

НАУКА и ТЕХНИКА

Международный
научно-технический журнал

Издается с января 2002 года
Периодичность издания –
один раз в два месяца

Учредитель
Белорусский
национальный технический
университет



Science and Technique

International
Scientific and Technical Journal

Published from January 2002
Publication frequency –
bimonthly

Founder
Belarusian
National Technical
University

Vol. 21 / No 3 / 2022

Журнал включен в базы данных:
Web of Science (ESCI), EBSCO, DOAJ, WorldCat, OpenAIRE,
Google Scholar, РИНЦ, ЭБС «Лань», НЭБ «КиберЛенинка», Соционет

The Journal is included in the following databases:
Web of Science (ESCI), EBSCO, DOAJ, WorldCat, OpenAIRE,
Google Scholar, RISC, Lan, CyberLeninka, Socionet

СОДЕРЖАНИЕ

Машиностроение и машиноведение

**Gorbunov A. V., Gorbunova V. A., Devoino O. G.,
Petraconi Filho G., Halinouski A. A.**

Evaluation of Evaporative Degradation of Arc Torch
Cathodes in Hydrocarbon-Containing Plasmas
for Spraying, Thermal Protection Testing
and Related Technologies

**(Горбунов А. В., Горбунова В. А., Девойно О. Г.,
Петраconi-фильо Ж., Галиновский А. А.)**

Оценка испарительной деградации катодов
плазмотронов с C_xH_y-содержащими плазмами
для напыления, тестирования теплозащиты
и смежных технологий) 179

Строительство

Босаков С. В.

К уточнению решения о действии
сосредоточенной силы на упругое
четвертьпространство при произвольном
коэффициенте Пуассона 191

CONTENTS

Mechanical Engineering and Engineering Science

**Gorbunov A. V., Gorbunova V. A., Devoino O. G.,
Petraconi Filho G., Halinouski A. A.**

Evaluation of Evaporative Degradation of Arc Torch
Cathodes in Hydrocarbon-Containing Plasmas
for Spraying, Thermal Protection Testing
and Related Technologies 179

Civil and Industrial Engineering

Bosakov S. V.

To Clarify Decision on Action
of Concentrated Force
to Elastic Quarter-Space for Arbitrary
Poisson's Ratio 191

Зиневич С. И., Каюмов А. К.	
Плиты для сборных дорожных покрытий с наименьшим «клавишным» эффектом	196
Моргунов К. П., Колосов М. А.	
Проблемы разжижения грунтов в основаниях гидротехнических сооружений	201
Козунова О. В.	
Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1. Теория расчета	211

Физико-математические науки

Невдах В. В.	
Электромагнитные волны в теории Максвелла	222
Гундина М. А., Юхновская О. В.	
Применение соотношений теории течения для решения задач установившегося роста трещины	229
Мелешко И. Н., Ласый П. Г.	
Об одной вариационной задаче, приводящей к бигармоническому уравнению, и о приближенном решении основной краевой задачи для этого уравнения	236

Экономика промышленности

Ивуть Р. Б., Зиневич А. С.	
Экономические основы развития логистики международных автомобильных перевозок грузов в Республике Беларусь в условиях пандемии коронавируса	242
Салтанова И. В., Седнина М. А.	
Методология прогнозирования обеспеченности кадрами в Комплексном прогнозе научно-технического прогресса и направления ее совершенствования	250
Малайчук О. А.	
Экспертная составляющая как элемент контент-стратегии промышленного предприятия	257

Zinevich S. I., Kayumov A. K.	
Slabs for Prefabricated Road Surfaces with the Least “Keyboard” Effect	196
Morgunov K. P., Kolosov M. A.	
Soil Liquefaction Problems in the Foundations Hydraulic Structures	201
Kozunova O. V.	
Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 1. Calculation Theory.	211

Physical and Mathematical Sciences

Nevdakh V. V.	
Electromagnetic Waves in Maxwell’s Theory	222
Hundzina M. A., Yuhnovskaya O. V.	
Application of Flow Theory Relations for Solving Problems of Steady-State Crack Growth	229
Meleshko I. N., Lasy P. G.	
About One Variational Problem, Leading to a Biharmonic Equation, and about the Approximate Solution of the Main Boundary Value Problem for this Equation	236

Economy in Industry

Ivut R. B., Zinevich A. S.	
Economic Fundamentals for Development of International Road Freight Transportation Logistics in the Republic of Belarus under Coronavirus Pandemic	242
Saltanova I. V., Sednina M. A.	
Methodology for Forecasting Staffing in the Comprehensive Forecast of Scientific and Technological Progress and Directions for its Improvement	250
Malaichuk V. A.	
Expert Component as Element of Content Strategy of Industrial Enterprise	257

Главный редактор
Борис Михайлович Хрусталеv

Редакционная коллегия

- Алексеев Ю. Г.** (*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*), заместитель главного редактора,
- Белый А. В.** (*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*),
- Бисби Л.** (*Эдинбургский университет, Эдинбург, Соединенное Королевство Великобритании и Северной Ирландии*),
- Виттманн Ф. Х.** (*Швейцарская высшая техническая школа Цюриха, Цюрих, Швейцарская Конфедерация*),
- Дидерихс У.** (*Ростокский университет, Росток, Федеративная Республика Германия*),
- Дмитриев С. М.** (*Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация*),
- Згуровский М. З.** (*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, Украина*),
- Кондерс А. Б.** (*Дармштадтский технический университет, Дармштадт, Федеративная Республика Германия*),
- Косёр-Казберук М.** (*Белостокский технический университет, Белосток, Республика Польша*),
- Леонович С. Н.** (*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*), заместитель главного редактора,
- Лю Тингуо** (*компания «Гаоюань», провинция Хэнань, Китайская Народная Республика*),
- Макнами Р. Я.** (*Консультационное агентство по вопросам пожарной безопасности, Стокгольм, Королевство Швеция*),
- Максаров В. В.** (*Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация*),
- Нгуен Тху Нга** (*Научный энергетический институт, Вьетнамская академия наук и технологий, Ханой, Социалистическая Республика Вьетнам*),
- Одиназода Х. О.** (*Таджикский технический университет имени академика М. С. Осими, Душанбе, Республика Таджикистан*),
- Опялак М.** (*Люблинский технический университет, Люблин, Республика Польша*),
- Пенязьков О. Г.** (*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*),

Editor-in-Chief
Boris M. Khroustalev

Editorial Board

- Aliakseyeu Yu. G.** (*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*), Deputy Editor-in-Chief,
- Byeli A. V.** (*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*),
- Bisby L.** (*University of Edinburgh, Edinburgh, United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland*),
- Wittmann F. H.** (*ETH – Swiss Federal Institute of Technology Zürich, Zürich, Swiss Confederation*),
- Diederichs U.** (*University of Rostock, Rostock, Federal Republic of Germany*),
- Dmitriev S. M.** (*Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russian Federation*),
- Zgurovsky M. Z.** (*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine*),
- Koenders A. B.** (*Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Federal Republic of Germany*),
- Kosior-Kozberuk M.** (*Bialystok University of Technology, Bialystok, Republic of Poland*),
- Leonovich S. N.** (*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*), Deputy Editor-in-Chief,
- Liu Tingguo** (*Gaoyuan Company, Henan Province, People’s Republic of China*),
- McNamee R. J.** (*Brandskyddslaget AB, Stockholm, Kingdom of Sweden*),
- Maksarov V. V.** (*Saint-Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russian Federation*),
- Nguyen Thu Nga** (*Institute of Energy Science, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Socialist Republic of Vietnam*),
- Odinazoda H. O.** (*Tajik Technical University named after Academic M. S. Osimi, Dushanbe, Republic of Tajikistan*),
- Opielak M.** (*Lublin University of Technology, Lublin, Republic of Poland*),
- Penyazkov O. G.** (*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*),

Пимьента П. (Научно-технический центр строительной отрасли, Сен-Мартен-д'Эр, Французская Республика),
Родригес Ж. П. К. (Коимбрский университет, Коимбра, Португальская Республика),
Романюк Ф. А. (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь),
Сидерис К. (Фракийский университет имени Демокрита, Комотини, Греческая Республика),
Соболев К. (Университет Висконсин-Милуоки, Милуоки, Соединенные Штаты Америки),
Сумров В. В. (компания «Интернет Коммуникация Девелопмент Групп Лимитед», Рига, Латвийская Республика),
Феличетти Р. (Миланский технический университет, Милан, Итальянская Республика),
Чжао Цзи (Северо-Восточный университет, Шэньян, Китайская Народная Республика),
Чижик С. А. (Национальная академия наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь),
Шелег В. К. (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь), заместитель главного редактора,
Ши Ли И (Научно-технологический парк Шанхайского университета, Шанхай, Китайская Народная Республика),
Эберхардштайнер Й. (Венский технический университет, Вена, Австрийская Республика),
Янковский А. (Технологический институт ВВС, Варшава, Республика Польша)

Ответственный секретарь редакционной коллегии
В. Г. Горбаш

Pimienta P. (Scientific and Technical Centre for the Building – CSTB Department, Saint-Martin-d'Hères, French Republic),
Rodrigues J. P. C. (University of Coimbra, Coimbra, Portuguese Republic),
Romaniuk F. A. (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus),
Sideris K. (Democritus University of Thrace, Komotini, Hellenic Republic),
Sobolev K. (University of Wisconsin-Milwaukee, Milwaukee, United States of America),
Sumrov V. V. (Internet Communication Development Group Ltd – ICD, Riga, Republic of Latvia),
Felicetti R. (Polytechnic University of Milan, Milan, Italian Republic),
Zhao Ji (Northeastern University, Shenyang, People's Republic of China),
Chizhik S. A. (National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus),
Sheleg V. K. (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus), Deputy Editor-in-Chief,
Shi Li Yi (Science and Technology Park of Shanghai University, Shanghai, People's Republic of China),
Eberhardsteiner J. (Vienna University of Technology, Vienna, Republic of Austria),
Jankowski A. (Air Force Institute of Technology, Warsaw, Republic of Poland)

Executive Secretary of Editorial Board
V. G. Gorbash

Ведущий стилистический редактор

В. Н. Гурьянчик

Адрес редакции

Белорусский национальный технический университет
пр. Независимости, 65, корп. 2, комн. 327
220013, г. Минск, Республика Беларусь

Тел. +375 17 320-65-14

E-mail: sat@bntu.by
http://sat.bntu.by

Перерегистрировано в Министерстве информации Республики Беларусь 19 декабря 2011 г.
Регистрационный номер 285

С 2002 г. издание выходило под названием «Вестник БНТУ»

ISSN 2227-1031. Подписные индексы 00662, 006622

Подписано в печать 31.05.2022. Формат бумаги 60×84 1/8. Бумага мелованная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 11,25. Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Дата выхода в свет . Заказ № .

Отпечатано в БНТУ. Лицензия ЛП № 02330/74 от 03.03.2014.
220013, г. Минск, пр. Независимости, 65.

© Белорусский национальный технический университет, 2022

Leading Style Editor

V. N. Guryanchyk

Address

Belarusian National Technical University
Nezavisimosty Avenue, 65, Building 2, Room 327
220013, Minsk, Republic of Belarus

Tel. +375 17 320-65-14

E-mail: sat@bntu.by
http://sat.bntu.by

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-179-190>

UDC 621.793:621.365:544.3

Evaluation of Evaporative Degradation of Arc Torch Cathodes in Hydrocarbon-Containing Plasmas for Spraying, Thermal Protection Testing and Related Technologies

A. V. Gorbunov¹, V. A. Gorbunova², O. G. Devoino², G. Petraconi Filho¹, A. A. Halinowski³

¹Aeronautics Institute of Technology (Sao Jose dos Campos, Brazil),

²Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus),

³Institute of Atmospheric Physics of CAS (Prague, Czech Republic)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Abstract. Design of non-transferred DC electric arc plasma torches (EAPTs) operated with plasma gases containing alkane hydrocarbons, as a promising type of heaters for a number of technologies (thermal spraying, surface hardening, testing of thermal protection systems, etc.), requires taking into account the evaporation rate of surface cathode material (as one of the channels of its ablative degradation). For this procedure, as the first stage, thermodynamic methods can be used to simulate the composition and properties of reactive C–H–O–N–Ar–Me-systems with variable set of such input parameters as the ratio of components of plasma-forming mixture, its pressure and temperature. We theoretically estimated the evaporative degradation of the material for three variants of EAPT cathode with alkane-containing plasmas (“hot” thermochemical zirconium and thermionic tungsten, and “cold” copper) in equilibrium and quasi-equilibrium modes of “plasma gas + surface cathode material”-mixture, with use of generalized thermodynamic properties of the materials. The calculation for conditions with pressure, which is characteristic for EAPT discharge chamber, showed that when varying the initial composition of the plasma-forming mixture (from oxidizers (air or combustion products of alkanes) to reducing gases based on the products of combined partial oxidation and pyrolysis of alkanes), the effect of a difference in the cathode evaporation rate *EAI* was observed in systems based on (air + alkane)-mixtures near the melting point of surface cathode substances, in a comparison with the case of EAPTs with more conventional gases (commercial N₂, air) and, importantly, for two variants of the analyzed cathodes (with the exception of copper). In addition, the electrode erosion value was compared for simulated zirconium cathode (in terms of erosion evaporative component) when operating on the combustion products of alkanes from “air + CH₄”-mixture, and for some known EAPTs with similar cathodes in other gases. Using the case of earlier tested DC plasma torch with rod Zr-cathode (with microheterogeneous surface) as an example, it was found that our calculation indicates non-monotonic dynamics of *EAI* value and fractions of Zr-containing vapors as a result of the change of the fuel-air equivalence ratio ϕ of initial reactive mixture. This effect is inconsistent with measured cathode composition, which shows a probability of nonequilibrium character of thermal and diffusion processes in near-electrode plasma and surface layer (~1 mm) of the electrode, at least in the modes with arc current in the torch near 300 A. Besides this, it should be noted that obtained modeling data on the behavior of zirconium compounds (ZrO₂, ZrC) in C–H–O–N–Ar–Zr-system can be used not only for improvement of the torch cathodes, but also for design of new Zr-containing thermal protection systems to predict preliminary their ablation rate in a flow of products of combustion (including incomplete one) of engine-, rocket- and other fuels. Similarly, the results on the copper compounds behavior near the metal evaporation temperature can be useful for optimizing the process of plasma spraying of copper alloy coatings.

Keywords: electric arc torches, plasma spraying, testing of thermal protection systems, cathode materials, zirconium, tungsten, copper, evaporation, alkane-containing plasmas, thermochemical analysis

For citation: Gorbunov A. V., Gorbunova V. A., Devoino O. G., Petraconi Filho G., Halinowski A. A. (2022) Evaluation of Evaporative Degradation of Arc Torch Cathodes in Hydrocarbon-Containing Plasmas for Spraying, Thermal Protection Testing and Related Technologies. *Science and Technique*. 21 (3), 179–190. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-179-190>

Адрес для переписки

Горбунова Вера Алексеевна
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 67,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-92-71
ecology@bntu.by

Address for correspondence

Gorbunova Vera A.
Belarusian National Technical University
67, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-92-71
ecology@bntu.by

Оценка испарительной деградации катодов плазмотронов с C_xH_y -содержащими плазмами для напыления, тестирования теплозащиты и смежных технологий

Канд. техн. наук А. В. Горбунов¹, канд. хим. наук, доц. В. А. Горбунова²,
докт. техн. наук, проф. О. Г. Девойно²,
докт. филос. (PhD), проф. Ж. Петракони-фильо¹,
канд. техн. наук А. А. Галиновский³

¹Технологический институт аэронавтики (Сан-Жозе-дус-Кампус, Бразилия),

²Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь),

³Институт физики атмосферы Академии наук Чешской Республики (Прага, Чешская Республика)

Реферат. Разработка электродуговых плазмотронов (ЭДП) на плазмообразующих газах с алкановыми углеводородами (АУВ) как перспективной разновидности плазмотронов косвенного действия для ряда технологий (в том числе напыления покрытий, тестирования теплозащитных материалов и др.) требует учета скорости испарения материала катодов (как одного из каналов их абляционной деградации). Для этой процедуры в качестве первой стадии может быть использовано моделирование состава и свойств реагирующей системы типа C–H–O–N–Ar–Me термодинамическим методом при варьируемых входных параметрах – соотношении компонентов в плазмообразующей смеси, ее давлении и температуре. Авторы теоретически оценивали испарительную деградацию материалов в трех вариантах катода ЭДП с АУВ-содержащими плазмами («холодный» из меди и тугоплавкие «горячие» – термохимический из циркония и термоэмиссионный из вольфрама) в квазиравновесном и равновесном режимах смеси «плазмообразователь + материал поверхности катода» с учетом обобщенных данных по фазовым переходам в данных материалах. Расчет для условий с характерным для разрядной камеры ЭДП давлением показал, что изменение состава плазмы (от окислителя (смесь продуктов сгорания АУВ) до восстановителя из продуктов комбинации частичного окисления и пиролиза АУВ) дает явный эффект отличия интенсивности испарения катода EAI вблизи точки плавления вещества его поверхности в воздушно-алкановых средах по сравнению с вариантом ЭДП на более простых газах (техническом N_2 , воздухе), причем для двух вариантов катода (за исключением меди). Сопоставлен уровень эрозии (рассчитанный по испарительной составляющей) циркониевого катода в среде продуктов сгорания АУВ (из смеси «воздух + CH_4 ») и этот же параметр, но в опытах с известными ЭДП со сходными катодами в других газах. На примере ранее изученного ЭДП со стержневым катодом из Zr с гетерогенной поверхностью показано, что термохимический расчет дает немонокотонное изменение параметра EAI и концентраций Zr-содержащих паров при сдвиге фактора эквивалентности ϕ плазмообразующей смеси. Такой эффект не согласуется с найденным в эксперименте составом катода, что указывает на вероятность неравновесного характера тепловых процессов и диффузии в приэлектродной плазме и в поверхностном слое (~1 мм) катода, по крайней мере, в режимах с силой постоянного тока в дуге ЭДП около 300 А. Полученные в расчете данные о поведении соединений ZrO_2 и ZrC в системе C–H–O–N–Ar–Zr можно применять не только для оптимизации катодов плазмотронов, но и в разработке новых Zr-содержащих керамических теплозащитных систем, в том числе для прогноза темпа их разрушения в потоках продуктов сгорания (в том числе неполного) моторных, ракетных и иных топлив. Сходным образом результаты по поведению меди вблизи температуры ее испарения могут быть полезны для совершенствования процессов газотермического напыления покрытий из сплавов меди.

Ключевые слова: дуговые плазмотроны, плазменное напыление, тестирование теплозащитных материалов, катодные материалы, цирконий, вольфрам, медь, испарение, углеводородсодержащие плазмы, термохимический расчет

Для цитирования: Оценка испарительной деградации катодов плазмотронов с C_xH_y -содержащими плазмами для напыления, тестирования теплозащиты и смежных технологий / А. В. Горбунов [и др.] // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 179–190. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-179-190>

Introduction

The field of application of thermal plasma heaters, in particular the most efficient and industrially commonest type of them – DC electric arc plasma torches (EAPTs) operating at atmospheric pressure (i. e. under conditions close to thermodynamic equilibrium) – is quite wide and includes

surface engineering, thermal protection testing, plasma chemical synthesis and processing of inorganic and organic powder materials and chemical products, pyrolysis, gasification and decomposition of industrial and municipal wastes, plasma-fuel technologies, etc. [1–3]. One of the promising variants of such torches is a group that uses not individual plasma-forming gases, but

oxidizer-fuel mixtures, in particular, based on air with natural or liquefied petroleum gases (mainly contain alkanes C_nH_{2n+2}) [3–7].

The previously demonstrated areas for engineering application of the torches with plasmas based on hydrocarbons and combined plasma-fuel systems of atmospheric pressure with near-equilibrium plasmas are the following:

1) plasma spraying (APS) of ceramic and some metal coatings, including RPS, operating with powder and other feedstock [3–6];

2) hardening of steels and alloys surface by the plasma jets similar to the standard case-hardening type [7].

It is also quite obvious that the use of this type of thermal plasma heaters and combined equipment based on these is also possible in the following areas:

a) coating deposition in the hybrid plasma-fuel spraying systems with powder or wire materials by analogy with the approach of the authors [8, 9];

b) testing of ablative destruction of ceramic and composite thermal protection materials/systems (for aerospace, gas turbine and rocket technologies) under the temperature and dynamic action of plasma jets, by analogy with performed plasma and flame tests of such materials [10–13];

c) in the units for thermal vitrification of ash silicate (including dispersed) wastes [14];

d) in thermal apparatuses/furnaces of power engineering sector to suppress the formation of NO_x during the oxidation of gaseous and other fuels, as, for example, in the research [15];

e) in technology of surface melting of ceramic and other coatings and pressurized products, by analogy with the laser or plasma approach [16].

Non-transferred arc DC plasma torches suitable for use in these technologies can be efficiently operated with plasma gases containing of alkane hydrocarbons (AHCs), including natural gas or liquefied petroleum gas [3–7]. Herewith during their development, it is required as one of the most important parts to take into account the rate of vaporization of the material of their cathode (typically metal), as one of the main channels of its degradation during the temperature and dynamic induced ablation in plasma flows [1–3, 17, 18]. For these torches the intensity of electrode erosion

is quite important, especially for cathodes, because it directly determines the electrode lifetime. For this analysis procedure the modeling of the atomic and molecular composition and thermophysical properties of reactive system of the C–H–O–N–Ar–Me-type can be used, as the first stage, with conventional thermodynamic methods. Wherein it is advisable to consider theoretically the character of evaporative decomposition of the material with the comparing such three typical variants of cathode of the torches with AHC-containing plasmas as “cold” copper and refractory “hot” thermionic tungsten and thermochemical zirconium. For non-transferred arc DC plasma torches the intensity of electrode erosion is quite important, together with other parameters, especially for cathodes, because it directly determines the electrode lifetime. Under such analysis, the output parameters of a chemically reactive system are usually obtained at a varied level of input parameters, such as the ratio of initial components in the plasma-forming mixture, its pressure and mass averaged temperature in the thermodynamic equilibrium or quasi-equilibrium regimes [3, 15, 19, 20].

