения автомобилем, которая, в свою очередь, является важнейшим фактором, влияющим на структуру подвижности населения городов.

4. Возможность влияния органами исполнительной власти всех уровней (федеральной, региональной, муниципальной) на стоимость владения личным автомобилем является механизмом управления транспортным спросом и обеспечения устойчивой мобильности.

5. Целесообразно проведение исследований и изучение с применением социологических исследований и транспортного моделирования

изменения структуры подвижности населения и параметров дорожного движения.

6. Дифференцировать тарифы необходимо с учетом географических, социально-экономических, демографических характеристик городов и уровня развития транспортной и дорожной инфраструктуры.

7. Целесообразно учитывать изменения уровня загрузки и эффективности использования дорожной инфраструктуры, затраты на развитие общественного транспорта.

8. Необходимо разработать модель определения сбалансированного тарифа за проезд по городским автодорогам с учетом экономических, социальных и технологических критериев.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Тюменской области в рамках научного проекта № 20-48-720006 «Модель трансформации городских транспортных систем с учетом влияния на общество и экономику пандемии коронавируса Covid-19».

ЛИТЕРАТУРА

1. Diao, M. Towards Sustainable Urban Transport in Singapore: Policy Instruments and Mobility Trends / M. Diao // *Transport Policy*. 2019. Vol. 81. P. 320–330. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2018.05.005>.
2. Errampalli, M. Development and Evaluation of an Integrated Transportation System: A Case Study of Delhi / M. Errampalli, R. S. Chalumuri, R. Nath // *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Transport*. 2018. Vol. 171, No 2. P. 75–84. <https://doi.org/10.1680/jtran.16.00003>.
3. Van Ommeren, J. N. Empirical Evidence on Cruising for Parking / J. N. Van Ommeren, D. Wentink, P. Rietveld // *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. 2012. Vol. 46, No 1. P. 123–130. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2011.09.011>.
4. Willson, R. W. Parking Subsidies and Travel Choices: Assessing the Evidence / R. W. Willson, D. C. Shoup // *Transportation*. 1990. Vol. 17. P. 141–157. <https://doi.org/10.1007/BF02125333>.
5. Cottrill, C. Leveraging Big Data for the Development of Transport Sustainability Indicators / C. Cottrill, S. Derrible // *Journal of Urban Technology*. 2015. Vol. 22. P. 45–64. <https://doi.org/10.1080/10630732.2014.942094>.
6. Chakrabarti, S. Passively Wait for Gridlock, or Proactively Invest in Service? Strategies to Promote Car-To-Transit Switches Among Aspirational Urbanites in Rapidly Developing contexts / S. Chakrabarti // *Transport Policy*. 2022. Vol. 115. P. 251–261. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2021.11.018>.
7. What Explains Public Transport use? Evidence from seven European Cities / M. Gascon [et al.] // *Transport Policy*. 2020. Vol. 99. P. 362–374. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2020.08.009>.
8. Alyavina, E. Mobility as a Service and Sustainable Travel Behaviour: A thematic Analysis Study / E. Alyavina, A. Nikitas, E. Tchouamou Njoya // *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*. 2020. Vol. 73. P. 362–381. <https://doi.org/10.1016/j.trf.2020.07.004>.
9. When Personal Norms Predict the Acceptability of Push and Pull Car-Reduction Policies: Testing the ABC Model and Low-Cost Hypothesis / M. Keizer [et al.] // *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*.

2019. Vol. 64. P. 412–423. <https://doi.org/10.1016/j.trf.2019.06.005>.
10. The Impact of Ridesharing in Mobility-on-Demand Systems: Simulation Case Study in Prague / D. Fiedler [et al.] // 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2018 November. IEEE, 2018. P. 1173–1178. <https://doi.org/10.1109/ITSC.2018.8569451>.
 11. Odeck, J. On Public Attitudes Toward Implementation of Toll Roads – The Case of Oslo Toll Ring / J. Odeck, S. Bråthen // *Transport Policy*. 1997. Vol. 4, No 2. P. 73–83. [https://doi.org/10.1016/S0967-070X\(97\)00008-5](https://doi.org/10.1016/S0967-070X(97)00008-5).
 12. Croci, E. Urban Road Pricing: a Comparative Study on the Experiences of London, Stockholm and Milan / E. Croci // *Transportation Research Procedia*. 2016. Vol. 14. P. 253–262. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2016.05.062>.
 13. Distinguishing the Land Use Effects of Road Pricing Based on the Urban Form Attributes / S. Zhong [et al.] // *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. 2015. Vol. 74. P. 44–58. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2015.02.009>.
 14. Основы транспортного моделирования: практическое руководство / А. Е. Горев [и др.]. СПб.: КОСТА, 2015. 168 с.
 15. Estimating the Parameters of Traffic Flows on the Basis of Processing of Localization Data on the Movement of Vehicles / D. Kapski [et al.] // *Communications – Scientific Letters of the University of Žilina*. 2019. Vol. 21, No 2. P. 89–99. <https://doi.org/10.26552/com.C.2019.2.89-99>.
 16. Zakharov, D., Fadyushin, A. The Efficiency of Some Activities for the Development of Urban Infrastructure for public transport, cyclists and pedestrians / D. Zakharov, A. Fadyushin // *WIT Transactions on the Built Environment*. 2021. Vol. 204. P. 291–298. <https://doi.org/10.2495/TDI-V5-N2-136-149>.
 6. Chakrabarti S. (2022) Passively Wait for Gridlock, or Proactively Invest in Service? Strategies to Promote Car-to-Transit Switches Among Aspirational Urbanites in Rapidly Developing Contexts. *Transport Policy*, 115, 251–261. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2021.11.018>.
 7. Gascon M., Marquet O., Gràcia-Lavedan E., Ambròs A., Götschi T., deNazelle A., Panis L. I., Gerike R., Brand C., Dons E., Eriksson U., Iacorossi F., Àvila-Palència I., Cole-Hunter T., Nieuwenhuis M. J. (2020) What Explains Public Transport Use? Evidence from Seven European Cities. *Transport Policy*, 99, 362–374. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2020.08.009>.
 8. Alyavina E., Nikitas A., Tchouamou Njoya E. (2020) Mobility as a Service and Sustainable Travel Behaviour: A Thematic Analysis Study. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, 73, 362–381. <https://doi.org/10.1016/j.trf.2020.07.004>.
 9. Keizer M., Sargisson R. J., van Zomeren M., Steg L. (2019) When Personal Norms Predict the Acceptability of Push and Pull Car-Reduction Policies: Testing the ABC Model and Low-Cost Hypothesis. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, 64, 412–423. <https://doi.org/10.1016/j.trf.2019.06.005>.
 10. Fiedler D., Čertický M., Alonso-Mora J., Čáp M. The Impact of Ridesharing in Mobility-on-Demand Systems: Simulation Case Study in Prague. *21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2018 November*. IEEE, 1173–1178. <https://doi.org/10.1109/ITSC.2018.8569451>.
 11. Odeck J., Bråthen S. On Public Attitudes Toward Implementation of Toll Roads – The Case of Oslo Toll Ring. *Transport Policy*, 4 (2), 73–83. [https://doi.org/10.1016/S0967-070X\(97\)00008-5](https://doi.org/10.1016/S0967-070X(97)00008-5).
 12. Croci E. (2016) Urban Road Pricing: a Comparative Study on the Experiences of London, Stockholm and Milan. *Transportation Research Procedia*, 14, 253–262. <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2016.05.062>.
 13. Zhong S., Wang S., Jiang Y., Yu B., Zhang W. (2015) Distinguishing the Land Use Effects of Road Pricing Based on the Urban form Attributes. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 74, 44–58. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2015.02.009>.
 14. Gorev A. E., Bettger K., Prokhorov A. V., Gizatullin R. R. (2015) *Transport Modeling Fundamentals*. Saint-Petersburg, KOSTA Publ. 168 (in Russian).
 15. Kapski D., Kasyanik V., Lobashov O., Kaptsevich O., Galkin A. (2019) Estimating the Parameters of Traffic Flows on the Basis of Processing of Localization Data on the Movement of Vehicles. *Communications – Scientific Letters of the University of Žilina*, 21 (2), 89–99. <https://doi.org/10.26552/com.C.2019.2.89-99>.
 16. Zakharov D., Fadyushin A. (2021) The Efficiency of Some Activities for the Development of Urban Infrastructure for Public Transport, Cyclists and Pedestrians. *WIT Transactions on the Built Environment*, 204, 291–298. <https://doi.org/10.2495/TDI-V5-N2-136-149>.