Modeling approach

The variant of thermodynamic calculation method was used, which is based on finding the maximum of entropy of reactive system (i. e. minimization of the Gibbs free energy/thermodynamic potential) in the considered equilibrium or quasi-equilibrium systems, at specified pressure and temperature at the inlet, using such code for chemical thermodynamic analysis as TERRA, which was developed in MSTU, Moscow [19].

Schematic diagrams of the examples of DC EAPTs with the considered type of refractory metal cathodes for thermal spray systems and related technologies [17, 18, 21] are shown in Fig. 1. Typical operating pressure p in gas discharge chambers of the torches of this type is near 0.2 MPa [3, 22]. Herewith the typical difference of the composition in many analyzed equilibrium systems of the C–H–O–N–Ar–Zr-type when their pressure is changing in the range near the value of 0.2 MPa was found to be quite small (Fig. 2).

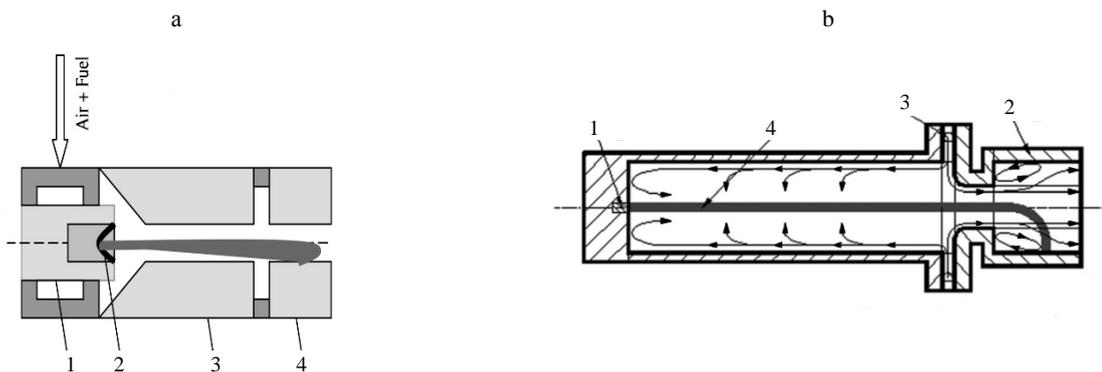


Fig. 1. Schematics of some DC non transferred arc plasma torches with metal cathodes for thermal spraying, surface hardening and other technologies: a – experimental plasma torch with thermo-chemical cathode [17, 18]: 1 – cathode; 2 – button-type insertion (Zr rod) of the cathode; 3 – electrically neutral diaphragm; 4 – anode; b – pilot-scale plasma torch with reverse gas vortex and thermo-chemical cathode [21]: 1 – button-type insertion of the cathode (Zr or Hf); 2 – anode; 3 – gas vortex chamber; 4 – electric arc column

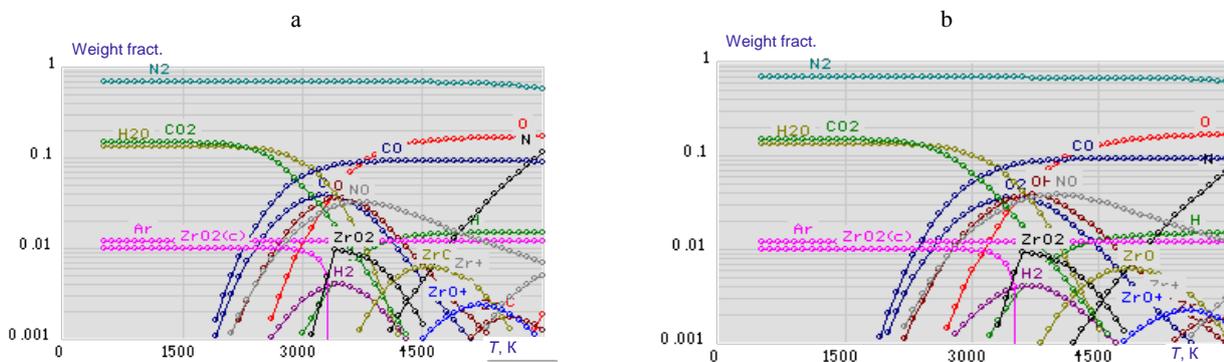


Fig. 2. Calculated composition (in weight fractions) of equilibrium C–H–O–N–Ar–Zr-system, based on the “air + CH₄”-mixture, at the temperature range $T = 500\text{--}6000\text{ K}$ at the ratio of mass rates of initial Me-containing part (taken as dioxide ZrO₂) to initial “air + CH₄”-part as 1 to 100 at the value of fuel to air equivalence ratio $\phi = 1.0$ (i. e. stoichiometric combustion regime) at pressure p : a – 0.101 MPa; b – 0.303 MPa

Results of the modeling

For analysis of degradation of the cathodes of the AHC-operated torches, as the first approach, it is advisable to consider the rate of evaporation of the material of their surface layer with thermodynamic approximation as a set of isothermal sections for initial plasma-forming mixture with its variable composition on the hydrocarbon (C_xH_y) fraction. For three main variants of the torch cathodes the character of the evaporative component of the degradation of their surface material was theoretically considered in the regimes of thermodynamic equilibrium and quasi-equilibrium for “plasma gas + cathode material”-system.

The calculations (Fig. 3–9, Tab. 1–4) showed that when varying the initial composition of the

plasma-forming mixture (in the range from oxidizing gases (air or alkane combustion products) to reducing gases formed by the products of simultaneous partial oxidation (POX) and pyrolysis of alkanes (CH₄, LPG, etc.)), the effect manifested itself at the temperatures near the melting point of cathode surface. This indicates the difference in the values of cathode mass losses (i. e. evaporative ablation intensity *EAI*) in the systems based on “air + alkane”-mixtures in a comparison with “background” case of more simple plasma gases (air or N₂ of technical quality) for two (Zr and W) of the three variants of the cathodes. This shows the advisability of taking this factor into account in the further development of the torches using this group of reactive plasma gases.

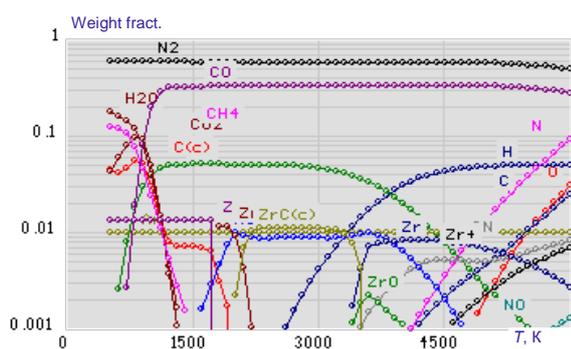


Fig. 3. Composition (in weight fractions) of equilibrium C-H-O-N-Ar-Zr-system, based on the “air + CH₄”-mixture with fuel to air equivalence ratio $\phi = 4.39$ (Tab. 3), at the range $T = 500\text{--}6000$ K (at $p = 0.202$ MPa) at the ratio of mass rates of initial Me-containing part (taken as metal Zr) to initial gaseous part as 1 to 100; this regime is the bound one to appear the condensed zirconium carbide state in the system

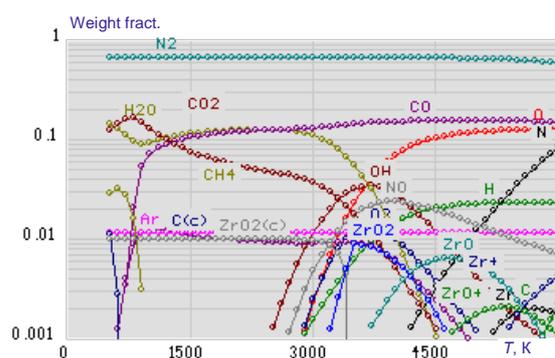
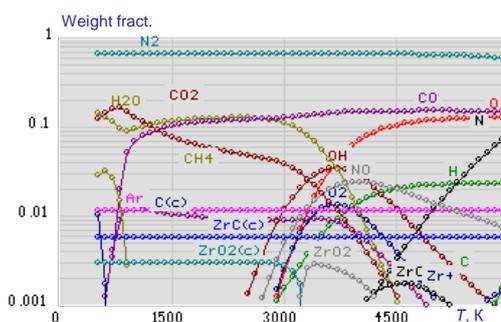


Fig. 4. Composition (in weight fractions) of equilibrium C-H-O-N-Ar-Zr-system, based on the “air + CH₄”-mixture with the ratio $\phi = 1.71$ (Tab. 1), at the range $T = 500\text{--}6000$ K (at $p = 0.202$ MPa) at the ratio of mass rates of initial Me-containing part (taken as dioxide ZrO₂) to initial gaseous part as 1 to 100

Fig. 5. Composition (in weight fractions) of quasi-equilibrium C-H-O-N-Ar-Zr-system, based on the “air + CH₄”-mixture with the ratio $\phi = 1.71$, at the range $T = 500\text{--}6000$ K (at $p = 0.202$ MPa) at the ratio of mass rates of initial Me-containing part (taken as ZrO₂) to initial gaseous part as 1 to 100; this regime uses the fixation of condensed zirconium carbide in the system (at 3100 K) with the same fraction as was experimentally found [17, 18] in the torch’ Zr-cathode surface in the regime No 3 (Tab. 1)



Experimental data and additionally calculated parameters for the operating regimes of button-type Zr-cathode of DC plasma torch with group of “air + CH₄”-based plasmas [17, 18]

Table 1

Operating regime	Mass fraction of the CH ₄ in input plasma gas, kg/kg	Thickness of formed emission layer on the torch cathode δ , mm	Mole fraction of oxygen in the cathode layer, %	Mole fraction of carbon in the cathode layer, %	Fuel to air equivalence ratio for plasma gas ϕ	Mass fraction of ZrO ₂ phase in the cathode layer, %	Mass fraction of ZrC phase in the cathode layer, %	Ratio of mass fractions of ZrC and ZrO ₂ phases in the cathode layer, kg/kg
1	0	0.9	34.0	0	$\approx 10^{-4}$	58.44	0	0
2	0.10	1.3	29.5	7.0	1.077	50.93	13.50	0.265
3	0.15	1.1	14.0	30.0	1.711	24.61	58.91	2.394

The Tab. 2 demonstrates some characteristics of the considered cathode materials, which are important for the evaluation of evaporative degradation at ablation of the materials under the high temperature operation.

In the Tab. 1 the data are presented for the part of experimental parameters of the button-type zirconium cathode in DC plasma torch with group of

“air + CH₄”-plasmas [17, 18] and additionally calculated characteristics for these regimes to demonstrate composition of the cathode after the operation in this AHC-type plasma.

Using our analysis with an example for the case of tested in [17, 18] “CH₄ + air”-operated torch with the Zr-cathode with heterogeneous surface layer, it was shown that the calculations in equilibrium

and quasi-equilibrium approximations predict the nonlinear behavior of the cathode degradation parameter *EAI* and the concentrations of Zr-contain-

ing vapors in gas phase, depending on a value of the equivalence ratio ϕ for plasma-forming mixture in terms of C_xH_y -fraction in this.

Table 2

Some physical properties of analyzed cathode materials (metals and possible compounds after chemical interaction with plasmas) for the plasma torches with AHC-containing plasmas, based on referenced data and the values from thermodynamic database, used in TERRA-code [19, 23]

Properties (for phase changes – typically at ambient pressure) ↓	Commercial ThO ₂ -doped (2 wt. %) tungsten	Zr	Cu
Molecular weight, kg/mol	0.18384 (W); 0.18480 (W + Th); 0.19585 (WC); 0.19585 (W ₂ N) [24]	0.091224 (Zr); 0.123223 (ZrO ₂ – CAS number [1314-23-4]); 0.103235 (ZrC); 0.105231 (ZrN) [24]	0.063546 (Cu); 0.079545 (CuO); 0.143091 (Cu ₂ O) [24]
Melting point <i>T_m</i> , K	3680–3695 (W) [25–27]; 2023 (Th) [25]; 3058–3093, 3053 (WC – CAS number [12070-12-1]) [25, 28–30]	2125–2128 (Zr) [25, 26]; 2950–2983, 2963 (ZrO ₂) [25, 31–33]; 3805–3700, 3845, 3673 (ZrC – CAS number [12070-14-3]) [25, 34–37]; 3233, 3228±30 (ZrN – CAS number [25658-42-8]) [25, 38]	1358 (Cu) [24, 25]; 1599–1719 (CuO – CAS number [1317-38-0]) [25, 31]; ~1517 (Cu ₂ O) [24]
Value of <i>T_m</i> used in TERRA data base, K	3695 (W); 3050 (WC) and 3050 (W ₂ C)	2133 (Zr); 2983 (ZrO ₂), 3700 (ZrN) and 3720 (ZrC)	1358 (Cu); 1517 (Cu ₂ O) and 1700 (CuO)
Boiling point <i>T_b</i> , K	5828–5933 (W) [25, 26]; 5061 (Th) [25]; 6273 (WC) [28, 30]	4682–3851 (Zr) [25, 26]; 4300–4330 (ZrO ₂) [39, 40]; 5370 (ZrC) [41]	2835–2840 (Cu) [25, 26]; 2170–2270 (CuO) [40, 42]
Electron work function Φ of the metals and their compounds, eV	4.32 (W{116}–W{110}); 2.40 (polycrystalline Th) [25]; 3.05–3.47 (“W + 2 % ThO ₂ ”-phase) [43]; 4.6–5.6 (WC {011}, {111}) [44]	4.05 (polycrystalline Zr); 4.02 (ZrC{lattice plane 100}) [45]	4.48–5.10 (Cu{110}–Cu{100}) [25]; 4.84–5.0 (Cu ₂ O films) and 4.7–5.5 (CuO) [46, 47]
Ionization potential of neutral atom of the metal, eV	7.8640 (W); 6.3067 (Th) [25]	6.6339 (Zr) [25]	7.7264 (Cu) [25]

Table 3

Calculated parameters for vaporizing Zr-cathode (in metal and oxide forms) with the group of AHC-based plasma gases for the regimes (*p* = 0.202 MPa) similar to the plasma experimental regimes in [17, 18]

Parameter → Gas medium ↓	100- <i>EAI</i> (wt. %) at <i>T</i> ₁ = 2900 K	100- <i>EAI</i> (wt. %) at <i>T</i> ₂ = 3100 K = 1.069 <i>T</i> ₁	MF _{sumZrOx-vap} at <i>T</i> = 2900 K, kg of vapors/(kg of gas phase)	MF _{sumZrOx-vap} at <i>T</i> = 3100 K, kg of vapors/(kg of gas phase)
1	2	3	4	5
Oxidative plasmas – thermodynamic equilibrium case				
1) Air (composition on [48]) (at the $\phi = 1/ER \approx 10^{-4}$, i. e. the ratio variant as in [20] $ER \approx 10^4$ [49]) – Regime #1 from [17, 18]	† (at ZrO ₂ in the initial mixture) 99.159	† (at ZrO ₂) 95.078	† (at ZrO ₂) $8.410 \cdot 10^{-5}$	† (at ZrO ₂) $4.916 \cdot 10^{-4}$
2) O ₂ (pure, 100 %)	† (at ZrO ₂) 99.237	† (at ZrO ₂) 95.488	† (at ZrO ₂) $7.618 \cdot 10^{-5}$	† (at ZrO ₂) $4.508 \cdot 10^{-4}$
Oxidative plasmas – thermodynamic quasi-equilibrium (with fixing of mass fraction of ZrC(c) in the mixture) and equilibrium (without the fixing) cases				
3) Air + CH ₄ (at $\phi = 1/ER = 1.0774$, i. e. $ER = 0.9282$) – Regime #2 from [17, 18]	† (at ZrO ₂) 99.078 / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) and ZrO ₂ (c)): 99.041 {at 500 K, 2900 K, 3100 K exists only ZrO ₂ (c) phase}	† (at ZrO ₂) 94.486 / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) and ZrO ₂ (c)): 94.276	† (at ZrO ₂) $9.216 \cdot 10^{-5}$ / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) + ZrO ₂ (c)): $9.21 \cdot 10^{-5}$	† (at ZrO ₂) $5.502 \cdot 10^{-4}$ / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) + ZrO ₂ (c)): $5.50 \cdot 10^{-4}$

Окончание табл. 3
End of Table 3

4) Air + CH ₄ (at $\phi = 1/ER = 1.7111$, i. e. $ER = 0.5844$) – Regime #3 from [17, 18]	† (at ZrO ₂) 98.969 / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) and ZrO ₂ (c)): 98.832 {at 500 K, 2900 K, 3100 K exists only ZrO ₂ (c)}	† (at ZrO ₂) 93.858 / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) and ZrO ₂ (c)): 93.088	† (at ZrO ₂) $1.028 \cdot 10^{-4}$ / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) + ZrO ₂ (c)): $1.025 \cdot 10^{-4}$	† (at ZrO ₂) $6.114 \cdot 10^{-4}$ / ‡ (with fixing of the fractions of ZrC(c) + ZrO ₂ (c)): $6.10 \cdot 10^{-4}$
Non-oxidative plasma – thermodynamic equilibrium case				
5) Air + CH ₄ (at $\phi = 1/ER = 4.390$, i. e. $ER = 0.2278$)	† (at Zr in the initial mixture) 83.496 \equiv 99.663 (for the standardized value (only ZrO ₂ (c) at 500 K; exists only ZrC(c) at 2900 K and 3100 K) / (at ZrO ₂) 83.952 \equiv 99.228 (for standardized value with the recalculation to pure Zr) – mixture of ZrC(c) + ZrN(c) at 2900 K; only ZrO ₂ (c) at 500 K	† (at Zr) 81.838 \equiv 97.683 (for the standardized value (only ZrC(c))** / (at ZrO ₂) 79.442 \equiv 94.351 (for standardized value with the recalculation to Zr) – ZrC(c) + ZrN(c) at 3100 K	† (at Zr) $3.779 \cdot 10^{-5}$	† (at Zr) $2.541 \cdot 10^{-4}$
Designation: † – thermodynamic equilibrium state; ‡ – thermodynamic quasi-equilibrium state. * ZrO ₂ (c) → ZrC(c).				

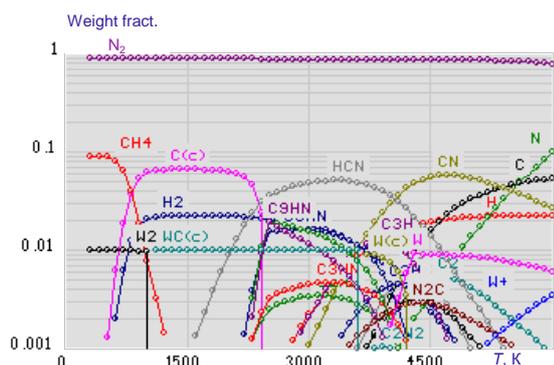


Fig. 6. Composition (in weight fractions) of equilibrium C–H–N–Me-system (Me = (W + ThO₂ (2 wt. %))), based on the commercial “N₂ (high quality [51] + 10 wt. % CH₄”-mixture, at the range $T = 300\text{--}6000$ K (at $p = 0.202$ MPa) at the ratio of mass rates of initial Me-containing part (taken as W + ThO₂) to initial gaseous part as 1 to 100 (Tab. 4)

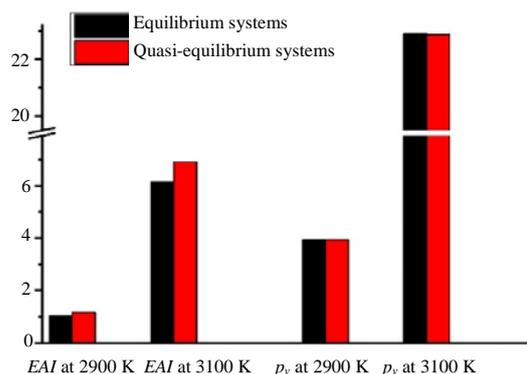
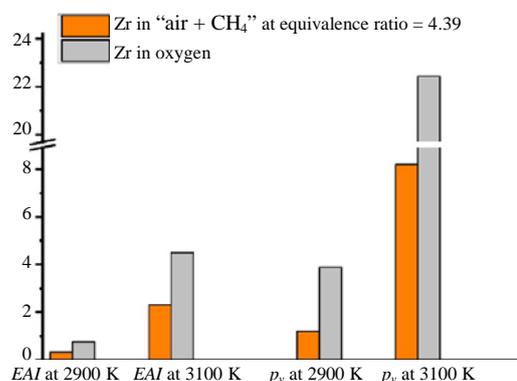


Fig. 7. Degradation intensity EAI (wt. %) and Zr-containing vapors pressure p_v (Pa) for zirconium cathode material in the conditions of equilibrium and quasi-equilibrium systems (“air + CH₄”-mixture with the equivalence ratio $\phi = 1.71$) (Tab. 1, 3)) at the temperature values of 2900 and 3100 K at $p = 0.202$ MPa

Fig. 8. Degradation intensity EAI (wt. %) and Zr-containing vapors pressure p_v (Pa) for zirconium cathode material in the conditions of two equilibrium systems (gaseous oxygen and “air + CH₄”-mixture with the equivalence ratio $\phi = 4.39$ (Tab. 3 for the non-oxidative plasma regime, i. e. POX of C_xH_y) at the temperature values of 2900 and 3100 K at $p = 0.202$ MPa



It is inconsistent with the experimentally obtained in [17, 18] parameters of the cathode composition, which indicates a probability of nonequilibrium type of thermophysical and mass transfer processes in the near-electrode region

and the surface layer (~1 mm thickness) of the material (at least when the torch operates in modes with electric current of about 300 A), which indicates the need for additional study of this effect.

Table 4

Combinations of the refractory (metal-based) cathode materials for DC arc plasma torches and some plasma gases, containing of hydrocarbons, and comparative ones, and calculated composition/state and the values of the (100 %-EAI (%))-parameter for evaporative degradation of the cathodes (at $p = 0.202$ MPa)

Material → Gas medium ↓	ThO ₂ -doped (2 wt. %) tungsten ($T_1 = 3600$ K)	Cu (at $T_0 = 1300$ K; for the oxidized state at $T_1 = 1500$ K)
1	2	3
Non-oxidative/weak oxidative plasmas – thermodynamic equilibrium and quasi-equilibrium cases		
1) N ₂ (technical quality) – on the [50]	0 (for W + ThO ₂ at 3000 K); 0.0271 (for W + ThO ₂ at 3600 K) {at 300 K: WO ₃ (c) + ThO ₂ (c); at 3000 K: absence of phases; at 3600 K: W(c)}	–
2) N ₂ (commercial grade) – high purity gas with minimal impurities [51]	0.96197 ^{**} (for W + ThO ₂ at 3000 K); 0.95387 ^{**} (for W + ThO ₂ at 3600 K) {at 300 K: W ₂ N(c) + ThO ₂ (c); at 3000 K: W ₂ N(c); at 3600 K: W(c)}	0.99998 (at $T = 1300$ K) and 0.99994 (at $T = 1350$ K) and 0.9991 (at $T = 1500$ K)
3) N ₂ (pure, 100 %)	0.97976 ^{**} (for W + ThO ₂ at 3000 K); 0.97034 ^{**} (for W + ThO ₂ at 3600 K) {at 300 K: W ₂ N(c) + ThO ₂ (c); at 3000 K: W ₂ N(c); at 3600 K: W(c)}	–
4) Ar + H ₂ (75 + 25 % vol.) (the commercial mixture for plasma spraying)	0.95213 (for W + ThO ₂ at 3000 K); 0.94404 (for W + ThO ₂ at 3600 K) {at 300 K: W(c) + ThO ₂ (c); at 3000 K: W(c); at 3600 K: W(c)}	–
5) Air + C ₃ H ₈ ≈ LPG* (at the equivalence ratio $\phi = 1/ER \approx 3.32$, i. e. $ER = 0.3012$), i. e. ideal POX	–	1.0 (at $T = 1300$ K) and 0.9999 (at $T = 1350$ K) and 0.9982 (at $T = 1500$ K) (for all T exists only phase Cu(c))
6) Air + CH ₄ (at $\phi = 1/ER = 4.0$, i. e. $ER = 0.25$), i. e. ideal POX	–	0.999949 (at $T = 1300$ K) and 0.999848 (at $T = 1350$ K) and 0.99787 (at $T = 1500$ K) (for all T exists only Cu(c))
7) N ₂ (as #2) + CH ₄ (10 wt. %)	0.9666 ^{***} (for W + ThO ₂) ≡ 0.94122 (for standardized value to the transformation as in #2); 0.9774 ^{***} (for W + ThO ₂ at 3000 K) ≡ 0.95166 (for the standardized value) / (for the quasi-equilibrium regime the same result was found) {at 300 K: W ₂ N(c) + ThO ₂ (c); at 3000 K: WC(c); at 3600 K: WC(c)}	0.99996 (at 1300 K), 0.99989 (at 1350 K) and 0.99846 (at 1500 K) (for all T exists only Cu(c)) (†) / 0.99996 (at 1300 K), 0.99990 (at 1350 K) and 0.99849 (at 1500 K) (for all T exists only Cu(c)) (‡)
8) N ₂ (as #3) + CH ₄ (10 wt. %)	0.9672 ^{***} (for W + ThO ₂) ≡ 0.94179 (for standardized value to the transformation as in #2); 0.9778 ^{***} (for W + ThO ₂ at 3000 K) ≡ 0.95213 (for the standardized value) {at 300 K: W ₂ N(c) + ThO ₂ (c); at 3000 K: WC(c); at 3600 K: WC(c)}	–
9) N ₂ (as #3) + CH ₄ (20 wt. %)	0.96616 ^{***} (for W + ThO ₂) ≡ 0.94077 (for standardized value to the transformation as in #2); 0.97783 ^{***} (for W + ThO ₂ at 3000 K) ≡ 0.95213 (for the standardized value) {at 300 K: W ₂ N(c) + ThO ₂ (c); at 3000 K: WC(c); at 3600 K: WC(c)}	–
10) N ₂ (as #3) + C ₃ H ₈ ≈ LPG* (10 wt. %)	0.96892 ^{***} (for W + ThO ₂) ≡ 0.94346 (for standardized value to the transformation as in #2); 0.97783 ^{***} (for W + ThO ₂ at 3000 K) ≡ 0.95213 (for the standardized value) {at 500 K: W ₂ N(c) + ThO ₂ (c) + C(c); at 3000 K: WC(c); at 3600 K: WC(c)}	–

1	2	3
Oxidative plasmas – thermodynamic equilibrium case		
11) Air (composition on [48])	–	At Cu in initial mix: 1.000 (at $T = 1300\text{--}1350\text{ K}$); 0.8994 †* (at 1450 K) \equiv 0.999954 (for standardized value to the transformation as in (†*)); and 0.8993 †* (at 1500 K) \equiv 0.99987 (for the standardized value); at Cu ₂ O in initial mix: 1.000 (at $T = 1300\text{--}1350\text{ K}$); 0.8992 †* (at 1450 K) \equiv 0.999952 (for the standardized value) and 0.8992 †* (at 1500 K) \equiv 0.999851 (for the standardized value)
12) Air + CH ₄ (at $\phi = 1/ER = 1.00$, i. e. $ER = 1.00$), i. e. ideal combustion	–	With standardizing to the Cu(c) state: 0.99998 (at 1300 K) and 0.99994 (at 1350 K) and 0.99899 (at 1500 K)*
<p>Designation: † – thermodynamic equilibrium; †* – thermodynamic quasi-equilibrium; †** – with CuO(c) → Cu₂O(c) transformation at high temperatures; ** – with transformation of the part of Cu(c) to oxide (via the Cu(c) → Cu₂O(c) reaction) at high temperatures.</p> <p>* LPG – liquified petroleum gas (technical propane-butane). ** With W₂N(c) → W(c) transformation at high temperatures. *** With W₂N(c) → WC(c) transformation at high temperatures.</p>		

Besides the above described thermodynamic analysis, the tentative estimation was carried out for the comparative cathode metals degradation intensity to find the level of the degradation of the metal materials in terms of the vaporization part of the degradation based on the Hertz – Knudsen equation for the mass rate of the vaporization of metal and oxide melts [52]: $G_m = \alpha_{ec} p_v [M/2\pi RT]^{1/2}$.

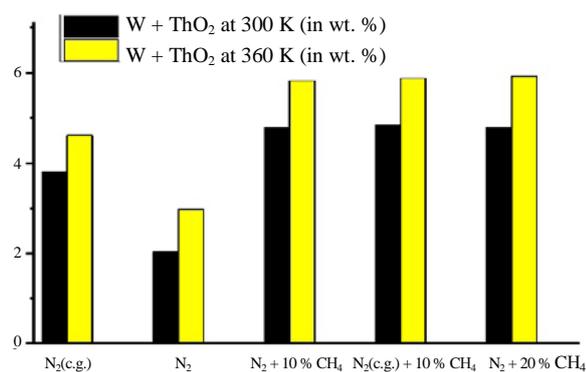


Fig. 9. Degradation intensity EAI (wt. %) for tungsten-based cathode material in different equilibrium systems with (W + ThO₂ (2 wt. %)), N₂ and CH₄ at the temperature values 3000 and 3600 K (at $p = 0.202\text{ MPa}$), according to Tab. 4, the modes are as follows: N₂ (c.g.) – commercial grade nitrogen [51]; N₂ – pure nitrogen (100 %)

In the above equation: α_{ec} – evaporation/condensation coefficient; M , p_v – molecular weight and the sum of partial pressures for the vapors of metal-containing components in gas; R – the molar gas constant. For the calculation such value α_{ec} was established, which can be found, as one of the variants [53], based on the Kincaid and Eyring approach for multiatomic liquids with use of the data for δ_3 – as the free angular ratio for non-linear molecules with three rotational degrees of freedom (characteristic for oxide and other melts). The values of α_{ec} in an accordance with the reviewed empirical data and some calculated ones for properties (M , p_v) near melting point of the materials was found to be 0.05–0.60 for a number of refractory oxides [52, 53].

As a result, we evaluated the data to compare the estimated erosion rate (in terms of evaporative part of this) for the thermochemical Zr-cathode when operating on the mixtures with AHC (such as “air + CH₄”) with the same parameter for some known DC plasma torches with similar cathode materials [1, 3, 22, 54]. The values obtained show an agreement on the rate level ($10^{-9}\text{--}10^{-8}$ g per Coulomb), which is important for engineering design of the AHC-based plasma torches at their medium or elevated power ($\geq 50\text{--}100\text{ kW}$).

The calculated thermodynamic data on the behavior of refractory zirconium compounds (such as ZrO_2 , ZrC) under the C–H–O–N–Ar–Zr-system conditions at $T \geq 2500$ K can be also used for development of thermal protection systems to predict their ablation/destruction by vaporization in flows of combustion products (including incomplete combustion, i. e. with POX or pyrolysis) from various engine, turbine and rocket fuels.

CONCLUSIONS

1. The task stated was to evaluate approximate intensity of the erosion process and, in particular, the evaporation of cathode material of arc plasma torches for operation with gas mixtures with hydrocarbons by thermochemical modeling of the C–H–O–N–Ar–Me-system with varying operating parameters: the composition of plasma-forming mixtures, pressure and temperature of heterogeneous mixtures formed in the system with three variants of cathode material – zirconium, copper and commercial tungsten doped with thoria.

2. The calculations (according to the approach proposed by authors using the thermochemical method of the Bauman MGTU) for the conditions oriented to gas discharge chamber of DC plasma torch in the thermodynamic equilibrium approximation and with the deviation from equilibrium modes showed that the change in plasma type from the variants with oxidizing composition, such as a mixture of methane combustion products, to the variants of mixtures with reducing composition, gives the effect of a difference in the specific rate of vaporization of the cathode near the melting point of the cathode surface in a comparison with the case of the torch with N_2 or air. This effect is typical for two of the three materials considered (Zr and doped W).

3. With regard to the previously experimentally studied plasma torch with a zirconium cathode insert, operating in plasma in the thermochemical mode of electron emission [17, 18] and having an inhomogeneous multiphase surface, the calculation reveals a complex dependence of the specific vaporization rate of zirconium and the concentrations of Zr-containing compounds in the gas phase on the value of the fuel-air equivalence ratio of the plasma-forming CH_4 -air mixture. This dynamics of the dependence differs from the data on

the composition of surface layer in this cathode, which were established in experiments in the modes with electric current in the torch ~ 300 A, and this indicates nonequilibrium character of the processes in near-electrode plasma and in the surface layer of the electrode. During the modeling the specific erosion (assuming only its evaporative component) of a zirconium cathode in the “air + CH_4 ”-mixture was also compared with this parameter in experiments with previously studied plasma torches with similar cathodes of the thermochemical subgroup in other plasma gases.

4. The data obtained on the behavior of zirconium compounds ZrO_2 and ZrC in the C–H–O–N–Ar–Zr-systems are interesting for next design and optimizing the plasma torch cathodes and also for developing new Zr-containing thermal protection systems, including assessment of their destruction in flows of combustion products of a number of hydrocarbon-based fuels. Besides, the calculated results on the behavior of copper near its melting point can also be useful for analyzing the processes of thermal spraying of copper coatings.

REFERENCES

1. Zhukov M. F., Zasyepkin I. M. (2007) *Thermal Plasma Torches: Design, Characteristics and Applications*. Cambridge (UK), Cambridge International Science Publ. 596.
2. Bielyi A. V., Kalinitchenko A. S., Devoino O. G., Kukareko V. A. (2017) *Surface Engineering of Structural Materials with Using of Plasma and Beam Technologies*. Minsk, Belorusskaya Nauka Publ. 457 (in Russian).
3. Petrov S. V., Saakov A. G. (2000) *Plasma of Combustion Products in Surface Engineering*. Kyiv, TOPAS Publ. 218 (in Russian).
4. Kormienko E. E., Mul' D. O., Rubtsova O. A., Vaschenko S. P., Kuzmin V. I., Gulyaev I. P., Sergachev D. V. (2016) Effect of Plasma Spraying Regimes on Structure and Properties of Ni_3Al Coatings. *Thermophysics and Aeromechanics*, 23 (6), 919–928. <https://doi.org/10.1134/S0869864316060147>.
5. Petrov S. V. (1996) *Apparatus and Technological Principles of Coatings Thermal Spraying and Materials Processing in Gas-Air Plasma*. Kyiv, Gas Institute of NAS of Ukraine. 399 (in Ukrainian).
6. Korzhik V. N., Borisova A. L., Popov V. V., Kolomiitsev M. V., Chaika A. A., Tkachuk V. I., Vigilyanskaya N. V. (2014) Cermet Coatings of Chromium Carbide-Nichrome System Produced by Supersonic Plasma Gas Air Spraying. *The Paton Welding Journal*, (12), 19–24. <https://doi.org/10.15407/tpwj2014.12.05>.
7. Petrov S. V., Saakov A. G. (2002) Technology and Equipment for Plasma Surface Hardening of Heavy-Duty

- Parts. *Materials and Manufacturing Processes*, 17 (3), 363–378. <https://doi.org/10.1081/amp-120005382>.
8. Martinez B., Mariaux G., Vardelle A. M., Barykin G., Parco M. (2009) Modeling and Control of a New Spray Process Combining Plasma and HVOF. *International Thermal Spray Conference (ITSC) 2009*. American Society for Metals. <https://doi.org/10.1361/cp2009itsc0481>.
 9. Mohanty P. S., Roche A. D., Guduru R. K., Varadaraajan V. (2009) Ultrafine Particulate Dispersed High-Temperature Coatings by Hybrid Spray Process. *Journal of Thermal Spray Technology*, 19 (1–2), 484–494. <https://doi.org/10.1007/s11666-009-9413-3>.
 10. Rita C. C. P., Miranda F. D. S., Caliori F. R., Rocha R. M., Essiptchouk A., Petraconi G. (2020) Hypersonic Plasma Setup for Oxidation Testing of Ultra-High Temperature Ceramic Composites. *Journal of Heat Transfer*, 142 (8), 082103. <https://doi.org/10.1115/1.4047150>.
 11. Shen X., Gao N., Shi Z., Wang X., Zhang L., Huang J., Li K. (2021) New Insight into the Ablation Behavior of C/C-ZrC Composites in a Nitrogen Plasma Torch with a High Heat Flux of $\sim 25 \text{ MW/m}^2$. *Corrosion Science*, 185, 109409. <https://doi.org/10.1016/j.corsci.2021.109409>.
 12. Panakarajupally R. P., Mirza F., El Rassi J., Morscher G. N., Abdi F., Choi S. (2021) Solid Particle Erosion Behavior of Melt-Infiltrated SiC/SiC Ceramic Matrix Composites (CMCs) in a Simulated Turbine Engine Environment. *Composites. Part B: Engineering*, 216 (12), 108860. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.108860>.
 13. Bei G., van der Zwaag S., Kota S., Barsoum M. W., Sloof W. G. (2019) Ultra-High Temperature Ablation Behavior of MoAlB Ceramics Under an Oxyacetylene Flame. *Journal of the European Ceramic Society*, 39 (6), 2010–2017. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2019.01.016>.
 14. Maciel H. S., de Souza M. A., Gorbunov A. V., Miranda F. (2016) Demonstration Thermal Plasma System for the Treatment of Contaminated Ash Waste and WTE Applications. *Presentation for International Symposium on Non-Thermal/Thermal Plasma Pollution Control Technology & Sustainable Energy (ISNTP-10)*, August, 2016, Florianopolis, Brazil.
 15. Ustimenko A. B. (2012) *Plasma-Fuel Systems for Increasing the Efficiency of the Using Solid Fuels*. Ulan-Ude, East Siberia State University of Technology and Management. 449 (in Russian).
 16. Okovity V. A., Panteleenko F. I., Okovity V. V., Astashinsky V. M. (2020) Formation of Plasma Powder Coatings from Cermet with Subsequent High-Energy Modification. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 19 (6), 469–474. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-6-469-474> (in Russian).
 17. Petrov S. V., Vasenin Yu. L. (2006) Behavior of the Arc at the Cathode in the Plasma of Combustion Products. *Tekhnologiya Mashinostroyeniya = Technology of Machine Industry*, (12), 41–44 (in Russian).
 18. Petrov S. V., Saakov V. A., Vasenin Yu. L. (2004) Behaviour of the Arc at Cathode in Combustion Products Plasma. *31st EPS Conference on Plasma Physics, London, 28 June – 2 July 2004*. ECA, 28G, P-1.049.
 19. Gorokhovskii M., Karpenko E. I., Lockwood F. C., Meserle V. E., Trusov B. G., Ustimenko A. B. (2005) Plasma Technologies for Solid Fuels: Experiment and Theory. *Journal of the Energy Institute*, 78 (4), 157–171. <https://doi.org/10.1179/174602205x68261>.
 20. Devoino O. G., Gorbunov A. V., Gorbunova V. A., Volod'ko A. S., Koval V. A., Yatskevich O. K., Halinowski A. A. (2021) Characterization of Opportunity for Upgrading of the System Based on Arc Plasma Torch for Thermal Spaying of Ceramic Materials, by Means of Use of Fuel Vortex Intensifier. Part I: Thermodynamic Modeling of the System Efficiency Parameters. *Vestsi Natsyyanal'nai Akademii Navuk Belarusi. Seryya Fizika-Tekhnichnykh Navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*, 66 (4), 399–410. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2021-66-4-399-410>.
 21. Essiptchouk A. M., Charakhovski L. I., Filho G. P., Maciel H. S., Otani C., Barros E. A. (2009) Thermal and Power Characteristics of Plasma Torch with Reverse Vortex. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 42 (17), 175205. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/42/17/175205>.
 22. Anshakov A. S., Urbakh E. H., Urbakh A. E., Faleev V. A. (2005) Investigation of Thermochemical Cathodes in Arc Plasma Torches. *Teplofizika i Aeromekhanika = Thermophysics and Aeromechanics*, 12 (4), 685–691 (in Russian).
 23. Gurvich L. V., Veys I. V., Alcock C. B. (1988–1998) *Thermodynamic Properties of Individual Substances. Vols. 1–5*. 4th ed. New York, Hemisphere Publishing Co.
 24. Methane. *NIST Chemistry WebBook*. Available at: <https://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?ID=C74828&Units=SI&Mask=1#Thermo-Gas>.
 25. Lide D. R. (ed.) (2003) *CRC Handbook of Chemistry and Physics*. Boca Roca, US, Taylor & Francis Inc. 2616.
 26. Hafnium. Chemical Element. *Britannica*. Available at: <https://www.britannica.com/science/hafnium>.
 27. Lassner E., Schubert W. D. (1999) *Tungsten: Properties, Chemistry, Technology of the Element, Alloys, and Chemical Compounds*. Springer Verlag Publ. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4907-9>.
 28. https://www.chemicalbook.com/ChemicalProductProperty_EN_CB5174366.htm.
 29. Yan Z., Cai M., Shen P. K. (2013) Nanosized Tungsten Carbide Synthesized by a Novel Route at Low Temperature for High Performance Electrocatalysis. *Scientific Reports*, 3 (1), 1646. <https://doi.org/10.1038/srep01646>.
 30. Tungsten Carbide. *PubChem*. Available at: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/compound/Tungsten-carbide#section=Chemical-and-Physical-Properties>.
 31. Hafnium Dioxide. *Webelements*. Available at: https://www.webelements.com/compounds/hafnium/hafnium_dioxide.html; Zirconium Dioxide. *Webelements*. Available at: https://www.webelements.com/compounds/zirconium/zirconium_dioxide.html; Copper Oxide. *Webelements*. Available at: https://www.webelements.com/compounds/copper/copper_oxide.html.
 32. Ruh R., Garrett H. J., Domagala R. F., Tallan N. M. (1968) The System Zirconia-Hafnia. *Journal of the American Ceramic Society*, 51 (1), 23–28. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1968.tb11822.x>.
 33. Backman L., Opila E. (2019). Thermodynamic Assessment of the Group IV, V and VI Oxides for the Design of Oxidation Resistant Multi-Principal Component Materials.