Поступила 16.04.2024

Подписана к печати 18.06.2024

Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. Diao M. (2019) Towards Sustainable urban Transport in Singapore: Policy Instruments and Mobility Trends. *Transport Policy*, 2019, 81, 320–330. <https://doi.org/10.1016/j.tranpol.2018.05.005>.
2. Errampalli M., Chalumuri R. S., Nath R. (2018) Development and Evaluation of an Integrated Transportation System: A Case Study of Delhi. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Transport*, 171 (2), 75–84. <https://doi.org/10.1680/jtran.16.00003>.
3. Van Ommeren J. N., Wentink D., Rietveld P. (2012) Empirical Evidence on Cruising for Parking. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 46 (1), 123–130. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2011.09.011>.
4. Willson R. W., Shoup D. C. (1990) Parking Subsidies and Travel Choices: Assessing the Evidence. *Transportation*, 17, 141–157. <https://doi.org/10.1007/BF02125333>.
5. Cottrill C., Derrible S. (2015) Leveraging Big data for the Development of Transport Sustainability Indicators. *Journal of Urban Technology*, 22, 45–64. <https://doi.org/10.1080/10630732.2014.942094>.

Received: 16.04.2024

Accepted: 18.06.2024

Published online: 31.07.2024

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-345-354>

УДК 53.087.2

Model for Ensuring the Reliability of Expert Quality Control of Products and Processes

P. S. Serenkov¹⁾, V. M. Romanchack¹⁾, E. A. Davidova¹⁾, A. A. Hurynovich¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Abstract. The reliability of the results of sensory analysis depends on a number of factors that affect the objectivity of the tests carried out. Today, the credibility of subjective measurements is primarily achieved through standardization. However, the issue of the credibility of subjective measurements remains, furthermore, it moves to a new level. Special attention must be paid to subjective measures related to the measurement of sensations to ensure credibility of results. The dynamics of increasing credibility through factor standardization lags behind the dynamics of stakeholder demand for increasing the credibility of subjective measurements. The purpose of the paper is to consider subjective measurements from the point of view of the development of the theory of quantitative measurements and to substantiate a process model for measurement that ensures the meaningfulness of the results in relation to expert assessments that ensure the subjectivity of measurements when conducting sensory tests, the results of which form decisions on compliance or non-compliance. The object of research is expert assessment methods used in sensory measurements, specifically in the evaluation of participating experts. The research methods used in this work include system analysis of measurement theories, method of alternatives, and standardized methods of expert assessment. A model of quantitative measurements is proposed to ensure meaningful measurement results, based on an analysis of the evolution of measurement theories. The problem of ensuring the meaningfulness of subjective measurements is formulated, which manifests itself in the form of risks of making incorrect decisions about characteristics of food products and processes based on expert assessments that lack reliability. An algorithm for quantitative measurements has been defined and tested on a specific example of expert assessment, demonstrating the importance of the identified problem of ensuring the reliability of expert assessments.

Keywords: sensory analysis, assessor, expert assessments, subjective measurement, meaningful measurement results, quantitative measurements theory, measurement scales

For citation: Serenkov P. S., Romanchack V. M., Davidova E. A., Hurynovich A. A. (2024) Model for Ensuring the Reliability of Expert Quality Control of Products and Processes. *Science and Technique*. 23 (4), 345–354. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-345-354>

Модель обеспечения достоверности экспертного контроля качества продукции и процессов

Докт. техн. наук, проф. П. С. Серенков¹⁾, канд. физ.-мат. наук, доц. В. М. Романчак¹⁾, канд. техн. наук Е. А. Давыдова¹⁾, А. А. Гуринович¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Достоверность результатов органолептического анализа зависит от ряда факторов, влияющих на объективность проводимых испытаний. Повышение достоверности субъективных измерений обеспечивается сегодня главным

Адрес для переписки

Серенков Павел Степанович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 331-11-20
pavelserenkov@bntu.by

Address for correspondence

Serenkov P. S.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Тел.: +375 17 331-11-20
pavelserenkov@bntu.by

образом за счет их стандартизации. Однако проблема достоверности субъективных измерений остается, мало того, переходит на новый уровень. Субъективные измерения, связанные с измерением ощущений, требуют особого внимания в контексте достоверности результатов. Динамика повышения достоверности за счет стандартизации факторов отстает от динамики спроса заинтересованных сторон на повышение достоверности субъективных измерений. Цель работы – рассмотреть субъективные измерения с точки зрения развития теории количественных измерений и обосновать модель процесса измерений, обеспечивающую осмысленность результатов в отношении экспертных оценок, обеспечивающих субъективность измерений при проведении органолептических испытаний, по результатам которых формируются решения о соответствии или несоответствии. Объектом исследований являются методы экспертного оценивания, используемые в органолептических измерениях и, в частности, при оценке экспертов, принимающих в них участие. В работе использованы методы исследований: системный анализ теорий измерений, метод альтернатив, стандартизованные методы оценки экспертов. По результатам анализа эволюции развития теорий измерений предложена модель количественных измерений, обеспечивающая осмысленность результатов измерений. Сформулирована проблема обеспечения осмысленности субъективных измерений, проявляющаяся в виде рисков принятия некорректных решений в отношении характеристик пищевой продукции и процессов по результатам экспертного оценивания в силу их недостаточной достоверности. Определен алгоритм количественных измерений, апробированный на конкретном примере экспертного оценивания, демонстрирующий значимость установленной проблемы обеспечения достоверности экспертных оценок.

Ключевые слова: органолептический анализ, испытатель, экспертные оценки, субъективные измерения, осмысленность результатов измерений, теория количественных измерений, шкалы измерений

Для цитирования: Модель обеспечения достоверности экспертного контроля качества продукции и процессов / П. С. Серенков [и др.] // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 4. С. 345–354. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-345-354>

Introduction

Currently, sensory analysis is widely used in the food industry to provide information on the chemical composition and a comprehensive assessment of product quality. Obviously instrumental methods of analysis alone are insufficient for a complete assessment of product quality. This is evidenced by the fact that the chemical composition of the products may be similar, but the sensory characteristics of these products will differ significantly. Therefore, comprehensive product control is usually based on a combination of instrumental and sensory methods. If we take into account the advantages of sensory methods for assessing product quality (availability, speed, cost-effectiveness, proximity to consumer assessment), then it is quite clear that in certain conditions these methods become of paramount importance.

The quality of food products can be assessed using technical measuring instruments or on the basis of the subjective opinion of a competent person, known as an assessor [1].

Sensory assessment may be made by three types of assessors: “sensory assessors”, “selected assessors” or “expert sensory assessors”.

Assessor can be “naive assessor” who do not have to meet any precise criterion of selection or training, or a person who have already taken part in some sensory tests (“initiated assessors”).

“Selected assessor” is an assessor who have been selected and trained for the particular sensory test.

According to GOST ISO 5492 [2] an expert sensory assessor is a sensory assessor with a demonstrated sensory sensitivity and with considerable training and experience in sensory testing, who is able to make consistent and repeatable sensory assessments of various products.

It is common knowledge that the reliability of the results of organoleptic analysis depends on the psychophysical state of the expert, his experience, proficiency in methods of sensory analysis, level of training, sensory abilities, test conditions, etc. [3].

Currently, it is generally accepted that measurement is always the process of experimentally obtaining one or more values of a quantity that can be reasonably assigned to the value. Objective measurement is associated with measurement by technical means, and objective methods are those in which the effects of personal opinion are minimized. Subjective or psychophysical measurements are associated with the measurement of sensations, where a person plays the role of a measuring instrument, and the subjective method is a method based on personal opinions [2].

Therefore, when measuring sensations, it is important to pay special attention to subjective measures in order to ensure the reliability of the results. If the reliability of objective measurements is supported by technical means such as standards,

traceability, comparisons, repeatability, and reproducibility, then the reliability of results for subjective measurements of sensations becomes critical. The determination of criticality depends on the relationship between the reliability of subjective measurements and the risk of making incorrect decisions based on the results of monitoring and testing.

Obviously, the need for reliable subjective measurements is becoming increasingly important as the number of interested parties grows, due to the ever-increasing appearance of new materials, environment systems and substances that require sensory assessment and hedonic tests.

In the last few years there has been an increasing interest in the use of expert methods for the assessment of product quality [4–6], but the issue of the reliability of the measurement results is often overlooked.

It is important to note that strategies to improve the reliability of objective and subjective measures have different emphases. This difference is not only determined by the measurement infrastructure, as mentioned above, but also by the degree of meaningfulness of the results.

A review into current research in the field of sensory analysis has revealed that the main method of improving the reliability of subjective measurements is through standardizing the factors that affect the objectivity of the tests. These include: methods for selecting and training experts, conditions for conducting sensory analysis, implementation of control measures relating to the measurement process, methods for processing and evaluating expert information, validating results, etc. [3, 4].

However, the issue of the credibility of subjective measurements remains, furthermore, it moves to a new level. The dynamic of increasing credibility through factor standardization lags behind the dynamic of stakeholder demand for increasing the credibility of subjective measurements.

The purpose of this paper was to consider subjective measurements from the point of view of the development of the theory of quantitative measurements and to substantiate a process model for measurement that ensures the meaningfulness of the results in relation to expert assessments that ensure the subjectivity of measurements when conducting sensory tests, the results of which form decisions on compliance or non-compliance.