- Journal of the European Ceramic Society*, 39 (5), 1796–1802. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2018.11.004>.
34. Jackson H. F., Jayaseelan D. D., Manara D., Casoni C. P., Lee W. E. (2011) Laser Melting of Zirconium Carbide: Determination of Phase Transitions in Refractory Ceramic Systems. *Journal of the American Ceramic Society*, 94 (10), 3561–3569. <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2011.04560.x>.
 35. Fernández Guillermet A. (1995) Analysis of Thermochemical Properties and Phase Stability in the Zirconium-Carbon System. *Journal of Alloys and Compounds*, 217 (1), 69–89. [https://doi.org/10.1016/0925-8388\(94\)01310-e](https://doi.org/10.1016/0925-8388(94)01310-e).
 36. Sheindlin M., Falyakhov T., Petukhov S., Valyano G., Vasin A. (2018) Recent Advances in the Study of High-Temperature Behaviour of Non-Stoichiometric TaC_x, HfC_x and ZrC_x Carbides in the Domain of their Congruent Melting Point. *Advances in Applied Ceramics*, 117 (Suppl. 1), s48–s55. <https://doi.org/10.1080/17436753.2018.1510819>.
 37. Justin J.-F., Julian-Jankowiak A., Guérineau V., Mathivet V., Debarre A. (2020) Ultra-High Temperature Ceramics Developments for Hypersonic Applications. *CEAS Aeronautical Journal*, 11 (3), 651–664. <https://doi.org/10.1007/s13272-020-00445-y>.
 38. Ushakov S. V., Navrotsky A., Hong Q.-J., van de Walle A. (2019) Carbides and Nitrides of Zirconium and Hafnium. *Materials*, 12 (17), 2728. <https://doi.org/10.3390/ma12172728>.
 39. Ma G., He P., Chen S., Kang J., Wang H., Liu M., Zhao Q., Li G. (2019) Physicochemical Properties of Ytria-Stabilized-Zirconia in-Flight Particles during Supersonic Atmospheric Plasma Spray. *Coatings*, 9 (7), 431. <https://doi.org/10.3390/coatings9070431>.
 40. Suzuki M., Kagawa M., Syono Y., Hirai T. (1992) Synthesis of Ultrafine Single-Component Oxide Particles by the Spray-ICP Technique. *Journal of Materials Science*, 27 (3), 679–684. <https://doi.org/10.1007/BF02403879>.
 41. Zirconium Carbide. *Chemical Book*. Available at: https://www.chemicalbook.com/ChemicalProductProperty_EN_CB6316307.htm.
 42. Copper Oxide Powder. *IndiaMART*. Available at: <https://www.indiamart.com/proddetail/copper-oxide-powder-21512086255.html>.
 43. Sillero J. A., Ortega D., Muñoz-Serrano E., Casado E. (2010) An Experimental Study of Thoriated Tungsten Cathodes Operating at Different Current Intensities in an Atmospheric-Pressure Plasma Torch. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 43 (18), 185204. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/43/18/185204>.
 44. Quesne M. G., Roldan A., de Leeuw N. H., Catlow C. R. A. (2018) Bulk and Surface Properties of Metal Carbides: Implications for Catalysis. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 20 (10), 6905–6916. <https://doi.org/10.1039/c7cp06336a>.
 45. Hayami W., Tang S., Chiu T.-W., Tang J. (2021) Reduction in Work Functions of Transition-Metal Carbides and Oxycarbides upon Oxidation. *ACS Omega*, 6 (22), 14559–14565. <https://doi.org/10.1021/acsomega.1c01671>.
 46. Singh B., Mehta B. R. (2014) Relationship Between Nature of Metal-Oxide Contacts and Resistive Switching Properties of Copper Oxide Thin Film Based Devices. *Thin Solid Films*, 569, 35–43. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2014.08.030>.
 47. Deurmeier J., Liu H., Rapenne L., Calmeiro T., Renou G., Martins R., Munoz-Rojas D., Fortunato E. (2018) Visualization of Nanocrystalline CuO in the Grain Boundaries of Cu₂O Thin Films and Effect on Band Bending and Film Resistivity. *APL Materials*, 6 (9), 096103. <https://doi.org/10.1063/1.5042046>.
 48. Rutberg P. G., Bratsev A. N., Kuznetsov V. A., Popov V. E., Ufimtsev A. A., Shtengel' S. V. (2011) On Efficiency of Plasma Gasification of Wood Residues. *Biomass and Bioenergy*, 35 (1), 495–504. <https://doi.org/10.1016/j.biombioe.2010.09.01>.
 49. Atmospheric Concentrations of Greenhouse Gases. *EPA*. Available at: <https://www.epa.gov/climate-indicators/climate-change-indicators-atmospheric-concentrations-greenhouse-gases#ref5>.
 50. State Standard 9293–74. ISO 2435-73. Gaseous and Liquid Nitrogen. Specifications. Moscow, Standartinform Publ. 1976 (in Russian).
 51. Nitrogen Gas High Purity. *Krion*. Available at: <https://krion.by/produktsiya/gazoobraznyye-produkty-razdeleniya-vozdukh/azot-gazoobraznyy-vysokoy-chistoty.html> (in Russian).
 52. Shornikov S. I. (2015) Vaporization Coefficients of Oxides Contained in the Melts of Ca–Al-Inclusions in Chondrites. *Geochemistry International*, 53 (12), 1080–1089. <https://doi.org/10.1134/s0016702915100055>.
 53. Gorbunov A. V. (1998) *Plasma Chemical Treatment of the Solutions of Nitrates of II–III Groups Metals in the Electric Arc Reactor*. Minsk, Heat & Mass Transfer Institute of NAS of Belarus. 332 (in Russian).
 54. Kulygin V. M., Pereslavitsev A. B., Tresvyatsky S. S. (2017) Estimation of the Temporary Service Life of DC Arc Plasmatron Cathode. *Technical Physics*, 87 (9), 1327–1331. <https://doi.org/10.1134/s1063784217090146>.

Received: 20.07.2021

Accepted: 04.01.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-191-195>

УДК 539.3

К уточнению решения о действии сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство при произвольном коэффициенте Пуассона

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Ранее автором получено аналитическое решение для определения вертикальных перемещений грани однородного изотропного четвертьпространства, на которую действует вертикальная сосредоточенная сила. Это выражение давало точное решение для определения вертикальных перемещений грани четвертьпространства из несжимаемого материала и приближенное – при коэффициенте Пуассона, отличном от 0,5. Позднее в опубликованной статье С. В. Босакова и П. Д. Скачека «Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства» было показано, что, комбинируя решения для определения вертикальных перемещений четвертьпространства и полупространства от действия сосредоточенных сил, можно найти вертикальные перемещения для одной восьмой грани однородного изотропного пространства. Полученные выражения позволяют решать контактные задачи для неклассических областей в виде четвертьпространства и одной восьмой пространства. В настоящей статье автор приводит первое приближение для определения вертикальных перемещений грани четвертьпространства от действия вертикальной сосредоточенной силы, широко используя метод специальной аппроксимации, развитый в трудах В. М. Александрова и позволяющий успешно вычислять несобственные интегралы. Построенные графики показывают близкие результаты при определении перемещений с коэффициентом Пуассона, отличном от 0,5 и равном 0,5. Следует отметить, что указанный в статье С. В. Босакова и П. Д. Скачека подход может быть успешно использован при определении всех перемещений граней одной восьмой грани однородного изотропного пространства от действия сосредоточенных сил, касательных к грани четвертьпространства. Это даст возможность решать контактные задачи с учетом сил трения в контактной зоне балки или пластинки.

Ключевые слова: четвертьпространство, коэффициент Пуассона, решение Буссинеска, перемещения, сосредоточенная сила

Для цитирования: Босаков, С. В. К уточнению решения о действии сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство при произвольном коэффициенте Пуассона / С. В. Босаков // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 191–195. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-191-195>

To Clarify Decision on Action of Concentrated Force to Elastic Quarter-Space for Arbitrary Poisson's Ratio

S. V. Bosakov¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Previously, the author obtained an analytical solution for determining the vertical displacements of the homogeneous isotropic quarter-space face, which is affected by a vertical concentrated force. This expression gave an exact solution for determining the vertical displacements of a quarter-space face made of incompressible material and an approximate solution for a Poisson ratio different from 0.5. Later, in the published paper by S. V. Bosakov and P. D. Skachek "Action of Concentrated Force on 1/8 of Homogeneous Isotropic Space", it was shown that by combining solutions for determining

Адрес для переписки

Босаков Сергей Викторович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

Address for correspondence

Bosakov Siarhei V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

the vertical displacements of a quarter-space and a half-space from the action of concentrated forces, one can find vertical displacements for one-eighth face of a homogeneous isotropic space. The resulting expressions allow solving contact problems for non-classical domains in the form of a quarter of a space and one eighth of a space. Below, the author obtains the first approximation for displacements of a quarter-space face from the action of a vertical concentrated force. In this paper, the author gives the first approximation for determining the vertical displacements of a quarter-space face from the action of a vertical concentrated force, widely using the special approximation method developed in the works of V. M. Alexandrov and allowing to calculate successfully improper integrals. The constructed graphs show good results when determining displacements with a Poisson's ratio different from 0.5 and equal to 0.5. It should be noted that the approach indicated in the paper by S. V. Bosakov and P. D. Skachek can be successfully used in determining all displacements of the faces of one-eighth face of a homogeneous isotropic sharpened forces tangent to the edge of a quarter-space and this will allow to solve contact problems taking into account friction forces in the contact zone of the beam or plate.

Keywords: quarter-space, Poisson's ratio, Boussinesq decision, displacements, concentrated force

For citation: Bosakov S. V. (2022) To Clarify Decision on Action of Concentrated Force to Elastic Quarter-Space for Arbitrary Poisson's Ratio. *Science and Technique*. 21 (3), 191–195. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-191-195> (in Russian)

В [1] на основании результатов Я. С. Уфлянда [2] получено точное выражение для определения вертикальных перемещений грани упругого однородного изотропного четвертьпространства от действия сосредоточенной вертикальной силы в виде тройного несобственного интеграла. Надо отметить, что в научной литературе это выражение носит название задачи Хетени [3], который предложил вычислять ее методом наложения решений для полупространства. В [4, 5] делались попытки упростить полученное выражение для перемещений при произвольном коэффициенте Пуассона при решении задач расчета фундаментных конструкций на грунтовом основании вблизи откосов. Д. А. Пожарский [6] опубликовал монографию, где в интегральном виде приводятся формулы для перемещений границы упругого четвертьпространства от различно приложенных внешних сил.

Рассмотрим выражение для определения вертикальных перемещений грани упругого однородного изотропного четвертьпространства от действия сосредоточенной вертикальной силы (рис. 1):

$$V(r, z) = \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi^3 E} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 \pi \tau}{\text{sh}^2 \frac{\pi \tau}{2} - \tau^2} \times L(\sigma, \tau, t) dt d\sigma d\tau; \quad (1)$$

$$L(\sigma, \tau, t) = \frac{e^{-\sigma a} \cos t \tau K_{it}(\sigma r) \cos \sigma z}{1 + \frac{\varepsilon}{\text{ch} 2t} \frac{4\tau \text{th}(\pi\tau/4)}{\text{sh}^2 \frac{\pi\tau}{2} - \tau^2} - \frac{\varepsilon^2}{\text{ch}^2 2t} \frac{4 \text{th}^2(\pi\tau/4)}{\text{sh}^2 \frac{\pi\tau}{2} - \tau^2}};$$

$$\varepsilon = 1 - 2\nu,$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона четвертьпространства; $K_{it}(x)$ – функция Бесселя [7].

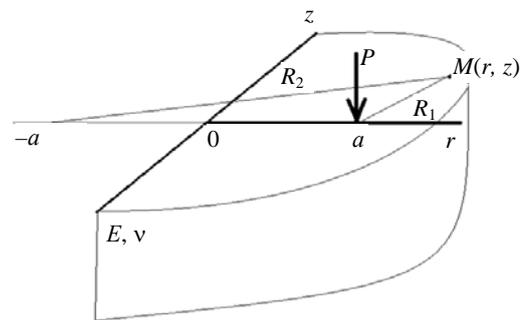


Рис. 1. Действие сосредоточенной силы на четвертьпространство

Fig. 1. Action of concentrated force on quarter-space

Рассмотрим

$$x = \frac{\varepsilon}{\text{ch} 2t} \frac{4\tau \text{th}(\pi\tau/4)}{\text{sh}^2 \frac{\pi\tau}{2} - \tau^2} - \frac{\varepsilon^2}{\text{ch}^2 2t} \frac{4 \text{th}^2(\pi\tau/4)}{\text{sh}^2 \frac{\pi\tau}{2} - \tau^2} < 1$$

при любых $0 \leq t, \tau \leq \infty$.

Принимаем разложения [7]:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad |x| \leq 1;$$

$$\frac{1}{\text{ch} 2t} = 1 - 2t^2 + \frac{10}{3}t^4 - \dots;$$

$$\frac{1}{\text{ch}^2 2t} = 1 - 4t^2 + \frac{32}{3}t^4 - \dots$$

Также представим:

$$\frac{\tau \text{th}(\pi\tau/4)}{\text{sh}^2(\pi\tau/2) - \tau^2} \approx \frac{\pi}{\pi^2 - 4} \frac{1}{\text{ch}^2(\pi/2)}; \quad (2)$$

$$\frac{\text{th}^2(\pi\tau/4)}{\text{sh}^2(\pi\tau/2) - \tau^2} \approx \frac{\pi^2}{4\pi^2 - 16} \frac{1}{\text{ch}^2(\pi/2)}; \quad (3)$$

$$\frac{4\text{sh}^2(\pi\tau)}{\text{sh}^2(\pi\tau/2) - \tau^2} = 2(1 + \text{ch}\pi\tau) \times \left(1 + \frac{0,6815 + 2,4205\tau^2 - 0,8916\tau^4}{\text{ch}\pi\tau} \right). \quad (4)$$

Выражения (2)–(4) получены исходя из асимптотических свойств функций на нуле и бесконечности. Точность принятой аппроксимации можно оценить по рис. 2, 3.

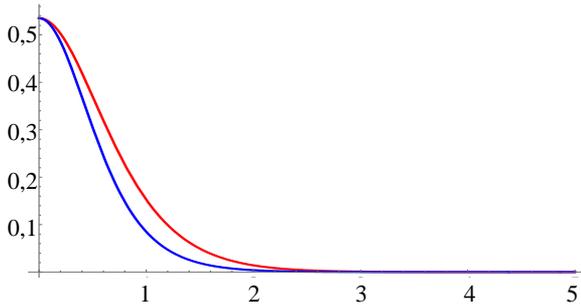


Рис. 2. Точность аппроксимации выражения (2)
Fig. 2. Expression approximation accuracy (2)

Подчеркнем, что наличие осциллирующих функций в (1) говорит о незначительном влиянии различий в значениях точных и аппроксими-

мирующих выражений в (2) и (3). Точность аппроксимации (4) рассмотрена в [8].

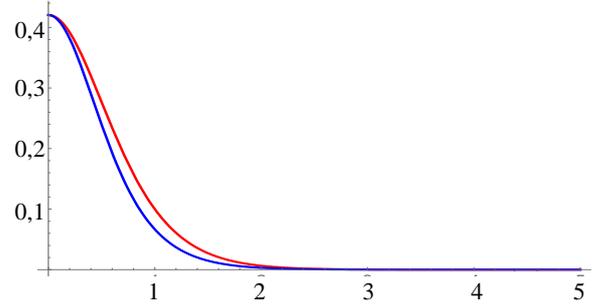


Рис. 3. Точность аппроксимации выражения (3)
Fig. 3. Expression approximation accuracy (3)

Используя принятые аппроксимации и опуская промежуточные вычисления, получаем:

$$L(\sigma, \tau, t) = 1 + \frac{A_0(\nu)}{\text{ch}^2(\pi/2)} + \frac{A_2(\nu)}{\text{ch}^2(\pi/2)} t^2 + \dots; \quad (5)$$

$$A_0(\nu) = 1,68148\varepsilon^2 - 2,14092\varepsilon;$$

$$A_2(\nu) = 4,28185\varepsilon - 6,72591\varepsilon^2;$$

...

Далее используем формулы интегралов [1, 8, 9]:

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma a \text{ch}\tau} \cos \tau t \, d\tau = K_{i\tau}(\sigma a);$$

$$\int_0^{\infty} \cos(\sigma z) K_{i\tau}(\sigma a) K_{i\tau}(\sigma r) \, d\sigma = \frac{\pi^2}{4\text{ch}\pi\tau\sqrt{ar}} P_{i\tau-1/2}(\text{ch}\mu); \quad (6)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ch}\beta\tau}{\text{ch}\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\text{ch}\mu) \, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2(\text{ch}\mu + \cos\beta)}};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^2}{\text{ch}\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\text{ch}\mu) \, d\tau = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(\text{ch}\mu + 1)^{3/2}};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^4}{\text{ch}\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\text{ch}\mu) \, d\tau = \frac{224 - 8\cos h[\mu](-12\cos h[\mu] + 2(-22 + 2\cos h[2\mu]))}{128\sqrt{2}(1 + \cos h[\mu])^{9/2}};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ch}\beta\tau}{\text{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\text{ch}\mu) \, d\tau = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\text{ch}\mu - \cos\beta}} \arctg \sqrt{\frac{\text{ch}\mu - \cos\beta}{1 + \cos\beta}};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^2}{\text{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\text{ch}\mu) \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\text{ch}\mu - 1} - \frac{\sqrt{2}}{(\text{ch}\mu - 1)^{3,2}} \arctg \sqrt{\frac{\text{ch}\mu - 1}{2}} \right];$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^4}{\text{ch}^2\pi\tau} P_{i\tau-1/2}(\text{ch}\mu) \, d\tau = - \left(\left(\text{ch}^2 \frac{\mu}{2} \left(58 + 64\sqrt{2} \arctg \left[\text{sh} \frac{\mu}{2} \right] \sqrt{-1 + \text{ch}\mu} + \right. \right. \right.$$

$$+ \left(47 - 72\sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{sh} \frac{\mu}{2} \sqrt{-1 + \operatorname{ch} \mu} \right) \right) \operatorname{ch} \mu + 2 \left(-5 + 4\sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{sh} \frac{\mu}{2} \sqrt{-1 + \operatorname{ch} \mu} \right) \right) \operatorname{ch} 2\mu + \\ + \operatorname{ch} 3\mu \operatorname{sh}^4 \frac{\mu}{2} / \left(4\pi (-1 + \operatorname{ch} \mu)^{7/2} (1 + \operatorname{ch} \mu)^{7/2} \right),$$

где $\operatorname{ch} \mu = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}$; $P_{i\tau-1/2}(\operatorname{ch} \mu)$ – функция конуса [7].

В итоге получаем выражение для вертикальных перемещений грани четвертьпространства от вертикальной силы в следующем виде:

$$\frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1+a_0+a_0A_0}{R_2} + 2a_0 \frac{1+A_0}{\pi R_1} \operatorname{arctg} \frac{R_1}{2\sqrt{ar}} + (a_2+a_2A_0) \frac{ar}{R_2^3} + \right. \\ + \frac{a_2(1+A_0)}{\pi R_1} \left(\frac{\sqrt{ar}}{R_1} - \frac{2ar}{R_1^3} \operatorname{arctg} \frac{R_1}{2\sqrt{ar}} \right) - a_4(1+A_0) \frac{ar}{R_2^5} (a^2 - 7ar + r^2 + z^2) - \frac{a_4}{\sqrt{ar}} (1+A_0) \frac{(ar)^4}{32\pi R_1^3 R_2^5} \times \\ \times \left(\frac{R_2^2}{a^3 r^3} (a^4 - 12a^3 r - 12ar(r^2 + z^2)) + (r^2 + z^2)^2 + 3a^2(35r^2 + z^2) \right) \left. \right] + \\ + \frac{8R_1^3}{(ar)^{5/2}} (a^2 - 7ar + r^2 + z^2) \operatorname{arctg} \frac{R_1}{2\sqrt{2ar}} \quad (7)$$

Первое слагаемое в полученном выражении для перемещений (7) – это известное решение Буссинеска [10] для упругого однородного изотропного полупространства и является сингулярным. Также можно заметить, что наибольшее влияние на величины перемещений (7) учет коэффициента Пуассона оказывает вблизи ребра четвертьпространства, что подтверждают данные рис. 4, 5.

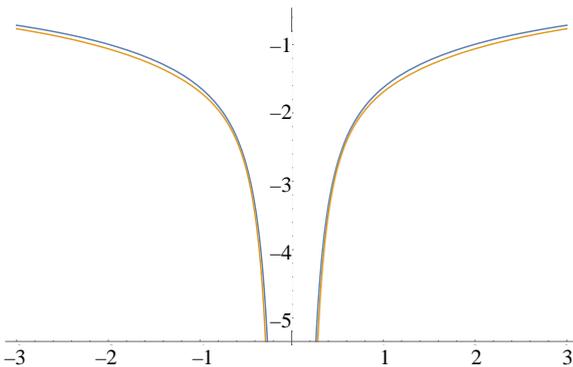


Рис. 4. Перемещения при $\nu = 0,5$ (желтый цвет) и $\nu = 1/3$ (синий цвет) вдоль оси z при $r = a = 1$

Fig. 4. Movements at $\nu = 0.5$ (yellow) and $\nu = 1/3$ (blue) along axis z at $r = a = 1$

В (7) перемещения ограничены на ребре четвертьпространства, на бесконечности стре-

мятся к нулю, как $1/R_1$. Полученные результаты также дают возможность уточнить формулу перемещений грани 1/8 однородного изотропного пространства, опубликованной в [9].

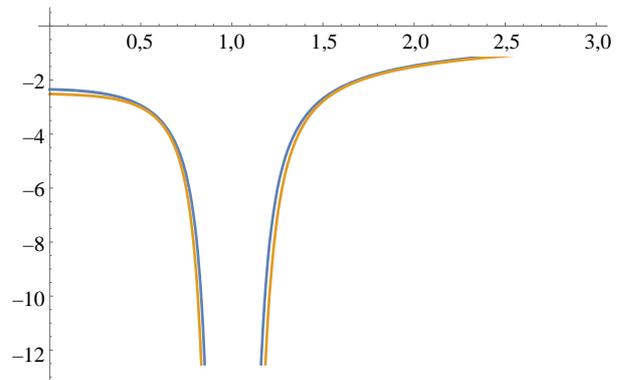


Рис. 5. Перемещения при $1/R_1$ (желтый цвет) и $\nu = 1/3$ (синий цвет) вдоль оси R при $z = 0$

Fig. 5. Movements at $1/R_1$ (yellow) and $\nu = 1/3$ (blue) along axis R at $z = 0$

ВЫВОД

Получено уточненное аналитическое выражение для определения вертикальных перемещений грани упругого однородного изотропного четвертьпространства от действия сосредото-

точной вертикальной силы, справедливое при любых значениях коэффициента Пуассона. Следует отметить, что указанный подход при определении перемещений может быть использован в решении задачи о действии сосредоточенных сил, касательных к грани четвертьпространства. Это позволит решать контактные задачи с учетом сил трения в контактной зоне балки или пластинки. Полученные результаты также дают возможность уточнить формулу для определения вертикальных перемещений грани одной восьмой однородного изотропного пространства, ранее опубликованной в статье С. В. Босакова и П. Д. Скачек «Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства».

ЛИТЕРАТУРА

1. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство / С. В. Босаков // Теоретическая и прикладная механика: республиканский межведомственный сборник. Минск, 1988. Вып. 15. С. 100–108.
2. Уфлянд, Я. С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина / Я. С. Уфлянд // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 549–553.
3. Heteny M. A General Solution for the Elastic Quarter-space / M. Heteny // Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37, No 70. P. 75–80.
4. Босаков, С. В. Изгиб балок, расположенных вблизи откоса / С. В. Босаков, Н. М. Фомичева // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1988. № 2. С. 26–28.
5. Босаков, С. В. Расчет системы перекрестных балок на упругом клиновидном основании / С. В. Босаков, С. Д. Семенюк // Материалы, технологии, инструменты. 2000. Т. 5, № 4. С. 17–20.
6. Пожарский, Д. А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения / Д. А. Пожарский. Ростов н/Д: ООО «ДГТУ-ПРИНТ», 2019. 306 с.
7. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1953. 1100 с.
8. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. М.–Л.: Наука, 1968. 402 с.
9. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на 1/8 однородного изотропного пространства / С. В. Босаков, П. Д. Скачек // Наука и техника. 2020. Т. 19, № 5. С. 372–376. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376>.
10. Александров, А. В. Теория упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.