Materials and methods

This study focuses on expert assessment methods used in sensory measurements, in particular, in the evaluation of experts involved in such measurements. The following research methods were used in the work: system analysis of measurement theories, method of alternatives, standardized methods of expert evaluation [4].

In the field of psychophysical measurements, the intuitive and acceptable characteristics of the meaningfulness of measurement results is considered as the adequacy of the numerical form of their representation to the real characteristics of the measurement objects [5].

It is generally accepted that objective measurements work with scales that are “strong” in terms of information (interval, proportional, absolute) [6–8]. They are also known as metric. The adequacy of the numerical form of their representation to the real properties of the measured objects is generally beyond doubt for the measurement results presented in these scales.

Subjective measures mainly use scales considered 'weak' in terms of the information they provide, such as nominal and ordinal scales. There are doubts about the adequacy of the numerical representation of measurement results in these scales to the real properties of the objects being measured [6–9]. Of interest from this perspective is the requirement to present information in a form that allows for a high level of comprehension during perception and use, as well as its dimensional and functional information properties [10].

The lack of a systematic approach to the problem of results credibility is indicated by the different priorities for improving the processes of objective and subjective measurement. This is also evidenced by the wide variety of concepts, theories, methods, and scientific schools [6–8, 11–12]. The basics of measurement have been established in the early measurement theories of Helmholtz, O. Hölder, N. Campbell et al. [13–15]. In the development of theoretical foundations (alt: basics), especially from the perspective of subjective measurement, it is worth mentioning classical theory (G. Fechner et al. [6, 15, 16]), P. Bridgman's theory of operationism [17], representational theory (S. Stevens et al. [6–8, 18–19]).

Within a generalized model of a measurement system, it was S. Stevens who formulated the measurement meaningfulness concept. He believed that a measurement system is defined when its three elements are defined (Fig. 1):

- an empirical system that includes physical objects, sensations, judgments, and the relationships between them, specified axiomatically;
- a numerical system in which logical-mathematical relationships are specified axiomatically;
- function f , which is a homomorphic mapping of an empirical system into a numerical system. This function enables to assess the relationships between tangible objects by analyzing the relationships between their numerical representations.

Essentially, function f – a set of rules that guarantees the accuracy of relationships within both empirical and numerical systems.

According to S. Stevens, it is important to have strict and agreed-upon rules for assigning numbers

to objects for each type of measurement to ensure confidence in the measurements [16, 19]. J. Pfanzagl developed and generalized the representative theory of measurements [6, 20].

The theory of measuring physical quantities is currently undergoing a shift in emphasis towards the processing and transformation of measurement results. This can be seen in the work of A. Kolmogorov and other scientists who have made significant progress in the field of the conversion of measurement information [21, 22].

Consequently, we can distinguish two main directions in the development of measurement theory, each claiming independence. The measurement process has a generalized model that consists of two conditionally independent models (Fig. 2):

- model of empirical measurements of quantities,
- model for converting measurement information.

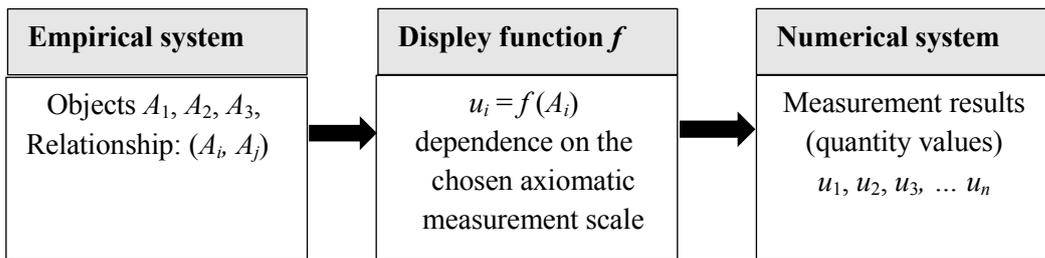


Fig. 1. Model of quantitative measurements as a generalized process of measuring a quantity

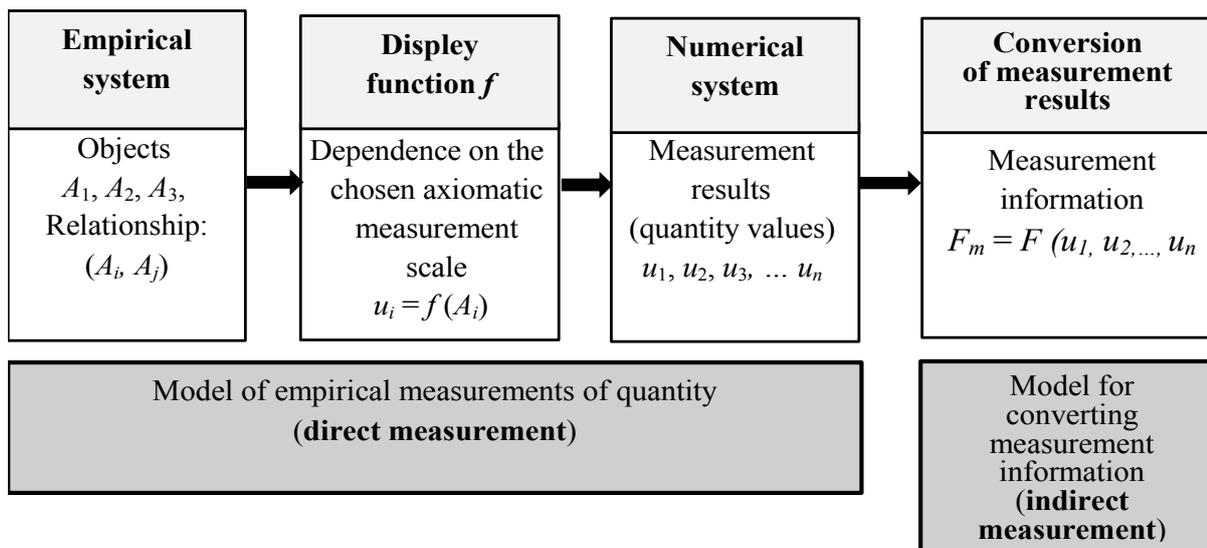


Fig. 2. Generalized model of the measurement process, including two conditionally independent models

The model of empirical measurement of a quantity is related to the model of direct measurement, in which the desired value of a quantity is obtained directly from the measuring instrument (in the case of subjective measurements – an expert). The measurement information transformation model is related to the indirect measurement model: the desired value of a quantity is determined from the results of direct measurements of other quantities functionally related to the desired quantity.

The development of the empirical measurement model faded into the background with the development of measurement information transformation models, which led to a number of issues concerning the credibility and meaningfulness of the results [9–10, 14, 22, 23].

Results and discussion

An analysis of existing measurement theories reveals that they are founded on a generalized model of the process of measuring a quantity (Fig. 1). Furthermore, the theories consider either the process model as a whole or its individual elements.

A structured analysis of the most common measurement theories, in accordance with the logic of Fig. 1, enables the identification of their shared weaknesses.

1. Measurement theories do not define the actual measurement procedure in an empirical system.

2. Measurement theories do not define a strict (natural) link between the empirical and numerical systems, which would enable us to claim that the measurement results are entirely meaningful. The measurement scale serves as the carrier of this connection.

3. Measurement theories do not fully solve the problem of ensuring the meaningfulness of measurements: they lack criteria for determining the adequacy of measured results in an empirical system compared to measured results in a numerical system (measurement scale).

Barzilai's theory of quantitative measurements is based on the relationships between objects, rather than their characteristics [15, 16]. And measurement is the process of assigning numerical values to relationships between objects, rather than to

the objects themselves. Only in this case, according to J. Michel, real numbers are not assigned but naturally generated in the measurement process [24].

These principles are used to determine the correct measurement procedure. To achieve this, we will define an “exclusive group of objects” axiomatically, as proposed by A. Friedman [25], which will enable us to make a specific evaluation. Objects A_1, A_2, \dots, A_n are arranged in ascending order based on their measured values, which change uniformly in magnitude. This means that the empirical comparison of successive pairs of objects produces identical results. Then (we?) assign the value of the quantity u_i to each object A_i . It is assumed that for such objects the successive differences in value are equal to each other:

$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \dots = u_n - u_{n-1}.$$

In this case, the equality is true

$$u_i - u_j = \lambda_1(i - j), \quad (1)$$

where $\lambda_1 > 0$, λ_1 – unknown constant.

Thus, during the process of measurement, real numbers, which represent the values of the quantity, are naturally obtained.

This kind of special assessment, following A. Friedman, we will call it measurement [25]. Thus, a mapping is defined that corresponds naturally to the empirical result of comparing a pair of objects using a numerical value – the difference in values. The measured quantity values are defined with the accuracy of a linear transformation, i.e. in the interval scale.

Let's assign a value v_i to each object A_i , and assume that successive relations of values are equal $v_2 / v_1 = v_3 / v_2 = \dots = v_n / v_{n-1}$.

The result is:

$$\ln(v_i / v_j) = \ln(v_i) - \ln(v_j) = \lambda_2(i - j), \quad (2)$$

where $\lambda_2 > 0$, λ_2 – unknown constant.

Thus, the second method of measurement is defined as mapping the results of an empirical comparison onto a set of results of an algebraic operation.

This mapping naturally matches the empirical result of comparing a pair of objects with a number – the ratio of values or the difference in loga-

rithms of values. The measured quantity values are defined on a scale of logarithmic intervals [16, 25].

From equations (1) and (2), it follows that the values obtained on the interval scale and the logarithmic interval scale are related by the formula

$$(u_i - u_j) = \lambda \ln(v_i / v_j), \quad (3)$$

where $i, j = 1, 2, \dots, n$; u_i and v_i – quantity values, $\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$.

To avoid considering two measurement methods, it is convenient to introduce the concept of rating based on equality (3). Let's denote the left and right sides of equality (3) by the symbol R_{ij} and define two mappings or two measurement models:

$$R_{ij} = \lambda_1(u_i - u_j), \quad (4)$$

$$R_{ij} = \lambda_2 \ln(v_i / v_j), \quad (5)$$

where R_{ij} – rating values, $i, j = 1, 2, \dots, n$; u_i, v_i – quantity values obtained through various empirical measurement methods.

For objects with uniformly changing magnitude values, the rating is determined accurate to a scale constant λ using the formula:

$$R_{ij} = \lambda(i - j), \quad (6)$$

The classical definition of the rating follows from the adjusted model of S. Stevens [19, 20]. The rating is the result of measurements of the relations of the objects of the empirical system. The scale of these measurements can be determined using the rating.

J. Barzilai noted that the lack of agreement on the preference for particular measurement theories is mainly due to scaling errors. Scaling errors turn measurement into an operation that produces meaningless numbers [13, 14].

Identifying measuring scales was already done by S. Stevens in 1946 [19, 20]. However, his concept of scaling contains internal contradictions. This is due to the fact that the correspondence between the empirical and numerical systems (Fig. 1, 2) was determined intuitively without proper justification.

In our opinion, there are two points that prove the correctness of the scaling:

1) the measurement scale should be a natural consequence of the measurement procedure;

2) the empirical and numerical systems of the measurement model must be connected by isomorphism (Fig. 1).

Isomorphism is a mapping of systems that is mutually unambiguous. This means that the empirical system is equivalent to the numerical system. Therefore, the numerical system can be defined as a natural consequence of the empirical system, rather than axiomatically.

Every empirical measurement involves a comparison operation, which produces the result of an algebraic operation, such as the difference or ratio of values. The values themselves are naturally determined on an interval scale if they solve the system of equations (4), and on a logarithmic interval scale if they solve a system of equations (5). Additionally, a ratio scale can be defined as an interval scale that includes a zero element, known as the origin.