Поступила 21.02.2022

Подписана в печать 26.04.2022

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Bosakov S. V. (1988) The Action of a Concentrated Force on an Elastic Quarter-Space. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika: Respublikanskiy Mezhdovedstvennyy Sbornik* [Theoretical and Applied Mechanics: Republican Interdepartmental Collection]. Minsk, (15), 100–108 (in Russian).
2. Uflyand Ya. S. (1972) Some Spatial Problems of Elasticity Theory for a Wedge. *Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis*. Moscow, Nauka Publ. 549–553 (in Russian).
3. Heteny M. (1970) A General Solution for the Elastic Quarter-space. *Journal of Applied Mechanics*, 37 (70), 75–80.
4. Bosakov S. V., Fomicheva N. M. (1988) Bending of Beams Located Near the Slope. *Osnovaniya, Fundamenty i Mekhanika Gruntov = Soil Mechanics and Foundation Engineering*, (2), 26–28 (in Russian).
5. Bosakov S. V., Semenyuk S. D. (2000) Calculation of a System of Cross Beams on an Elastic Wedge-Shaped Foundation. *Materialy, Tekhnologii, Instrumenty* [Materials, Technologies, Tools], 5 (4), 17–20 (in Russian).
6. Pozharsky D. A. (2019) *Fundamental Solutions of Elastic Wedge Statics and their Applications*. Rostov-on-Don: Don State Technical University-PRINT. 306 (in Russian).
7. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. (1953) *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 1100 (in Russian).
8. Uflyand Ya. S. (1968) *Integral Transformations in Problems of Elasticity Theory*. Moscow–Leningrad, Nauka Publ. 402 (in Russian).
9. Bosakov S. V., Skachek P. D. (2020) Concentrated Force Action on 1/8 Homogeneous Isotropic Space. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 19 (5), 372–376. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376> (in Russian).
10. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *Theory of Elasticity and Plasticity*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).

Received: 21.02.2022

Accepted: 26.04.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-196-200>

УДК 625.74:656.13.08

Плиты для сборных дорожных покрытий с наименьшим «клавишным» эффектом

Канд. техн. наук, доц. С. И. Зиневич¹⁾, асп. А. К. Каюмов¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Изучен вопрос улучшения ровности сборного бетонного покрытия посредством изменения конструкции плит, из которых оно собирается. Неровности сборного покрытия, так называемый «клавишный» эффект, в основном возникают в местах сопряжения плит. Причина неровностей – вертикальные перемещения торцов плит друг относительно друга при проезде автомобиля. С целью исправления этой ситуации авторы предлагают устраивать на концах плит поперечные ребра прямоугольного сечения. Такие ребра будут создавать надежную опору на краях плиты, что уменьшит вертикальные перемещения ее торцов. Чтобы определить эффективность применения поперечных ребер, исследовали бетонную плиту размерами 3×6 м. Поперечное ребро в сечении имело форму прямоугольника со сторонами 20×10 см. Для сравнения результатов испытаний исследовали бетонную плиту таких же размеров, но без поперечных ребер. Деформации и напряжения плиты под нагрузкой определяли методом конечных элементов с использованием программного комплекса «Лира». Расчеты показали, что вертикальные перемещения торцов плит с ребрами в два раза, а напряжения – в 2,4 раза меньше, чем плит без ребер. Таким образом установлено, что использование бетонных плит с поперечными ребрами на торцах позволит уменьшить неровности сборного дорожного покрытия.

Ключевые слова: сборное покрытие, прочность бетона, жесткость плиты, поперечное ребро, деформации и напряжения плиты, нагрузка, вертикальные перемещения, «клавишный» эффект

Для цитирования: Зиневич, С. И. Плиты для сборных дорожных покрытий с наименьшим «клавишным» эффектом / С. И. Зиневич, А. К. Каюмов // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 196–200. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-196-200>

Slabs for Prefabricated Road Surfaces with the Least “Keyboard” Effect

S. I. Zinevich¹⁾, A. K. Kayumov¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper studies the issue of improving the evenness of the prefabricated concrete pavement by changing the design of the slabs from which it is assembled. Irregularities of the prefabricated pavement mainly occur at the junction of the plates and are called “keyboard” effect. The reason for the unevenness is the vertical movement of the ends of the plates relative to each other when the car passes. In order to correct this situation, the authors propose to arrange transverse ribs of rectangular cross section at the ends of the plates. Such ribs will create a reliable support at the edges of the slab, which will reduce the vertical movement of its ends. To determine the effectiveness of the use of transverse ribs, a concrete slab with dimensions of 3×6 m has been examined in the paper. The transverse rib in cross section had the shape of a rectangle with sides 20×10 cm. In order to compare the test results, a concrete slab of the same dimensions, but without transverse ribs, has been studied. Deformations and stresses of the slab under load have been determined by the finite element method using the Lira software package. Calculations have shown the effectiveness of the slabs with transverse ribs mounted on its edges.

Адрес для переписки

Зиневич Сергей Иванович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 237-38-81
Zinev2018@gmail.com

Address for correspondence

Zinevich Sergey I.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 237-38-81
Zinev2018@gmail.com

The vertical displacements of the ends of the slabs with ribs are two times less than those of the slabs without ribs, and the stresses are 2.4 times less. It is obvious that the use of concrete slabs with transverse ribs at the ends will reduce the unevenness of the prefabricated coating at the points of their mating.

Keywords: prefabricated coating, concrete strength, slab stiffness, transverse rib, slab deformation and stresses, load, vertical displacements, “keyboard” effect

For citation: Zinevich S. I., Kayumov A. K. (2022) Slabs for Prefabricated Road Surfaces with the Least “Keyboard” Effect. *Science and Technique*. 21 (3), 196–200. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-196-200> (in Russian)

Введение

Цементобетонные дорожные покрытия – более прочные и долговечные по сравнению с асфальтобетонными [1, 2]. Одним из видов бетонных покрытий являются сборные, устраиваемые из отдельных плит [3, 4]. Они имеют свои плюсы и минусы. К плюсам можно отнести то, что плиты изготавливают на заводах со строгим соблюдением технологических правил и режимов ухода за бетоном, обеспечивающих их высокое качество. Также преимуществом является возможность движения транспорта сразу после устройства покрытия, т. е. нет необходимости ждать набора прочности бетоном, как при возведении монолитных бетонных покрытий. Это позволяет применять сборные бетонные покрытия при реконструкции или капитальном ремонте существующей дороги, когда нельзя надолго закрыть движение [5]. Немаловажное обстоятельство в пользу сборного бетонного покрытия по сравнению с монолитным – устройство его в течение всего года. Кроме того, стоимость сборных бетонных покрытий примерно в 1,5 раза меньше, чем монолитных армированных.

Однако сегодня устройство сборных бетонных покрытий не нашло широкого применения. Одна из причин – сложность обеспечения ровности покрытия [6]. Наиболее часто неровности (так называемый «клавишный» эффект) возникают в зоне сопряжения плит. Они происходят из-за вертикального перемещения торцов плит друг относительно друга при проезде автомобиля. С целью исправления такой ситуации авторы предлагают устраивать на концах плит поперечные ребра. Поперечное сечение ребра должно иметь прямоугольную форму, что создаст надежные опоры на краях плиты. А это уменьшит вертикальные перемещения ее торцов.

Для проверки эффективности устройства поперечного ребра с точки зрения уменьшения вертикальных перемещений торцов плиты исследовали бетонную плиту размерами 3×6 м. Поперечное ребро в сечении имело форму пря-

моугольника со сторонами 20×10 см (рис. 1). Для сравнения результатов испытаний исследовали такую же по размерам бетонную плиту без поперечных ребер. Деформации и напряжения плит под нагрузкой определяли методом конечных элементов с использованием программного комплекса «Лира».

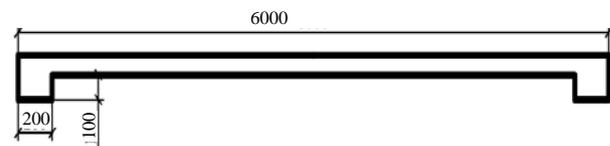


Рис. 1. Продольный разрез исследуемой плиты

Fig. 1. Longitudinal section of the studied plate

Выполнение расчета

Зависимость жесткости плиты от наличия поперечного ребра, установленного на ее торце, определяли методом конечных элементов [7, 8]. Конечно-элементная модель плиты включала 19152 узла и 18943 конечных элемента. Упругое основание моделировали упругими вертикальными связями, находящимися в каждом нижнем узле [9, 10]. Жесткость каждой связи находили по формуле

$$R = \frac{E_0 \sqrt{F}}{K(1 - \nu_0^2)N},$$

где E_0 , ν_0 – усредненный модуль упругости и коэффициент Пуассона цементогрунта; N – число нижних узлов конечно-элементной модели; K – коэффициент, для плиты размерами 3×6 м $K = 0,9$ [10]; F – площадь нижней поверхности плиты.

Выполняли расчет железобетонной плиты толщиной 180 мм, изготовленной из бетона марки по морозоустойчивости F150 с ненапрягаемой арматурой. Основанием служил цементогрунт. Плиту нагружали двумя колесами расчетного автомобиля, каждое из которых принимали в виде гибкой квадратной нагрузки, эквивалентной площади круга диаметром 0,41 м.

Величина равномерно распределенной нагрузки каждого колеса составляла 0,6 МПа. Схема загрузки плиты приведена на рис. 2: два штампа приложены одновременно на линии, перпендикулярной продольной оси плиты и находящейся в ее начале или конце.

Жесткость плиты при воздействии нагрузки оценивали по перепаду высот ее поверхности. Сравнивали вертикальные перемещения торца плиты, имеющей поперечное ребро, и торца плиты без поперечного ребра. Результаты расчетов представлены на рис. 3, 4.

Из рис. 3, 4 видно, что вертикальные перемещения торца плиты, имеющей поперечное ребро, в два раза меньше, чем перемещения торца плиты без поперечного ребра.

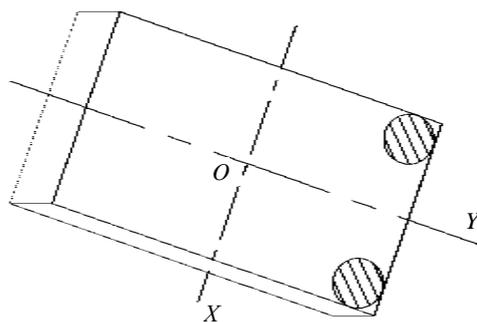


Рис. 2. Схема загрузки плиты
Fig. 2. Plate loading scheme

Напряжения плит с поперечным ребром и без ребра представлены на рис. 5, 6 соответственно. Как видно из рисунков, напряжения в опасной зоне также меньше у плиты, имеющей поперечные ребра в торце.

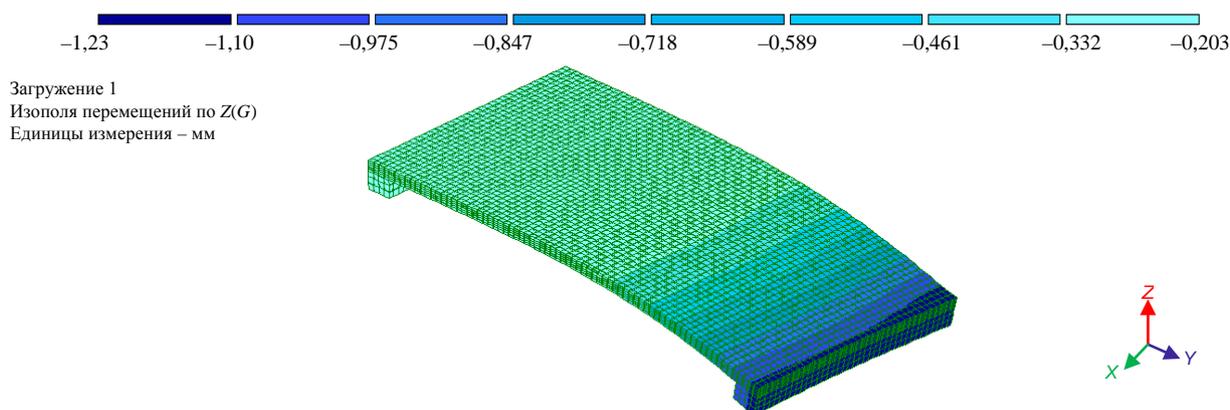


Рис. 3. Изополя вертикальных перемещений торца плиты, имеющей поперечное ребро
Fig. 3. Isofields of vertical displacements of the end of a plate with a transverse rib

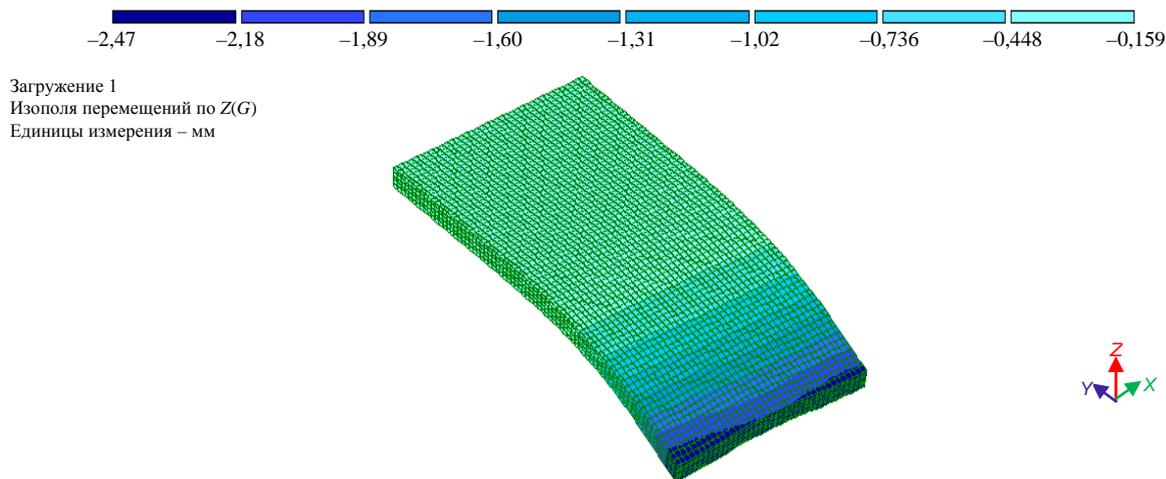


Рис. 4. Изополя вертикальных перемещений торца плиты, не имеющей поперечного ребра
Fig. 4. Isofields of vertical displacements of the end of a plate without a transverse rib

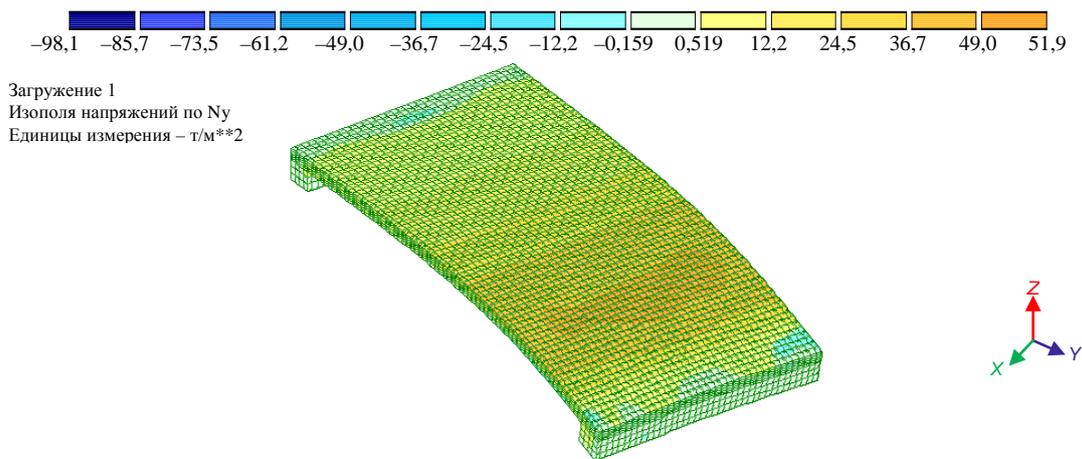


Рис. 5. Изополя наибольших напряжений плиты, имеющей поперечное ребро

Fig. 5. Isofields of the greatest stresses of a plate with a transverse rib

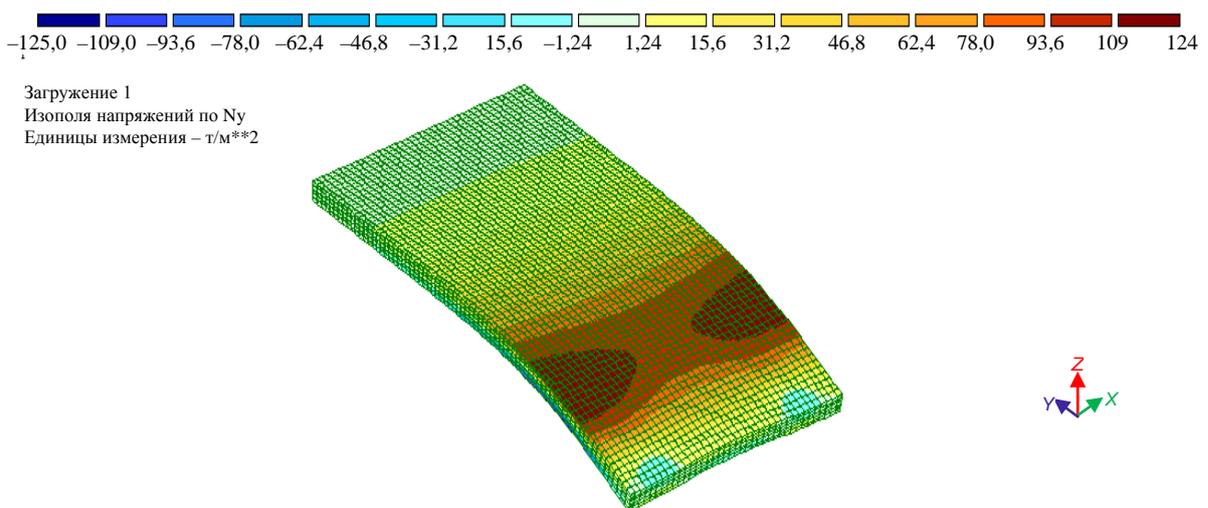


Рис. 6. Изополя наибольших напряжений плиты, не имеющей поперечного ребра

Fig. 6. Isofields of the greatest stresses of a plate without a transverse rib

ВЫВОД

Выполненные исследования и расчеты показали эффективность поперечных ребер, установленных на концах плит. Так, вертикальные перемещения торцов плит с поперечными ребрами в два раза меньше, чем плит без таких ребер. Уменьшение вертикальных перемещений торцов плит минимизирует «клавишный» эффект в зоне сопряжения плит, отчего общая ровность покрытия улучшается. Кроме того, напряжения в опасной зоне плит с поперечными

ребрами в 2,4 раза меньше, что способствует продлению срока службы сборных бетонных покрытий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левицкий, Е. Ф. Бетонные покрытия автомобильных дорог / Е. Ф. Левицкий, В. А. Чернигов. М.: Транспорт, 1980. 288 с.
2. Носов, В. П. Основные тенденции в строительстве цементобетонных покрытий на автомобильных дорогах / В. П. Носов // Наука и техника в дорожной отрасли. 2011. № 4. С. 1–3.

3. Орловский, В. С. Проектирование и строительство сборных дорожных покрытий / В. С. Орловский. М.: Транспорт, 1978. 149 с.
 4. Автомобильные дороги. Правила устройства: ТКП 059.1–2020 (33200). Введ. 01.09.2020. Минск: Минтранс, 2020. 76 с.
 5. Автомобильные дороги / Я. Н. Ковалев [и др.]. Минск: Арт Дизайн, 2006. 351 с.
 6. Бабков, В. Ф. Проектирование автомобильных дорог / В. Ф. Бабков, О. В. Андреев. М.: Транспорт, 1979. Ч. I. 367 с.
 7. Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в механике железобетона / С. Ф. Клованич. Одесса: Изд-во ОНМУ, 2007. 110 с.
 8. Метод конечных элементов как аппарат для расчета многослойных аэродромных покрытий / А. А. Хатунцев [и др.] // Проблемы и технологии инженерно-аэродромного обеспечения войск: сб. науч. ст. по материалам докладов XXIII Межвуз. НПК «Перспектива-2013». Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2013. С. 119–124.
 9. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
 10. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. М.: Стройиздат, 1984. 639 с.
- Поступила 16.02.2022
Подписана в печать 18.04.2022
Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Levitsky E. F., Chernigov V. A. (1980) *Concrete Road Surfaces*. Moscow, Transport Publ. 288 (in Russian).
2. Nosov V. P. (2011) State, Problems, Prospects for the Use

- of Cement Concrete in the Construction of Roads. *Nauka i Tekhnika v Dorozhnoi Otrastli = Advanced Science and Technology for Highways*, (4), 1–3 (in Russian).
3. Orlovsky V. S. (1978) *Design and Construction of Prefabricated Road Surfaces*. Moscow, Transport Publ. 149 (in Russian).
4. ТКП [Technical Code of Common Practice] 059.1–2020 (33200). *Car Roads. Rules for the Construction*. Minsk, Mintrans Publ., 2020. 76 (in Russian).
5. Kovalev Ya. N., Leonovich I. I., Yaromko V. N., Verenko V. A., Minin A. V., Cheptsov G. V., Yatsevich I. K. (2006) *Car Roads*. Minsk, Art Dizain Publ. 351 (in Russian).
6. Babkov V. F., Andreev O. V. (1979) *Road Design. Part I*. Moscow, Transport Publ. 367 (in Russian).
7. Klovaniich S. F. (2007) *Finite Element Method in Reinforced Concrete Mechanics*. Odessa, Publishing House of Odessa National Maritime University. 110 (in Russian).
8. Khatuntsev A. A., Popov A. N., Makarov E. V., Burakov A. V. (2013) Finite Element Method as Apparatus for Calculating Multilayer Airfield Pavements. *Problems and Technologies of Engineering and Airfield Support of Troops: Collection of Scientific Papers of XXIII Inter-university Scientific and Practical Conference "Perspective-2013"*. Voronezh, Publishing House of Air Force Military Educational and Scientific Centre "Air Force Academy", 119–124 (in Russian)
9. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
10. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. Moscow, Stroyizdat Publ. 639 (in Russian).