The concept of a correct model of quantitative measurements is formed by the strict definition within the empirical system of the measurement procedure as a comparison operation and the natural consequent definition of the scale as the basis of the numerical system. This concept can be considered from unified positions for both subjective and objective measurements (Fig. 3). Here $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ – the objects of measurement, u_i, v_i – respective numerical values of the objects. (A_i, A_j) – the outcome of empirical measurement of the relationships between these objects. The outcome of an empirical measurement is either the difference in values $(u_i - u_j)$, or the ratio of values v_i / v_j , which are transformed into a rating R_{ij} , the value of which does not depend on the measurement method. Based on the rating, the final measurement result U_{ij} is generated in interval scale or logarithmic interval scale, respectively.

The validity of the model is determined, among other things, by the fact that from expressions (4) and (5) the experimental laws of psychophysics by G. Fechner and S. Stevens can theoretically be obtained in the form of paired comparisons, and their equivalence can also be proven [25].

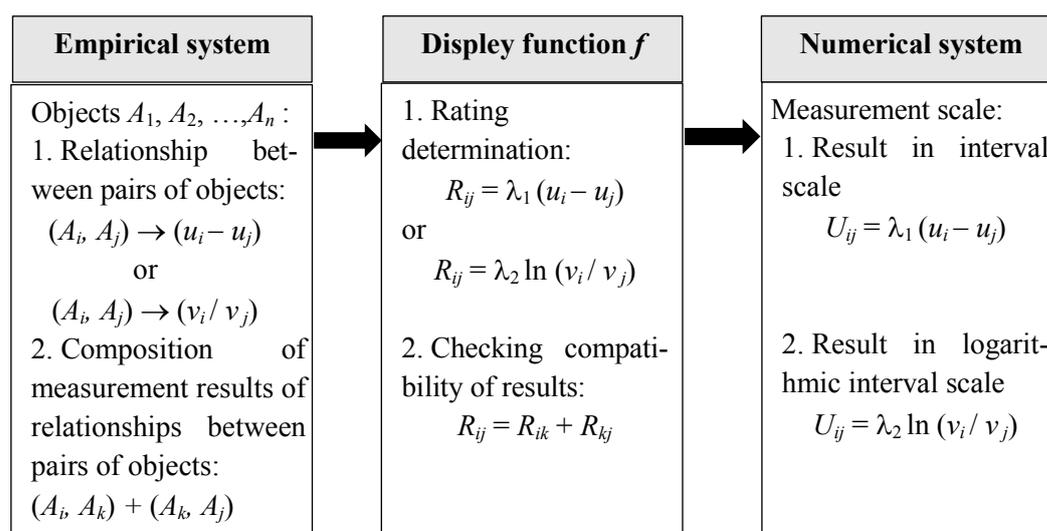


Fig. 3. Concept of a correct model of quantitative measurements

Fig. 3 shows expression $(A_i, A_k) + (A_k, A_j)$, which represents the composition of the results of empirical measurements of relations between pairs of objects. The results indicate the presence of the property of compatibility of results in the measurement model, as shown by the ratings R_{ik} and R_{kj} . The paper [25] demonstrates that rating values meet compatibility conditions in the form of:

$$R_{ij} = R_{ik} + R_{kj}, \quad (7)$$

The compatibility condition (7) in the numerical system can be considered as a criterion of adequacy of the measurement model, i.e. of the measurement results in the empirical system to the measurement results.

In practice, verifying all the compatibility equations (7) for systems of equations (4) or (5) can be a time-consuming task. The method of alternatives [16, 27] can be used to perform a partial verification of the compatibility equations.

For partial models (4) and (5), we have formulated the measurement algorithm as follows:

1. Select the measurement model (4) or (5);
2. Register the results of measurement $(u_i - u_j)$

or (v_i / v_j) ;

3. Calculate the ratings R_{ij} ;
4. Check the compatibility condition (7);
5. Depending on the measurement equation (4) or (5), the values of the measured quantity U_{ij} can be found (Fig. 3).

Let's use an example to demonstrate the proposed quantitative measurement model.

In order to implement the procedure of odour determination in a closed room, the suitability of potential experts and their olfactory ability should be checked in accordance to GOST ISO 16000-30 [27]. The standard regulates olfactory methods and criteria for assessing the ability to identify and distinguish odours from each other, as well as the threshold of odour perception. Appendix B of the standard provides a training methodology for confirming the olfactory ability of a certified expert.

Various methods are used to test a potential expert's olfactory skills. The program for analyzing odour intensity is based on a scale of intensity categories, which is implemented using an olfactometer according to GOST ISO 16000-30 [27].

To "calibrate" the trained sensory assessor, they must be presented with the smell of each intensity at least once. During subsequent analysis, each intensity is presented to tested experts at least twice in random order. The expert should assign each concentration of *n*-butanol to its corresponding intensity value.

The Q_{-} value is used as a criterion to assess the compliance of the certified expert with the requirements. It is calculated using the following formula:

$$Q_{-} \text{ value} = \sum_{k=1}^K \frac{\sum_{i=1}^j (x_{ik} - I_k)^2}{j},$$

where x – individual result of a member of the commission; j – number of circles (one circle

includes the assessment of all concentrations according to table 1); k – number of different concentrations according to table 3; I – intensity level according to GOST ISO 16000-30 [27]. The maximum Q_value for a successful assessment should not exceed 6.

According to the given methodology, an expert certification was carried out, the results of which are shown in the table 1.

Table 1

Expert scores based on the GOST ISO 16000-30 model

The intensity of the odour of <i>n</i> -butanol, measured with an olfactometer according to GOST ISO 16000-30	Expert scores in points		
	Round 1 scores	Round 2 scores	Round 3 scores
0 – no odour detected	0	1	1
1 – very weak	3	2	2
2 – weak	3	3	4
3 – distinct	4	3	4
4 – strong	5	3	5
5 – very strong	5	5	5

The calculated value of the compliance criterion, $Q_value = 6,33$, indicates that the expert did not pass the test.

How reliable is an expert's olfactory ability in producing legally significant results? Upon analysis of the empirical system of the measurement model proposed by GOST ISO 16000-30 [27], as shown in Fig. 3, it can be concluded that it is not clearly expressed. The system's objects, which consist of concentrations of odours from six categories, are clearly defined. Additionally, the relationships between these objects have also been defined. However, during empirical measurements of the expert's olfactory abilities, only identification (recognition) of the objects of the system “level of *n*-butanol odour intensity – score” is performed. It is known that the scores obtained can also be represented on a nominal scale.

The empirical system does not measure relationships between objects. Even if we assume that the expert has created a sequence of odor intensity levels during “calibration”, we can only consider the same assessments on a rank scale. However, it is important to note that nominal and rank scales are not metric scales, and therefore estimates cannot be subjected to mathematical operations. Therefore, it could be argued that the Q_value

criterion, which measures information according to Fig. 2, is not meaningful. This means that the assessment of conformity by the certified expert may not be reliable.

To ensure reliable conformity assessment, it is necessary to modify the empirical system of the measurement model. This can be achieved by adding a procedure for measuring the relations between objects, such as “by how much is one object superior to another?” or “by how many times is one object superior to another?”.

To achieve these goals, in addition to the standard methodology (3 rounds of assessment), it is suggested to conduct three more rounds of empirical measurements following the algorithm outlined in the aforementioned article.

1. *Select the measurement model (5)*. In each round of testing, the expert is presented with two odour samples of different intensity within one measurement. The expert should answer the question “by how many times is one odour sample more intense than the other?”, i.e. it is proposed to apply the measurement model of S. Stevens [19, 20].

Note. In this case, the S. Stevens model was chosen because, in accordance with GOST ISO 16000-30 (Annex B), a number of intensity levels are built by geometric progression, i.e. so that any two adjacent levels differ by a factor of two.

Within each round of tests, comparative measurements of the odour intensity levels of *n*-butanol were arranged according to the plan “each of six concentration levels with one base level (any)”.

Note. Each of the three cycles of comparative measurements can be carried out according to the same plan or according to different plans, e. g. “each of the six concentration levels with the previous intensity level (second with the first, third with the second, etc.)”.

2. *Record the results of ratio measurements (v_i / v_j)*. We choose the base level $j = 3$ and take the value of the *n*-butanol concentration at base level $v_j = 1$ (table 2).

Note. Row evaluations with a zero level are not filled (relational operations with zero are meaningless). A score of 4, for example, in table 2 means that the expert decided that the fifth level is 4 times larger than the third level. A score of 1/3 in table 2 means that the expert decided that the second level is 3 times smaller than the first.

Table 2

Expert scores of the S. Stevens model

The intensity of the odour of <i>n</i> -butanol, measured with an olfactometer according to GOST ISO 16000-30 model	Results of expert's measurements of (v_i/v_j) relation		
	Round 1 scores	Round 2 scores	Round 3 scores
0 – no odour detected	–	–	–
1 – very weak	1/4	1/9	1/4
2 – weak	1/2	1/3	1/4
3 – distinct	1	1	1
4 – strong	4	3	2
5 – very strong	7	5	6

3. We calculate the ratings R_{i3} according to (5) using the adjusted formula:

$$R_{i1} = \ln(v_i / v_1) / \ln(2) + 1, \quad (8)$$

where v_i – unknown values of the sample concentration level, $i = 1-5$.

According to the logic of the proposed measurement model (Fig. 3), on the basis of the rating values we form the final measurement results U_i on the scale of logarithmic intervals, the scale of which corresponds to the scale of point categories and form table 3.

Table 3

Results of measurements of the odour intensity level of *n*-butanol on the scale of logarithmic intervals

Odour intensity level of <i>n</i> -butanol odour measured by olfactometer according to GOST ISO 16000-30 model	Final measurement results U_i		
	Round 1 results	Round 2 results	Round 3 results
0 – no odour detected	0,0	1,0	1,0
1 – very weak	1,0	1,0	1,0
2 – weak	2,0	2,6	1,0
3 – distinct	3,0	4,2	3,0
4 – strong	5,0	5,8	4,0
5 – very strong	5,8	6,5	5,6

Note. Estimates for the zero level row are taken from table 1.

4. We perform a partial test of the jointness equations using the method of alternatives [14, 26]. The criterion for accepting the hypothesis about the consistency of the expert's estimates for each round of tests obtained by different methods was the condition of statistical significance of the correlation coefficients between the estimates according to GOST ISO 16000-30 measurement model [27] and the results of measurements ac-

ording to the S. Stevens model. The correlation coefficients for all three rounds of testing are significant by Student's criterion at the 0.05 significance level, so the hypothesis of consistency of the experts' estimates is accepted.

This fact allows us to calculate the value of the expert compliance criterion $Q_value = 4,0$ based on alternative measurement results. The criterion indicates that the expert has been tested, i.e. meets the requirements.

The conflict arising from subjective measurements cannot be experimentally verified. The only way to verify is through theoretical justification of one or another measurement model. In this example, the authors appear to favour the alternative measurement model as it aligns with the general provisions of classical and modern measurement theories in terms of ensuring result awareness (Fig. 3).

CONCLUSIONS

This text discusses the issue of meaningfulness in measurements, specifically the subjectivity of measurements. It proposes a model of quantitative measurements based on an analysis of the evolution of measurement theories, which ensures the meaningfulness of measurement results. The model is based on two measurement methods. A special parameter, the rating R_{ij} , is associated with the difference or ratio of the sought values of the quantities of at least a pair of objects u_i and u_j , and is empirically measured within these methods. The assumption that both measurement models can be used together to measure the same quantity is justified. And the measurement results will be equivalent in a certain sense. An algorithm for quantitative measurements is formulated, as well as a reflection principle that ensures compliance between the empirical and numerical systems of the model.

The problem of ensuring the meaningfulness of subjective measurements is formulated, which manifests itself in the form of risks of making incorrect decisions regarding the characteristics of food products and processes based on the results of expert assessment due to their lack of reliability.

The analysis of the evolution of measurement theories has revealed a hidden component of the loss of reliability in subjective measurements.