Received: 16.02.2022

Accepted: 18.04.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-201-210>

УДК 624.131.439; 627.43

Проблемы разжижения грунтов в основаниях гидротехнических сооружений

Канд. техн. наук, доц. К. П. Моргунов¹⁾, докт. техн. наук, проф. М. А. Колосов¹⁾

¹⁾Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова
(Санкт-Петербург, Российская Федерация)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Представлен анализ вероятности и условий возникновения разжижения грунтов, залегающих в основании и окрестностях гидротехнических сооружений. Как правило, гидротехнические сооружения возводятся в долинах водотоков, структура грунтов в которых способствует возникновению процессов разжижения. Грунты эти мелкофракционные несвязные, состоящие обычно из мелко- и среднезернистых или пылеватых песков, супесей, перемежающихся слоями суглинков. Массивы под напорными гидротехническими сооружениями достаточно водонасыщенные. Разжижение грунтов происходит в результате разрушения структурных связей между частицами в водонасыщенных дисперсных грунтах под действием напряжений разного типа. Внешняя динамическая или статическая нагрузка, приложенная к водонасыщенному массиву, сложенному из слабых мелкодисперсных грунтов, может привести к полной или частичной потере грунтом несущей способности и переходу его в текучее состояние. Величина сопротивления грунта сдвигу определяется степенью его водонасыщенности; при влажности порядка 20 % угол естественного откоса песчаных грунтов существенно уменьшается. Восстановлению прочностных свойств грунтов препятствует поровое давление воды, процесс уплотнения (консолидации) массива грунта происходит после отжатия воды из пор, время протекания которого зависит от фильтрационных свойств массива. Разжижение грунтов приводит к нарушению нормального функционирования гидротехнического сооружения, созданию аварийных ситуаций. В статье представлены примеры возникновения аварий на гидротехнических сооружениях России, вызванных явлениями разжижения. Отмечено, что основные направления защиты конструкций гидротехнических сооружений от опасного разжижения – предотвращение возможности возникновения разжижения и уменьшение его вредных последствий. В этой связи рассмотрено несколько способов – уплотнение и упрочение грунтов в основании сооружений; устройство фильтрующей пригрузки с использованием геотекстиля и георешеток; создание эффективной дренажной (водоотводящей) системы.

Ключевые слова: разжижение грунта, водонасыщенные мелкодисперсные грунты, динамические и статические нагрузки, поровое давление, сопротивление сдвигу

Для цитирования: Моргунов, К. П. Проблемы разжижения грунтов в основаниях гидротехнических сооружений / К. П. Моргунов, М. А. Колосов // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 201–210. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-201-210>

Soil Liquefaction Problems in the Foundations Hydraulic Structures

К. Р. Morgunov¹⁾, М. А. Kolosov¹⁾

¹⁾Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping (Saint-Petersburg, Russian Federation)

Abstract. An analysis of the probability and conditions for the occurrence of soil liquefaction at the base and in the vicinity of hydraulic structures is presented in the paper. As a rule, hydraulic structures are erected in the valleys of watercourses, the structure of the soil in which contributes to the occurrence of liquefaction processes. These soils are fine-grained,

Адрес для переписки

Моргунов Константин Петрович
Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова
ул. Двинская, 5/7,
198035, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
Тел.: +7 812 748-96-92
morgunovkp@gumrf.ru

Address for correspondence

Morgunov Konstantin P.
Admiral Makarov State University
of Maritime and Inland Shipping
5/7, Dvinskaya str,
198035, Saint-Petersburg, Russian Federation
Tel.: +7 812 748-96-92
morgunovkp@gumrf.ru

non-cohesive, usually consisting of fine- and medium-grained or silty sands, sandy loams, interspersed with layers of loams. Massifs under pressure hydraulic structures are quite water-saturated. Soil liquefaction occurs as a result of the destruction of structural bonds between particles in water-saturated dispersed soils under the action of stresses of various types. An external dynamic or static load applied to a water-saturated massif composed of weak, finely dispersed soils can lead to a complete or partial loss of soil bearing capacity and its transition to a fluid state. The magnitude of soil resistance to shear is determined by the degree of its water saturation; at a moisture content of about 20 %, the angle of repose of sandy soils is significantly reduced. The restoration of the strength properties of soils is prevented by the pore water pressure, the process of compaction (consolidation) of the soil mass occurs after the water is squeezed out of the pores, the flow time of which depends on the filtration properties of the massif. Liquefaction of soils leads to a disruption in the normal functioning of a hydraulic structure, the creation of emergency situations. The paper provides examples of accidents at hydraulic structures in Russia caused by liquefaction phenomena. It is noted that the main directions of protecting the structures of hydraulic structures from dangerous liquefaction are to prevent the possibility of liquefaction and the reduction of its harmful effects. In this regard, several methods are considered – compaction and strengthening of soils at the base of structures; filtering surcharge device using geotextiles and geogrids; creation of an effective drainage system.

Keywords: soil liquefaction, water-saturated fine soils, dynamic and static loads, pore pressure, shear resistance

For citation: Morgunov K. P., Kolosov M. A. (2022) Soil Liquefaction Problems in the Foundations Hydraulic Structures. *Science and Technique*. 21 (3), 201–210. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-201-210> (in Russian)

Введение

При проектировании, строительстве и эксплуатации гидротехнических сооружений (ГТС) особое внимание следует уделять структуре и свойствам грунтов в их основании, в теле грунтовых плотин и дамб, а также фильтрационным процессам в массиве этих грунтов. Сооружения гидроузлов располагаются, как правило, в речных долинах на аллювиальных грунтах, представляющих собой перемежение слоев песка и суглинка. Такие грунты принято считать слабыми, несвязными. В процессе строительства подпорных сооружений – дамб, плотин, шлюзов – в русле водотока (реки, канала) создаются перепады уровней, поддерживаемые напорным фронтом гидроузла, формируются водохранилища. Это способствует водонасыщению грунтов основания. В приплотинной области в массиве грунтов основания сооружений и берегов водохранилищ формируется поле фильтрационных потоков с достаточно высокими градиентами напоров. Такие условия способствуют развитию процессов подтопления и разжижения грунтов. Многочисленные инциденты, зафиксированные на ГТС, заставляют внимательнее рассмотреть возможность разжижения грунтов и его влияние на состояние (устойчивость, сохранение целостности и эксплуатационных свойств) сооружений.

Материалы и методы

Одной из характерных особенностей рыхлых водонасыщенных несвязных грунтов явля-

ется их способность переходить в разжиженное состояние [1]. Разжижением грунта принято называть переход его в текучее состояние вне зависимости от причины такого изменения и величины последующих деформаций [2–4]. При этом происходит разрушение связей между частицами в водонасыщенных дисперсных грунтах. Процесс разжижения состоит из трех стадий (рис. 1):

– разрушения исходной структуры грунта вследствие разрыва структурных связей между частицами, например при силовом воздействии на массив грунта, при этом частицы грунта покидают свое первоначальное положение;

– стадии, когда частицы грунта стремятся занять новое, более устойчивое положение в дисперсной структуре массива, однако этому противодействует поровое давление в пространстве между частицами. Таким образом, грунт оказывается в разжиженном состоянии, при котором из-за потери непосредственных контактов между частицами не происходит передачи нагрузки от собственного веса частиц или внешней нагрузки и система частиц приобретает способность растекаться;

– стадии переукладки частиц при отжатии воды, восстановления структуры и постепенного упрочения (консолидации) грунта, время которого зависит от скорости отжатия воды. При этом происходит полная или частичная потеря грунтом несущей способности, несвязный водонасыщенный грунт на время превращается в тяжелую вязкую жидкость.

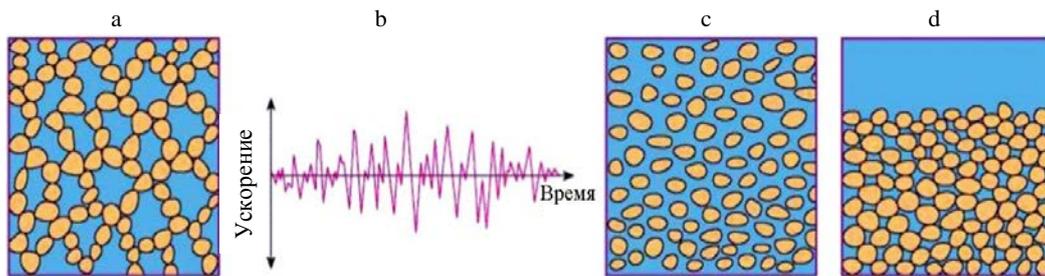


Рис. 1. Разжижение и уплотнение песчаного грунта [4]: а – рыхлый водонасыщенный грунт с крупными порами; б – динамическое воздействие на массив грунта; с – водонасыщенный грунт разжижен, связи между частицами разрушены; д – уплотненный грунт после отжатия воды и оседания частиц

Fig. 1. Liquefaction and compaction of sandy soil [4]: а – loose water-saturated soil with large pores; б – dynamic impact on the soil mass; с – water-saturated soil is liquefied, bonds between particles are broken; д – compacted soil after squeezing out water and settling particles

Необходимым условием для возникновения явлений разжижения грунта является полное или близкое к полному насыщение грунта водой [1]. Чаще всего разжижаются водонасыщенные мелкие и пылеватые пески, супеси [2]. Однако, как показали исследования, разжижаться могут также глинистые [5], щебенистые [6] и гравелистые [7, 8] грунты.

В зависимости от характера нагрузок, воздействующих на массивы грунта, разжижение может проявляться в различной степени. При землетрясениях, характеризующихся значительными амплитудами колебаний нагрузок, разжижения возникают на больших площадях неожиданно и происходят в течение нескольких минут, иногда даже секунд, принося большой ущерб и порой сопровождаясь человеческими жертвами. Именно разжижением грунтов зачастую вызываются разрушения при землетрясениях [9–12].

Разжижение грунта может проявиться не только при динамических (землетрясения), но и при статических нагрузках на массив. Пример этого – одна из крупнейших инженерных катастроф в США (авария на плотине Сен-Френсис, Калифорния), а также описанные ниже аварии на реке Вайонт у горы Монте-Ток (Италия) и обрушение склона на реке Бурее (Дальний Восток, Россия). В данных случаях определяющим фактором являлась степень водонасыщения массива грунта. При этом чем больше пористость грунта, тем при меньших нагрузках начинается разжижение. Прочность и устойчивость грунтов определяются величиной сцепления, характеризующего сопротивление ча-

стиц перемещающим усилиям, и углом внутреннего трения – эти два параметра вместе обуславливают сопротивление грунтов сдвигу. Исследования [4, 13, 14] показывают, что угол естественного откоса при влажности 13–14 % имеет обычное для соответствующих песков и супесей значение; при повышении влажности этот угол резко уменьшается. Следует учитывать, что при повышении водонасыщенности грунта, т. е. все более полном заполнении пор водой, на частицы грунта начинает действовать взвешивающая (архимедова) сила. Структура естественных грунтов характерна разным размером частиц (в диапазоне, определяемом характером грунта), беспорядочной их укладкой, вызывающей образование пор всевозможного размера, различные жесткость скелета и степень устойчивости отдельных частиц, нагруженных в разной степени. Поэтому в массиве грунта напряжения от веса вышележащих слоев для различных точек оказываются неодинаковыми, и взвешивающее давление воды, действующее на частицы, зачастую становится соизмеримым с действующими напряжениями и является той силой, которая приводит к нарушению устойчивости частиц и их перемещению. При деформации (сдвиге) частиц грунтового массива нарушается их контакт друг с другом, и вместо песчаного грунта, сохранявшего ранее устойчивость благодаря силам трения частиц одна о другую, получается суспензия, т. е. вода с взвешенными в ней частицами, происходит разжижение массива грунта. Новой укладке частиц препятствует наличие в порах воды, и требуется определенное время на ее

отжатие. Чем более слабая водоотдача и низкие фильтрационные свойства у грунтового массива, тем дальше грунт находится в разжиженном состоянии.

Как показывает опыт [2, 4], наибольшей предрасположенностью к разжижению обладают «переходные» (от чистых песков к глинам) виды грунтов, такие как пылеватые слабоглинистые пески, супеси и некоторые типы легких суглинков. Они содержат некоторое количество весьма мелких частиц, что определяет их слабую водоотдачу и низкое значение коэффициента фильтрации. Поэтому такие грунты в разжиженном состоянии имеют минимальную вязкость (меньшую, чем у разжиженных глин или песков) и наибольшую подвижность среди всех дисперсных грунтов. Наличие глинистых частиц обуславливает способность этих грунтов к длительному нахождению в разжиженном состоянии. При этом предположение о том, что при замачивании снижается прочность материала грунтов и уменьшается коэффициент трения между частицами грунта, не находит подтверждения, так как процессы разжижения, сопровождающиеся просадками поверхности, наблюдаются не только в тех материалах, прочность которых уменьшается при намокании (например, в известняках), но и в грунтах, прочность частиц которых неизменна в сухом и водонасыщенном состоянии (гранитах, диабазе). Изменение коэффициента трения при замачивании грунтов действительно происходит, однако у гидрофобных материалов коэффициент трения уменьшается, а у гидрофильных (кварц, кальцит), из которых преимущественно и слагаются песчаные грунтовые массивы, увеличивается при замачивании.

Порой возникает неполное (частичное) разжижение, при котором часть сжимающих напряжений в скелете грунта сохраняется и грунт обладает некоторой несущей способностью. Количественной характеристикой степени разжижения в [1] предложено считать отношение избыточного давления p суспензии при частичном разжижении к наибольшему избыточному давлению p_{\max} , соответствующему полному разжижению грунта:

$$N = \frac{p}{p_{\max}}$$

Значения N могут меняться от 0 (отсутствие разжижения) до 1 (полное разжижение).

Устойчивость к разжижению в современной мировой практике [3] обычно оценивают коэффициентом безопасности, который определяется как отношение допускаемого сопротивления разжижению, выраженное величиной циклических напряжений, способных вызвать разжижение, к циклическому напряжению, возникающему в результате силового воздействия на грунт (например, землетрясения):

$$F_L = \frac{CRR}{CSR} K_\sigma K_\alpha,$$

где CRR (cyclic resistance ratio) – относительная амплитуда динамических напряжений – коэффициент циклического сопротивления; CSR (cyclic stress ratio) – критическое значение амплитуды напряжений – коэффициент циклического напряжения; K_σ – коэффициент, учитывающий напряжения от собственного веса грунта; K_α – тоже, учитывающий наклон поверхности земли, принимаемый равным 1 при наклоне поверхности менее 6° .

Принято считать [15], что при $F_L = 1,25 \dots 1,50$ слой грунта устойчив к разжижению, при $F_L = 1,0 \dots 1,2$ грунты разжижаемы.

В истории известно немало происшествий, в том числе тяжелых аварий и катастроф, произошедших вследствие потери устойчивости грунтовых слоев. При этом значительные массы грунта внезапно переходили в состояние суспензии и растекались, сооружения, построенные на таких грунтах, сдвигались и, постепенно погружаясь, «утопали» в грунте. Разжижение слоев грунта вызывало оползни и плывуны. Множество происшествий связано с землетрясениями [16]: в китайской провинции Ганьсу в 1920 г. (общее число жертв, по данным Международного института сейсмологии, составило более 235 тыс. чел.); в Таджикистане вблизи города Хаит в 1949-м (погибло более 7200 чел.); на Аляске в 1964 г. (около 70 зданий разрушено, погиб 131 чел.); в Гиссарской долине Таджикистана в 1989 г. (274 чел. погибли, десятки людей были ранены и госпитализированы). Особую опасность создают дождевые и талые воды, увеличивающие поступление

воды в грунт, что является важным фактором, провоцирующим оползни.

Особенностями возведения и функционирования гидротехнических сооружений в русле водотока, как уже отмечалось, являются формирование напорного фронта и наполнение водохранилища. Определяющую роль при этом играет характер грунтов, залегающих в основании сооружения и в ложе водохранилища, а также изменение степени их водонасыщенности в процессе наполнения водохранилища.

Инцидентом, иллюстрирующим опасность обводнения грунтов основания плотины, является катастрофа, произошедшая в 1963 г. на реке Вайонт, протекающей в итальянских Альпах к северу от Венеции. Строительство началось в 1957-м, и в течение двух лет была возведена плотина высотой 262 м и длиной по гребню 190 м. В 1960 г. началось наполнение водохранилища. Однако геология участка, занятого водохранилищем, оказалась весьма сложной. Мощные известняки, слагающие гору Монте-Ток, на склоне которой возводилась ГЭС, круто падают в направлении оси синклинали, а затем выполаживаются и обнажаются в ущелье реки Вайонт. Среди известняков часто встречаются и тонкие прослой мергелей. На склоне Монте-Ток эту массу породы удерживала сила трения с подстилающими наклонно залегающими пластами. После начала наполнения водохранилища было зафиксировано медленное оползание склона горы. В октябре 1960 г. скорость движения всего склона увеличилась, и в известняке развилась трещина (рис. 2).

Однако после того как уровень воды в водохранилище понизили, движение прекратилось.



Рис. 2. Трещина в грунте на склоне горы Монте-Ток

Fig. 2. Crack in the ground on the slope of mount Monte-Tok

В ноябре 1960 г. весь склон горы Монте-Ток ежедневно перемещался в среднем на 4,3 см, это движение продолжалось в течение 10 сут. Было зафиксировано повышение уровня грунтовых вод, установлено, что перемещение заметно ускорялось, когда водохранилище оказывалось заполненным до наиболее высокой отметки. Поэтому заполнение стали проводить этапами и под постоянным контролем. К сентябрю 1963 г. общее перемещение склона Монте-Ток на различных участках составило до 4 м. В июле 1963-го отметка воды в водохранилище впервые превысила 690 м над уровнем моря и склон Монте-Ток начал двигаться быстрее. К концу сентября он уже перемещался на 3 см/сут. Поэтому уровень воды понизили до 690 м. Однако, несмотря на понижение уровня воды, склон горы все еще продолжал двигаться. Контрольные наблюдения показали, что 8 октября весь оползающий участок уже двигался как единая масса, на следующее утро скорость движения достигла 20 см/сут. В этот же день прошел сильный дождь. 9 октября 1963 г. весь склон Монте-Ток устремился вниз в виде огромного оползня. Около 350 млн м³ породы, перемещаясь со скоростью 110 км/ч, обрушилось в водохранилище, частично перенеслось через него и взметнулось на 120 м вверх по противоположному берегу. Волна, перехлестнув через плотину, промчалась по ущелью Вайонт стеной высотой более 150 м. Погибли 2117 чел. Сама плотина, как это ни удивительно, практически не пострадала, волна снесла лишь верхний метр ее кромки (рис. 3).



Рис. 3. Водохранилище гидроузла Вайонт, заполненное оползнем

Fig. 3. Reservoir of Wyont waterworks filled with a landslide

Результаты

Анализ инцидентов мировой практики заставляет внимательнее рассмотреть причины аварий, произошедших в последние годы на ГЭС России.

Непроектная осадка здания строящейся Загорской ГАЭС-2. Загорская гидроаккумулирующая станция (ГАЭС) расположена на реке Кунья в Сергиево-Посадском районе Московской области. Строительство второй очереди (Загорской ГАЭС-2) было начато в 2007 г. В марте 2013-го после разбора временной перемычки нижний бьеф Загорской ГАЭС-2 был заполнен водой, а здание станции поставлено под напор. К сентябрю 2013 г. строительная готовность станции превышала 90 %, ввод в эксплуатацию первых двух гидроагрегатов Загорской ГАЭС-2 был намечен на четвертый квартал 2013-го (рис. 4).



Рис. 4. Загорская ГАЭС: справа – ГАЭС-1; слева – ГАЭС-2
Fig. 4. Zagorskaya PSP: on the right – PSP-1; on the left – PSP-2

17 сентября 2013 г. в 22 ч 57 мин было обнаружено поступление воды в машинный зал строящейся Загорской ГАЭС-2. В течение короткого промежутка времени вода заполнила машинный зал станции и пристанционную площадку. В результате осмотра места происшествия и произведенных измерений было установлено, что правая часть здания ГАЭС (вместе с одним из блоков подпорной стенки) просела на 1,17 м, а левая поднялась на 0,22 м, т. е. произошел «перекос» здания на правую сторону (рис. 5). Затопление здания происходило через нарушенные деформационные швы и входные отверстия недостроенных водоводов.

После отсыпки перемычки, изолирующей здание Загорской ГАЭС-2 от нижнего бассейна,



и откачки воды начались исследования причин аварии, в том числе путем бурения скважин в районе правой части здания ГАЭС и непосредственно под самим зданием. Были обнаружены сквозные (от нижнего бьефа к верхнему) размывы грунта максимальной глубиной до 10 м. Грунты основания здания ГАЭС-2 представлены мелкозернистыми песками. Вследствие неэффективной работы противодиффузионной и дренажной систем станции в районе примыкания здания ГАЭС к подпорной стенке происходило насыщение грунтов основания водой, фильтрующейся из нижнего бьефа. 17 сентября произошло выпирание грунта в верхнем бьефе и туда прорвался разжиженный грунт из-под основания здания. Далее сформировался сквозной канал под зданием ГАЭС, через который вода поступала из нижнего бьефа в верхний.

Происходили дальнейшее вымывание грунта и расширение полости под зданием ГАЭС, что и вызвало его осадку. Процесс развивался весьма быстро и завершился после уравнивания отметок воды в верхнем и нижнем бьефах. Таким образом, авария оказалась вызванной неэффективной работой противодиффузионных устройств (что явилось следствием несовершенства их проекта), недостаточной изученностью свойств грунтов основания и неучетом возможности разжижения грунтов. Все это не позволило своевременно распознать угрозу негативного развития ситуации.

Оползень на реке Бурея. На Дальнем Востоке часто происходят оползневые явления [18]. 11 декабря 2018 г. в Хабаровском крае случилась весьма значительная по своим масштабам природная катастрофа. С крутого левого склона долины реки Буреи, расположенного примерно в 100 км выше по течению от Бурейской ГЭС, сошел крупный оползень. В месте схода оползневая долина представляет собой глубокое ущелье. Левый берег реки высокий (около 400 м) и крутой (с уклоном 30° – 35°), а правый – пологонаклонный террасовидный склон шириной более 1 км и высотой в тыловой части до 50 м над современным уровнем воды.



Рис. 5. Схема аварии на Загорской ГАЭС-2 [17]

Fig. 5. Scheme of the accident at the Zagorskaya PSP-2 [17]

На момент оползня долина была затоплена водами Бурейского водохранилища, поэтому ширина реки составляла 500–550 м, а глубина – около 70 м. Устьевые участки притоков реки Буреи также заполнены водой и образуют узкие и глубокие заливы протяженностью 1,5–3,0 км (рис. 6). Огромная масса горных пород, сорвавшись со склона и сместившись в глубокий водоем, вытеснила большой объем воды. В результате сформировалась высокая волна, по механизму образования представляющая собой цунами. Волна взломала лед и обрушилась на противоположный пологий склон долины. Поток продвинулся вверх по склону более чем на 1 км, достигнув высоты 56 м над урезом воды в водохранилище.

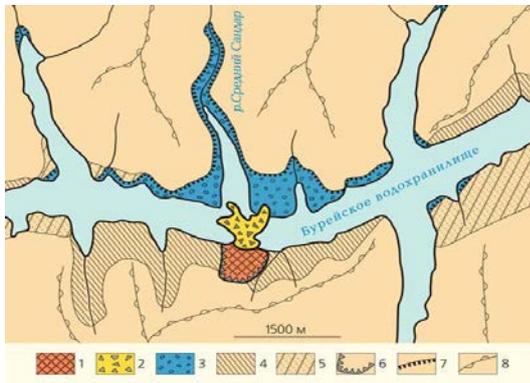


Рис. 6. Положение оползня и границы волны цунами [19]: 1 – поверхность скольжения оползня; 2 – оползневое тело; 3 – ареал уничтоженного леса; 4 – крутые склоны; 5 – пологие склоны; 6 – стенка срыва; 7 – граница заплеска волны цунами; 8 – гребни водоразделов

Fig. 6. Landslide position and tsunami wave boundaries [19]: 1 – landslide sliding surface; 2 – landslide body; 3 – area of destroyed forest; 4 – steep slopes; 5 – gentle slopes; 6 – stall wall; 7 – tsunami wave splash boundary; 8 – watershed ridges

Обратная волна вернулась к левому берегу Буреи. Она перехлестнула низкую часть оползневого тела и подошла к подножью оползня. Постепенно снижаясь, волна прошла вверх по долине Буреи вдоль основной акватории водохранилища на 12 км и примерно на 8–10 км в противоположном направлении.

Для обеспечения нормальной работы Бурейской ГЭС, расположенной ниже по течению, в середине февраля 2019 г. специалисты Министерства обороны Российской Федерации организовали и успешно провели взрывные работы по частичному разрушению возникшей в результате оползня дамбы и восстановлению свободного перетока воды из верхней части водохранилища в нижнюю (рис. 7).



Рис. 7. Тело оползня на реке Буреи и искусственный проран в нем: слева – склон, с которого сошел оползень

Fig. 7. Body of a landslide on the Bureya river and an artificial hole in it: on the left – the slope from which the landslide came down

Рассматривая версию о разжижении грунтов как причине оползня, необходимо изучить характер грунта и его насыщение водой. Оказывается, грунт оползня – скальная, но весьма древняя (возраст около 1000 млн лет) и потому сильно раздробленная перемолотая порода. За миллионы лет она превратилась в весьма неустойчивую структуру, состоящую из рыхлого и хрупкого грунта; вблизи стенки срыва исследователи позднее обнаружили множество трещин. С другой стороны, при заполнении водохранилища, закончившемся летом 2009 г., нижняя часть склона сопки, с которой и сошел оползень, оказалась затоплена водой, уровень воды в реке поднялся на 70 м. По трещинам и пустотам вода проникла в глубь склона, делая его все более неустойчивым, при этом склон сопки достаточно крутой и высокий. Таким образом, в склоне вполне мог сформироваться слой разжиженного грунта, который и стал «смазкой» для вышележащего массива. Что послужило «пусковым» толчком для оползня, сейчас, по-видимому, определить невозможно: может быть, просто накопилось достаточное напряжение в массиве.

Дамба обвалования канала имени Москвы между судоходными шлюзами № 7 и 8. 10 января 2019 г. в районе Тушино на северо-западе Москвы произошло оплывание откоса дамбы обвалования канала имени Москвы между судоходными шлюзами № 7 и 8, и разжиженный грунт начал поступать с потоком воды на Волоколамское шоссе. Официальная причина аварии – поступление воды из канала под суглинистый противофильтрационный экран по линии разрыва между шпунтом и туннелем с дальнейшим разуплотнением суглинков на западной дамбе и возникновением про-

вала на внешнем откосе. Объяснение – низкое качество строительно-монтажных работ.

Однако представляется, что основная причина аварии – разжижение песчаных грунтов в пазухе сооружений транспортного туннеля. Ограждающая канал дамба состоит из противофильтрационного суглинистого экрана и упорной песчаной призмы, дренаж для фильтрующейся воды отсутствует. Вода, поступающая в песчаную призму из канала через контактный шов между покрытием туннеля и экраном, заполнила весь ее объем. Полному водонасыщению призмы способствовало отсутствие контурного дренажа между плитой покрытия туннеля и песчаной насыпью, т. е. качественного дренирования (отвода воды) из дамбы организовано не было. Зимой откос дамбы с растительным грунтом и травой замерз, отток воды из призмы и ее испарение совсем прекратились. При превышении пороговых значений сил сцепления грунт «поплыл» (рис. 8).



Рис. 8. Поступление воды из канала имени Москвы на Волоколамское шоссе

Fig. 8. Water inflow from the Moscow Canal to Volokolamskoe Highway

Приведенные выше примеры позволяют утверждать, что во многих случаях причиной происшествий на гидротехнических сооружениях является разжижение грунтов основания ГТС либо прилегающих грунтовых массивов. Зачастую это признается и в выводах официальных расследований.

Обсуждение

Возможность возникновения в грунтах основания сооружений зон разжиженного грунта заставляет задуматься о средствах и способах защиты от этой опасности. Мероприятия, направленные на обеспечение устойчивости и прочности ГТС и защиты от разжижения грунта и его последствий, можно условно разделить на два направления:

- предотвращение возможности возникновения разжижения;
- уменьшение вредных последствий разжижения.

Для ГТС характерны значительные по площади массивы несвязных мелкофракционных грунтов в основании. Поэтому для предотвращения разжижения эффективными представляются уплотнение и упрочение грунтов в основании сооружений. Следует учитывать и то обстоятельство, что стандартные лабораторные определения свойств грунтов, в том числе их способности к разжижению, выполняются для ненагруженных образцов. В реальных условиях давление сооружения создает значительную пригрузку основания, что оказывает влияние на способность грунтов к разжижению. При этом наиболее опасные в отношении возможности разжижения – краевые и непригруженные соседние участки. Исследования [19] влияния на разжижение заглубления конструкций показали, что наличие заглубления снижает вероятность разжижения по сравнению с аналогичными сооружениями без глубоких фундаментов. Поэтому уплотнения и пригрузки имеет смысл устраивать по краю и вокруг сооружения; в земляных плотинах их целесообразно проводить на участках подводной части откоса и в местах выхода кривой депрессии на поверхность низового откоса. В качестве фильтрующей пригрузки возможны использование геотекстиля, устройство георешеток, каменной пригрузки.

Существует вариант предварительного армирования грунтов основания до начала строительства либо дополнительной обработки грунтов с целью уменьшения вероятности разжижения. В [20] для снижения рисков разжижения предложен метод искусственного введения газа (воздуха) в сжимаемые почвы. Понятно, что таким образом уменьшается водонасыщение грунта, однако остается вопрос о долговечности существования пузырьков в почве, о возможности растворения, диффузии и выходе пузырьков воздуха из грунтового массива. В [21] предлагается замена грунтов основания сооружения искусственной смесью песка, шлака и бентонита. Утверждается, что смесь песка с 4 % шлака и 3 % бентонита показала наибольшее эффективное напряжение и наименьшее избыточное поровое давление, т. е. наименьшую склонность к разжижению и наименьшее время последующей консолидации грунта.

Способом предотвращения разжижения и уменьшения его вредных последствий является

ся уменьшение водонасыщенности грунтов. Это приведет, в том числе, и к ускорению процессов их консолидации. За короткий период пребывания в разжиженном состоянии не произойдет значительных смещений грунта вследствие его растекания и, значит, ожидаемы лишь небольшие осадки сооружений за счет уплотнения грунта. Уменьшение содержания воды в грунте достигается устройством дренажных систем, использованием вакуумных иглофильтров и др.

Еще одна возможность уменьшить вредные последствия разжижения – опереть сооружение на устойчивое основание. Зачастую под слоями мелкофракционных водонасыщенных грунтов, расположенных непосредственно под основанием гидротехнического сооружения, на глубинах порядка 15–20 м от подошвы сооружения залегают более плотные слои – глины, плотные пески и т. п. Тогда для переноса нагрузки от веса бетонных конструкций сооружения на более прочные грунты основания возможно устройство конструкций в грунте, передающих нагрузки (например, свайного ростверка).

ВЫВОДЫ

1. Основными факторами, увеличивающими геотехнические риски, являются некачественные или недостаточные инженерные изыскания для строительства. Неполнота и ошибочность инженерно-геологических данных, используемых при проектировании, особенно часто приводят к катастрофам на гидротехнических объектах, поскольку на окружающие их породы воздействуют огромные гидростатические силы и изменения давлений.

2. Свойства грунтов в основании сооружений, а также напряжения, формирующиеся в массивах грунтов, могут приводить к разжижению грунтов оснований гидротехнических сооружений, что часто является причиной нештатных перемещений и деформаций конструкций таких сооружений, которые могут привести к авариям и катастрофам с человеческими жертвами и значительным материальным ущербом.

3. Разжижению грунтов способствуют наличие в основании сооружений, расположенных, как правило, в долинах водотоков, несвязных мелкодисперсных грунтов, а также то обстоятельство, что после возведения подпорных конструкций и создания напорного фронта гидроузла грунты основания насыщаются фильтрационными водами со значительными градиен-

тами напора. При отсутствии или затруднении водоотведения из массивов грунта в них формируются условия для разжижения. Эти явления необходимо учитывать как на стадии проектирования, так и в процессе эксплуатации гидротехнических сооружений. Как показал анализ, неучет опасности разжижения грунтов приводит к неправильной оценке состояния и эксплуатационных перспектив для гидротехнических сооружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов, П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений / П. Л. Иванов. М.: Высш. шк., 1985. 352 с.
2. Крамаренко, В. В. Грунтоведение / В. В. Крамаренко. М.: Юрайт, 2020. 430 с.
3. Болдырев, Г. Г. Оценка потенциала грунтов к разжижению [Электронный ресурс] / Г. Г. Болдырев, И. Х. Идрисов // Геоинфо. 20 июня 2019. Режим доступа: <https://geoinfo.ru/product/boldyrev-gennadij-grigorevich/ocenka-potenciala-gruntov-k-razzhizheniyu-40984.shtml>.
4. Вознесенский, Е. А. Землетрясения и динамика грунтов / Е. А. Вознесенский // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 2. С. 101–108.
5. An Experimental Method to Verify the Failure of Coastal Structures by Wave Induced Liquefaction of Clayey Soils / V. Chávez [et al.] // Coastal Engineering. 2017. Vol. 123. P. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2017.02.002>.
6. Wen-Jong, Chang. Liquefaction Characteristics of Gap-Graded Gravelly Soils in K0 Condition / Wen-Jong Chang, Chi-Wen Chang, Jhang-Kai Zeng // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2014. Vol. 56. P. 74–85. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2013.10.005>.
7. Колосов, М. А. Лабораторные исследования просадочных свойств крупнообломочных материалов / М. А. Колосов // Сб. науч. тр. молодых спец. Ч. III. Водные пути и изыскания. Л.: ЛИВТ, 1973. С. 178–188.
8. Post-Liquefaction Shearing Behavior of Saturated Gravelly Soils: Experimental Study and Discrete Element Simulation / Yong Wang [et al.] // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2020. Vol. 12, Iss. 5. P. 1119–1130. <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2020.01.007>.
9. Seed, H. B. Analysis of Soil Liquefaction: Niigata Earthquake / H. B. Seed, I. M. Idriss // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. 1967. Vol. 93, Iss. 3. P. 83–108. <https://doi.org/10.1061/jsfeaq.0000981>.
10. Surface Faulting Accompanying the Borah Peak Earthquake and Segmentation of the Lost River Fault, Central Idaho / A. J. Crone [et al.] // Bulletin of the Seismological Society of America. 1987. Vol. 77, No 3. P. 739–770. <https://doi.org/10.1785/BSSA0770030739>.
11. The Deadliest Stable Continental Region Earthquake Occurred Near Bhuj on 26 January 2001 / B. K. Rastogi [et al.] // Journal of Seismology. 2001. Vol. 5. P. 609–615. <https://doi.org/10.1023/A:1012228507533>.
12. Soil Liquefaction Effects in the Central Business District During the February 2011 Christchurch Earthquake / M. Cubrinovski [et al.] // Seismological Research Letters. 2011. Vol. 6, No 82. P. 893–904. <https://doi.org/10.1785/gssrl.82.6.893>.
13. Болдырев, Г. Г. Руководство по интерпретации данных испытаний методами статического и динамического

- зондирования для геотехнического проектирования / Г. Г. Болдырев. М.: Прондо, 2017. 476 с.
14. Shibata, T. Evaluation of Liquefaction Potentials of Soils Using Cone Penetration Tests / T. Shibata, V. Teparaksa // *Soils and Foundations*. 1988. Vol. 28, No 2. P. 49–60. https://doi.org/10.3208/sandf1972.28.2_49.
 15. Seed, H. B. Evaluation of Liquefaction Potential Using Field Performance Data / H. B. Seed, I. M. Idriss, I. Arango // *Journal of Geotechnical Engineering*. 1983. Vol. 109, Iss. 3. P. 458–482. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9410\(1983\)109:3\(458\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9410(1983)109:3(458)).
 16. Уолтхэм, Т. Катастрофы: неистовая Земля / Т. Уолтхэм. М.: Недра, 1982. 60 с.
 17. Схема осадки здания строящейся Загорской ГАЭС-2. Причины осадки и ликвидация последствий [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://ria.ru/20131220/985485936.html>.
 18. Махинов, А. Н. Оползень и цунами на реке Бурея 11 декабря 2018 года / А. Н. Махинов // *Природа*. 2019. № 4. С. 12–22.
 19. Unutmaz, B. Effects of Basements and Adjacent Structures on Liquefaction-Triggering Potential of Foundation Soils / B. Unutmaz // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2018. Vol. 16. P. 2757–2773. <https://doi.org/10.1007/s10518-017-0303-7>.
 20. Abdulhakim, Z. Durability of Partial Saturation to Counteract Liquefaction / Z. Abdulhakim, G. S. P. Madabhushi // *Ground Improvement*. 2017. Vol. 170, Iss. 2. P. 102–111. <https://doi.org/10.1680/jgrim.16.00025>.
 21. Sabbar, A. S. Static Liquefaction of Very Loose Sand–Slag–Bentonite Mixtures / A. S. Sabbar, A. Chegenizadeh, H. Nikraz // *Soils and Foundations*. 2017. Vol. 57, Iss. 3. P. 341–356. <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2017.05.003>.
- Поступила 29.09.2021
Подписана в печать 07.11.2021
Опубликована онлайн 31.05.2022
- REFERENCES
1. Ivanov P. L. (1985) *Soils and Foundations of Hydraulic Structures*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 352 (in Russian).
 2. Kramarenko V. V. (2020) *Ground Science*. Moscow, Yurait Publ. 430 (in Russian).
 3. Boldyrev G. G., Idriss I. Kh. (2019) Evaluation of Soil Potential to Liquefy. *Geoinfo*. Available at: <https://geoinfo.ru/product/boldyrev-gennadij-grigorevich/ocenka-potenciala-gruntov-k-razzhizheniyu-40984.shtml> (in Russian).
 4. Voznesensky E. A. (1998) Earthquakes and Soil Dynamics. *Sorosovskii Obrazovatel'nyi Zhurnal = Soros Educational Journal*, (2), 101–108 (in Russian).
 5. Chávez V., Mendoza E., Silva R., Silva A., Losada M. A. (2017) An Experimental Method to Verify the Failure of Coastal Structures by Wave Induced Liquefaction of Clayey Soils. *Coastal Engineering*, 123, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2017.02.002>.
 6. Wen-Jong Chang, Chi-Wen Chang, Jhang-Kai Zeng (2014) Liquefaction Characteristics of Gap-Graded Gravelly Soils in K0 Condition. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 56, 74–85. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2013.10.005>.
 7. Kolosov M. A. (1973) *Collection of Scientific Works of Young Specialists. Part III. Waterways and Surveys*. Leningrad, Leningrad Institute of Water Transport, 178–188 (in Russian).
 8. Yong Wang, Yanli Wang, Lingwei Kong, Zhiliang Sun (2020) Post-Liquefaction Shearing Behavior of Saturated Gravelly Soils: Experimental Study and Discrete Element Simulation. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 12 (5), 1119–1130. <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2020.01.007>.
 9. Seed H. B., Idriss I. M. (1967) Analysis of Soil Liquefaction: Niigata Earthquake. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 93 (3), 83–108. <https://doi.org/10.1061/jsfeaq.0000981>.
 10. Crone A. J., Machette M. N., Bonilla M. G., Lienkaemper J. J., Pierce K. L., Scott W. E., Bucknam R. C. (1987) Surface Faulting Accompanying the Borah Peak Earthquake and Segmentation of the Lost River Fault, Central Idaho. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77 (3), 739–770. <https://doi.org/10.1785/BSSA0770030739>.
 11. Rastogi B. K., Gupta H. K., Mandal P., Satyanarayana H. V. S., Kousalya M., Raghavan R., Jain R., Sarma A. N. S., Kumar N., Satyamurty C. (2001) The Deadliest Stable Continental Region Earthquake Occurred Near Bhuj on 26 January 2001. *Journal of Seismology*, 5, 609–615. <https://doi.org/10.1023/A:1012228507533>.
 12. Cubrinovski M., Bray J. D., Taylor M., Giorgini S., Bradley B., Wotherspoon L., Zupan J. (2011) Soil Liquefaction Effects in the Central Business District During the February 2011 Christchurch Earthquake. *Seismological Research Letters*, 6 (82), 893–904. <https://doi.org/10.1785/gssrl.102.6.893>.
 13. Boldyrev G. G. (2017) *Guidelines for Interpreting Test Data while Using Static and Dynamic Sounding for Geotechnical Design*. Moscow, Prondo Publ. 476 (in Russian).
 14. Shibata T., Teparaksa V. (1988) Evaluation of Liquefaction Potentials of Soils Using Cone Penetration Tests. *Soils and Foundations*, 28 (2), 49–60. https://doi.org/10.3208/sandf1972.28.2_49.
 15. Seed H. B., Idriss I. M., Arango I. (1983) Evaluation of Liquefaction Potential Using Field Performance Data. *Journal of Geotechnical Engineering*, 109 (3), 458–482. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9410\(1983\)109:3\(458\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9410(1983)109:3(458)).
 16. Waltham T. (1982) *Disasters: Furious Earth*. Moscow, Nedra Publ. 60 (in Russian).
 17. Scheme of Building Settlement under Construction of the Zagorsk GAES-2 [Hydrostorage Power Plant]. Causes of Precipitation and Liquidation of Consequences. Available at: <https://ria.ru/20131220/985485936.html> (in Russian).
 18. Makhinov A. N. (2019) Landslide and Tsunami on the Bureya River on December 11, 2018. *Priroda* [Nature], (4), 12–22 (in Russian).
 19. Unutmaz B. (2018) Effects of Basements and Adjacent Structures on Liquefaction-Triggering Potential of Foundation Soils. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 16, 2757–2773. <https://doi.org/10.1007/s10518-017-0303-7>.
 20. Abdulhakim Z., Madabhushi G. S. P. (2017) Durability of Partial Saturation to Counteract Liquefaction. *Ground Improvement*, 170 (2), 102–111. <https://doi.org/10.1680/jgrim.16.00025>.
 21. Sabbar A. S., Chegenizadeh A., Nikraz H. (2017) Static Liquefaction of Very Loose Sand–Slag–Bentonite Mixtures. *Soils and Foundations*, 57 (3), 341–356. <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2017.05.003>.
- Received: 29.09.2021
Accepted: 07.11.2021
Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221>

УДК 624.072.21.7

Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании

Часть 1. Теория расчета

Канд. техн. наук, доц. О. В. Козунова¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Рассмотрена прямоугольная ортотропная изолированная плита на упругом основании, моделируемом упругим однородным изотропным слоем, жестко соединенным с недеформируемым основанием. Выполнены упругий и нелинейный расчеты этой плиты с учетом ее собственного веса под действием внешней статической нагрузки. В нелинейном расчете учитывалось изменение жесткости плиты в момент трещинообразования и дальнейшего активного раскрытия трещин. Расчет гибкой ортотропной плиты на упругом основании в нелинейной постановке выполняли итерационным путем методом Б. Н. Жемочкина. Для определения коэффициентов канонических уравнений и свободных членов использовали смешанный метод строительной механики. На первой итерации плиту рассчитывали как линейно-упругую, ортотропную и однородную, на последующих – как линейно-упругую, ортотропную и неоднородную на каждом участке Жемочкина. В основной системе смешанного метода прогибы плиты с защемленной нормалью от действия сосредоточенной силы определяли методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом выражении, которое автором предложено впервые в проведенных исследованиях. Это выражение удовлетворяет не только граничным условиям защемленной плиты по перемещениям, но и бигармоническому уравнению. В нелинейных расчетах при нахождении переменной (секущей) жесткости для участка Жемочкина на каждой итерации использовали зависимость «жесткость – кривизна» для каждого из направлений X и Y , аппроксимированную нелинейной функцией, характер зависимости которой графически свидетельствует о нелинейно-упругой работе ортотропной плиты и ее деформировании с учетом трещинообразования и раскрытия трещин. Алгоритм предлагаемого решения реализован с помощью компьютерной программы Wolfram Mathematica 11.3.