This is due to the fact that existing measurement methods, including standardized ones, do not define the measurement procedure as a comparison operation. An evidence-based quantitative measurement model is proposed. The model ensures the meaningfulness of the results by measuring a special parameter – rating R_{ij} , which associated with the difference or ratio of the desired values of at least a pair of objects u_i and u_j . And the measurement results will be equivalent in a certain sense.

The concept of a correct quantitative measurement model is formed by the strict definition within the framework of the quantitative measurement model of the measurement procedure as a comparison operation and the natural definition of the scale that follows from it as the basis of a numerical system.

A quantitative measurement algorithm has been developed and tested using expert assessment as an example, demonstrating the importance of ensuring the reliability of expert judgement.

REFERENCES

1. State Standard ISO 6658-2016. *Sensory analysis – Methodology – General guidance, IDT*. Moscow, Standartinform Publ., 2016. 20 (in Russian).
2. State Standard ISO 5492-2014. *Sensory Analysis. Vocabulary*. Moscow, Standartinform Publ., 2015. 50 (in Russian).
3. Lovkis Z. V., Morgunova H. M., Shevchenko V. I., Davydova H. A. (2018) Sensory Analysis of Quality of Food Products. Requirements to Assessors. *Food Industry: Science and Technology*, 11 (1), 13–19 (in Russian).
4. State Standard ISO 8586-2015. *Sensory Analysis. General Guidelines for the Selection, Training and Monitoring of Selected Assessors and Expert Sensory Assessors*. Moscow, Standartinform Publ., 2015. 25 (in Russian).
5. Hubbard D. W. (2010) *How to Measure Anything: Finding the Value of Intangibles in Business*. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons. 432. <https://doi.org/10.1002/9781118983836>.
6. Pfanzagl J. (1971) *Theory of Measurement*. New York, John Wiley and Sons. 968. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-41488-0>.
7. Luce R. D., Krumhansl C. L. (1988) Measurement, Scaling, and Psychophysics. Atkinson R. C. (ed.) [et al.]. *Stevens' Handbook of Experimental Psychology*. N.Y., John Wiley & Sons, 3–74.
8. Knorring V. G. (1980) Development of Representative Measurement Theory. *Izmereniya, Kontrol', Avtomatizatsiya: Nauchno-Tekhnicheskii Sbornik Obzorov* [Measurement, Control, Automatization: a Collection of Scientific and Technical Reviews]. Moscow, All-Union Scientific Research Institute of Information and Economics (INFORMPRIBOR), (11–12), 3–10 (in Russian).
9. Tolstova Y. N. (2018) Correlation of Theoretical and Empirical Knowledge when Using Mathematical Methods in Sociological Research. *Sociological Studies*, (12), 39–48. <https://doi.org/10.31857/S013216250003164-3> (in Russian).
10. Gusev A. N, Utochkin I. S. (2011) *Psychological Measurements. Theory. Method*. Moscow, AspektPress Publ. 317 (in Russian).
11. Romanchak V. M. (2018) The Subjective Measurement of Probability. *Informatics*, 15 (2), 74–82 (in Russian).
12. State Standard 43.0.4-2009. *Informational Ensuring of Equipment and Operational Activity. Information in the Technical Activity. General Principles*. Moscow, Standartinform Publ., 2018. 20 (in Russian).
13. Corbetta P. (2003) *Social Research: Theory, Methods and Techniques*. New York, Sage. 336. <https://doi.org/10.4135/9781849209922>.
14. Barzilai J. (2005) Measurement and Preference Function Modelling. *Transactions in Operational Research*, 12 (2), 173–183. <https://doi.org/10.1111/j.1475-3995.2005.00496.x>.
15. Barzilai J. (2010) Preference Function Modelling: The Mathematical Foundations of Decision Theory. Ehrgott M., Figueira J.R., Greco S. (eds). *Trends in Multiple Criteria Decision Analysis*. New York, Springer, 57–86. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5904-1_3.
16. Krantz D. H., Luce R. D., Suppes P, Tversky A. (1971) *Foundation of Measurement. Vol. 1*. New York, Academic Press. 606.
17. Staddon J. E. (1978) Theory of Behavioral Power Functions. *Psychological Review*, 85, 305–320. <https://doi.org/10.1037/0033-295x.85.4.305>.
18. Bridgman P. W. (1951) *The Logic of Modern Physics*. New York, Macmillan Company. 228.
19. Stevens S. (1946) On the theory of Scales Measurement. *Science*, 103 (2684), 677–680. <https://doi.org/10.1126/science.103.2684.677>.
20. Stevens S. (1957) On the Psychophysical Law. *Psychological Review*, 64 (3), 153–181. <https://doi.org/10.1037/h0046162>.
21. Kolmogorov A. N. (2006) Contemporary Debates on the Nature of Mathematics. *Problems of Informational Transmission*, 42, 379–389. <https://doi.org/10.1134/S0032946006040107>.
22. Levin S. F. (2012) Philosophical Problems and Statistical Methods of Fundamental Metrology. *Metafizika = Metaphysics*, (3), 89–118 (in Russian).
23. Shishkin I. F. (2016) Measurements of Non-Physical Quantities. *Journal of Physics: Conference Series*, 772, 1–7. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/772/1/012029>.
24. Michell J. (1997) Quantitative Science and the Definition of Measurement in Psychology. *British Journal of Psychology*, 88 (3), 355–383. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.1997.tb02641.x>.
25. Fridman A. A. (1965) *The World is Like Space and Time*. Moscow, Nauka Publ. 110 (in Russian).
26. Romanchak V. M. (2017) Model of Rating of Non Physical Quantity. *System Analysis and Applied Information Science*, (4), 34–44 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2309-4923-2017-4-39-44>.
27. State Standard ISO 16000-30-2017. *Indoor air. Part 30. Sensory testing of indoor air*. Moscow, Standartinform Publ., 2018. 30 (in Russian).

Received: 03.04.2024

Accepted: 09.06.2024

Published online: 31.07.2024