Ключевые слова: ортотропная плита, метод Жемочкина, упругий слой, зависимость «жесткость – кривизна», осадки, контактные напряжения, изгибающие моменты

Для цитирования: Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1: Теория расчета / О. В. Козунова // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 211–221. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221>

Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base

Part 1. Calculation Theory

O. V. Kozunova¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers a rectangular orthotropic insulated slab on an elastic foundation, modeled by an elastic homogeneous isotropic layer rigidly connected to a non-deformable foundation. Elastic and nonlinear calculations of this plate

Адрес для переписки

Козунова Оксана Васильевна
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
kozunova@gmail.com

Address for correspondence

Kozunova Oksana V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
kozunova@gmail.com

have been carried out while taking into account its own weight under the action of an external static load. The nonlinear calculation takes into consideration the change in the rigidity of plate at the time of crack formation and further active crack opening. The calculation of a flexible orthotropic slab on an elastic foundation in a nonlinear formulation is carried out iteratively by the method of B. N. Zhemochkin. To determine the coefficients of the canonical equations and free terms, a mixed method of structural mechanics was used. The deflections of a slab with a pinched normal in the main system of the mixed method due to the action of a concentrated force are determined by the Ritz method when the deflections are represented as a power polynomial in a new original expression, which is proposed by the author for the first time in the studies. This expression satisfies not only the boundary conditions of the pinched slab in terms of displacements, but also the biharmonic equation. In nonlinear calculations, when finding the variable (secant) stiffness for the Zhemochkin section, at each iteration, the “stiffness – curvature” dependence is used for each of the X and Y directions, approximated by a nonlinear function, the nature of the dependence of which graphically indicates the nonlinear-elastic operation of the orthotropic plate and its deformation taking into account crack formation and crack opening. The algorithm for the above solution is implemented using the Wolfram Mathematica 11.3 computer program.

Keywords: orthotropic plate, Zhemochkin’s method, elastic layer, “stiffness – curvature” dependence, settlements, contact stresses, bending moments

For citation: Kozunova O. V. (2022) Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 1: Calculation Theory. *Science and Technique*. 21 (3), 211–221. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221> (in Russian)

Введение

Задача расчета плитных конструкций на упругом основании состоит в определении реактивных давлений (контактных напряжений), возникающих под подошвой фундаментных и дорожных конструкций, а также осадок сооружения в его плитной части, контактирующей с упругим основанием. Вместе с тем одна из основных задач – определение напряженно-деформированного состояния самой конструкции на упругом основании [1, 2].

Из истории развития расчета конструкций на упругом основании следует, что в результате научно-технического прогресса с введением в вычисления и нормативы компьютерных алгоритмов и их численной реализации совершенствовались и уточнялись методы расчета таких конструкций [3–6]. Это можно проследить на различных моделях упругого основания, которыми моделировались реальные грунты в естественном залегании или в искусственном основании при постановке принципиально новых задач расчета плит на упругом основании.

Разнообразие практических задач приводит к неоднозначному моделированию упругого основания. Особую трудность представляет собой выбор расчетной модели упругого основания для разных видов грунтов. Обзор моделей упругого основания для расчета фундаментов из перекрестных лент, изолированных плит сплошного сечения и балочных плит приводится в [7, 8]. В [9] в ходе статического расчета перекрестных лент фундаментов мелкозало-

жения систематизируются и классифицируются модели упругого основания с их дальнейшим практическим использованием. Например, первая модель такого основания – модель Винклера – применяется для анализа понтонов водных переправ, фундаментов на песчаных и слабых грунтах. Для расчета фундаментных балок и дорожных плит действующими нормативными документами рекомендованы модели упругого основания в виде упругих слоев или упругого полупространства.

В настоящее время интенсивно разрабатываются модели, учитывающие остаточные деформации, зоны пластического течения и другие нелинейные проявления упругого основания под эксплуатационной нагрузкой. Так, в [10] коллективом авторов предложена модель трехслойного упругого основания, представляющая собой комбинированную модель из пружин Винклера и двухслойного основания Когана [11], которая в дальнейшем была использована при статическом анализе прочности изотропных дорожных плит [12] и дорожного покрытия в целом [13]. Такая модель может применяться для широкого класса инженерных задач, а при дополнительном исследовании – и для ортотропных плит.

О методах расчета и моделировании упругого основания под гибкой плитой

С механической точки зрения, расчет плитных конструкций на упругом основании – это решение контактной задачи соприкасающихся тел [14]. Данные задачи сводятся к решению

интегральных уравнений, зависящему от ядра интегрального уравнения и формы соприкасающихся тел [15]. При простых формах контактирующих тел основная трудность состоит в определении ядра интегрального уравнения, которое еще называют функцией Грина контактирующих тел [6, 14, 15], представляющей собой функцию перемещений точек поверхности упругого основания от действия единичной сосредоточенной силы [6].

В инженерной практике нецелесообразно решать каждую контактную задачу через интегральные уравнения в связи с трудоемкими математическими вычислениями. Поэтому используют метод Б. Н. Жемочкина [16], который сводит контактную задачу к задаче строительной механики.

Вопросы расчета фундаментных и дорожных плит на упругом основании с учетом их анизотропии (в частности, ортотропии) и трещинообразования в силу неоднозначности и неопределенности исходных данных неоднородных и композиционных упругих тел (железобетона и грунтов) и в связи с этим с большой математической сложностью реализации постановок и алгоритмов решаемых задач до настоящего времени не исследованы в полной мере. Известны работы М. И. Горбунова-Посадова [2], И. А. Симвулиди [17], Г. Я. Попова [18], С. Д. Семенюка [9], С. Н. Клепикова [4], С. В. Босакова [6], в которых различными подходами проведены исследования по расчету фундаментных изотропных плит и пространственных монолитных фундаментов как системы перекрестных лент на упругом основании.

О новой модели трехслойного упругого основания

Конструкцию неоднородного (слоистого) основания предлагается моделировать [11] в виде поверхностного слоя щебня, распо-

ложенного на слое песка, который, в свою очередь, находится на естественном грунтовом полупространстве (рис. 1). Новая модель трехслойного (слоистого) упругого основания была рассмотрена в [11] и представима в виде основания Винклера (слой щебня), расположенного на двухслойном основании Когана (песок + естественный грунт).

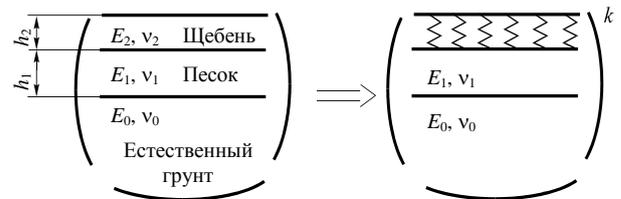


Рис. 1. Модель трехслойного (слоистого) упругого основания

Fig. 1. Model of three-layer (layered) elastic base

В [10] приведено выражение для определения перемещений $M(x_i, y_i)$ поверхности трехслойного основания от действия равномерно распределенной по прямоугольному участку размером $\left(x_k \pm \frac{\Delta x}{2}\right) \times \left(y_k \pm \frac{\Delta y}{2}\right)$ единичной силы в следующем виде:

$$W(x_i, y_i) = \frac{P(1-\nu_1^2)}{\pi E_1 h_1} F_{i,k}, \tag{1}$$

где P – внешняя нагрузка, равномерно распределенная по прямоугольному участку размером $\left(x_k \pm \frac{\Delta x}{2}\right) \times \left(y_k \pm \frac{\Delta y}{2}\right)$; E_1, ν_1, h_1 – упругие характеристики и толщина несущего слоя (песка); $F_{i,k}$ – безразмерная функция, которая определяется по формулам, полученным в [10] с учетом [6, 11, 19], и имеет следующий вид для перемещения центра загруженного прямоугольного участка:

$$F_{i,i} = \frac{1}{k \Delta x \Delta y} + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \left[\ln \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \ln \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) \right] + \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(z) \left(\frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right). \tag{2}$$

В других случаях

$$F_{i,k} = \frac{h_1}{R} + \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \times P_n(z) \left(\frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right), \quad (3)$$

где $\Gamma(n+1)$ – гамма-функция [20]; $P_n(z)$ – полином Лежандра [20]; R – равнодействующая внешних сил, $R = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$; a_n – неопределенный коэффициент разложения в ряд; n – количество членов ряда разложения функции при аппроксимации искомого решения (назначается автором в зависимости от заданной точности решения задачи, для рассматриваемой задачи достаточно $n = 3$); k – коэффициент постели верхнего слоя трехслойного основания, определяемый по формуле [2]

$$k = \frac{E_2(1 - \nu_2)}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)h_2}; \quad (4)$$

E_2, ν_2 – модуль упругости и коэффициент Пуассона верхнего слоя трехслойного основания (щебня, рис. 1); $\Delta x, \Delta y$ – размер прямоугольного участка Жемочкина; E_2, ν_2, h_2 – упругие характеристики и толщина поверхностного слоя (щебня).

Следует отметить, что формула (4) справедлива в практическом применении исследований [2] при рекомендуемой толщине упругого слоя $h_2 < \frac{b}{2}$ в зависимости от ширины b плиты, опираемой на этот слой.

Напряженно-деформированное состояние ортотропных пластин в приближенной теории изгиба. Потенциальная энергия изгиба

Приближенная теория изгиба анизотропных пластинок (тонких плит) достаточно полно и основательно изложена С. Г. Лехницким в [21]. Основы теории изгиба анизотропных пластинок ранее (в середине и конце XIX в.) были заложены в работах Ф. Геринга [22] и И. Буссинеска [23]. В начале XX в. главным образом

в трудах М. Т. Губера [24–26] предложена и в силу математических возможностей того времени разработана приближенная теория изгиба анизотропных пластинок.

В [21] рассмотрено упругое равновесие плоской однородной анизотропной пластинки постоянной толщины, закрепленной по всему краю (или по его части) и деформируемой изгибающей нагрузкой, распределенной по плоским поверхностям и нормальной к срединной поверхности в недеформированном ее состоянии. За плоскость изгиба (плоскость XU) принимается срединная плоскость недеформированной пластинки. Поместив начало координат в произвольной точке O , ось Z направляется в сторону ненагруженной внешней поверхности (рис. 2) и в силу симметрии поставленных задач в дальнейшем является одной из главных осей, а точка O совпадает с центром тяжести плиты. Объемными силами пренебрегают. По сделанному предположению относительно упругих свойств для ортотропной пластинки считаются справедливыми уравнения обобщенного закона Гука в виде (2.7) и (2.8) из [21].

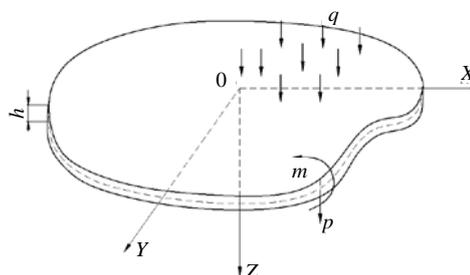


Рис. 2. Общий вид гибкой пластинки под нагрузкой
Fig. 2. General view of flexible plate under load

Приближенная теория изгиба пластинок (тонких и гибких плит) строится на двух предположениях:

1) прямолинейные отрезки, которые в недеформированном состоянии пластинки были нормальными к ее плоской срединной поверхности, при изгибе остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности («гипотеза прямых нормалей»);

2) нормальное напряжение σ_z в сечениях, параллельных срединной плоскости, есть величина, малая по сравнению с напряжениями в поперечных сечениях σ_x, σ_y и τ_{xy} .

Между составляющими напряжений, моментами и перерезывающим силами существуют простые зависимости (как (61.12) из [21]), отраженные в формулах:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{h^3}z; \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3}z; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{12H_{xy}}{h^3}z; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{12N_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right); \quad (5) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{12N_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right), \end{aligned}$$

где M_x, M_y – изгибающий момент в плоскости XOZ, YOZ соответственно; H_{xy} – крутящий момент; N_x, N_y – перерезывающая (поперечная) сила вдоль осей X, Y ; h – толщина плиты (высота поперечного сечения); z – координата точки поперечного сечения $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right)$, в которой определяются компоненты тензора напряжений; σ_x, σ_y – нормальное напряжение при изгибе; $\tau_{xy} (\tau_{yx})$ – касательное напряжение при кручении; $\tau_{xz} (\tau_{zx})$ – то же при изгибе (сдвиге) в плоскости XOZ ; $\tau_{yz} (\tau_{zy})$ – то же при изгибе (сдвиге) в плоскости YOZ .

На рис. 3а показаны составляющие напряжений на площадках, нормальных к осям X и Y , на рис. 3б – моменты и перерезывающие силы, к которым приводятся напряжения.

Для ортотропной пластинки, используя обобщенный закон Гука и зависимости (5), в [21] получены формулы относительных деформаций (61.13) и внутренних усилий (61.14). С учетом этого запишем выражения для изгибающих и крутящего моментов:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (6) \\ M_k &= H_{xy} = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

где $D_1(D_x), D_2(D_y)$ – цилиндрические жесткости изгиба анизотропной пластинки по направлениям осей Y и X соответственно, которые сов-

падают с главными осями; $D_k(D_{xy})$ – жесткость кручения пластинки, вычисляется по формуле из работы С. П. Тимошенко [27].

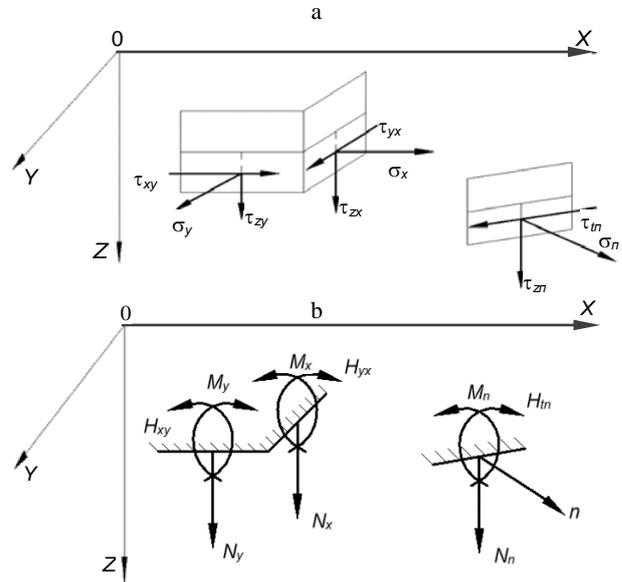


Рис. 3. Напряженное состояние гибких пластинок: а – составляющие напряжений на площадках, нормальных к осям X и Y ; б – моменты и перерезывающие силы

Fig. 3. Stress state of flexible plates:

a – components of stresses at sites normal to X and Y axes; b – moments and cutting forces

Цилиндрические жесткости изгиба пластинки определяются для главных направлений упругости и называются главными жесткостями:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}. \quad (7)$$

Запишем выражение для потенциальной энергии изгиба ортотропной пластинки, вытекающее из формул (2.2)–(2.4) в [21], если пренебречь σ_z, τ_{yz} и τ_{xz} :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (8) \end{aligned}$$

где w – искомая функция прогибов $w(x, y, z)$ (вертикальных перемещений срединной плоскости гибкой ортотропной плиты под дейст-

вием статической нагрузки в деформированном состоянии).

Следует отметить, что для железобетонных гибких пластин с возможным трещинообразованием ТНПА в статических расчетах рекомендуют использовать приведенный модуль упругости (деформации) для нахождения соответствующих жесткостей. Алгоритм такого расчета приведен далее в статье.

Учет нелинейного деформирования железобетона в гибких пластинах

Полученные ранее В. И. Мурашевым [28] и А. А. Гвоздевым [29, 30] физические уравнения железобетонных балок и плит учитывают трещинообразование и другие нелинейные деформации, возникающие в этих конструкциях и описанные Н. И. Карпенко в [31]. Моделирование грунтов в фундаментных конструкциях на упругом основании также неоднозначно и разнообразно, что достаточно полно в своих работах отразили отечественные ученые М. И. Горбунов-Посадов с соавторами [2] и С. Д. Семенюк [9]. В настоящее время интенсивно разрабатываются модели, учитывающие остаточные деформации, зоны пластического течения и иные нелинейные проявления упругого основания под эксплуатационной нагрузкой.

Необходимо отметить, что в фазе уплотнения осадку жесткого фундамента и реактивные давления следует считать линейно зависящими от нагрузки на фундамент, поэтому нормы проектирования фундаментов и оснований [32] допускают рассчитывать основания по деформациям, используя линейные модели, если среднее давление на основание не превышает некоторой величины, называемой расчетным сопротивлением основания. Гораздо сложнее взаимодействие с основанием гибких железобетонных фундаментов. В этом случае изменение эпюры реактивных давлений с ростом нагрузки происходит не только за счет особенностей деформирования грунта, но также за счет уменьшения жесткости фундамента, которое начинается с образования и раскрытия в нем трещин.

Фундаментные конструкции могут рассчитываться как линейно-упругие, если действующие нагрузки не вызывают в них трещин. При больших нагрузках и для гибких кон-

струкций на упругом основании погрешности линейных расчетов могут быть значительными. Учет нелинейных деформаций в сочетании с приемами оптимального проектирования позволяет проектировать фундаментные конструкции в соответствии с требованиями первой и второй групп предельных состояний, повысить адекватность расчетов и добиться существенной экономии бетона и арматуры.

Первые задачи о расчете фундаментных конструкций с учетом физической нелинейности были решены Б. Г. Корневым [33]. Деформирование элемента балки (в координатах «момент – кривизна») он описывал диаграммой Прандтля. При расчете осесимметрично деформируемых плит эта предпосылка принималась для радиального направления. Рассматривая балки и плиты большой протяженности, Б. Г. Корнев использовал для оснований линейные модели, полагая, что в таких конструкциях значительные напряжения возникают при малых давлениях на основание, вызывающих в грунтах преимущественно линейные деформации.

Аналогичные гипотезы были приняты Р. В. Серебрянным [34] для определения несущей способности бесконечных плит на упругом полупространстве, нагруженных по кругу малого радиуса. Теоретическая разрушающая нагрузка хорошо совпала с полученной в опытах В. Д. Попова и И. Н. Толмачева. В то же время по линейному расчету разрушающая нагрузка оказалась почти в пять раз меньше. Уже эти первые попытки учета нелинейности деформаций железобетона при расчете фундаментных конструкций показали перспективность такого направления. Усилия в конструкциях получались не только более близкими к действительным, но и существенно меньшими, чем при расчете в линейной постановке. Это открывало возможность уменьшить расход бетона и арматуры при проектировании фундаментов.

Методы расчета фундаментов, учитывающие нелинейные деформации, возникающие в железобетоне до образования пластических шарниров, разрабатывались несколькими авторами, обзор которых освещают В. И. Соломин и С. Б. Шматков в [35].

Постановка задачи. Граничные условия

В статье рассматривается прямоугольная гибкая ортотропная плита размерами $2a \times 2b$ и толщиной h под действием внешней нагрузки, опирающаяся на упругое основание (рис. 4), с цилиндрическими жесткостями в соответствующих плоскостях D_x, D_y . В расчетах также учитывается жесткость кручения плиты, которая вычисляется по формуле [27]

$$D_k = \frac{\nu_x + \nu_y}{2} \sqrt{D_x D_y}, \quad (9)$$

где D_x, D_y – цилиндрические жесткости изгиба пластинки по направлениям осей X, Y соответственно, определяемые по (7); ν_x, ν_y – коэффициент Пуассона (поперечной упругости) по направлениям осей X, Y .

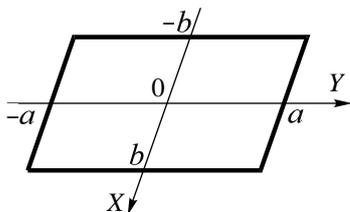


Рис. 4. Расчетная модель плиты
Fig. 4. Calculation model of plate

В ходе упругого и нелинейного расчетов определяются осадки плиты, распределение контактных напряжений под ней, внутренние усилия в плите (изгибающие моменты), а также выполняется анализ полученных результатов. Упругое основание в исследованиях моделируется в виде упругого однородного изотропного слоя, жестко соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем). Принимается, что в контактной зоне отсутствуют касательные напряжения и для плиты справедлива гипотеза технической теории изгиба [14].

Расчет прямоугольной ортотропной плиты выполняется методом Б. Н. Жемочкина [16]. Плита разбивается на одинаковые прямоугольные участки размерами $\Delta x \times \Delta y$, в центре каждого участка размещается вертикальная связь для описания контакта плиты с упругим основанием. Считается, что усилие в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений при определении перемещений центра участка.

Полученная статически неопределимая система решается смешанным методом строительной механики [19], приняв за неизвестные силы в контактных связях Жемочкина, а также два угловых и линейное перемещения введенного защемления нормали в центре плиты. Канонические уравнения смешанного метода для решения поставленной задачи имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{1,1} X_1 + \dots + \delta_{1,m} X_m - \varphi_x y_1 - \varphi_y x_1 + u_1 + \Delta_{1,p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{m,1} X_1 + \dots + \delta_{m,m} X_m - \varphi_x y_m - \varphi_y x_m + u_1 + \Delta_{m,p} = 0; \\ \sum_{k=1}^m X_k y_k - M_x = 0; \\ \sum_{k=1}^m X_k x_k - M_y = 0; \\ -\sum_{k=1}^m X_k - R = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где m – число участков Жемочкина на плите; δ_1, δ_m – коэффициенты канонических уравнений при неизвестных силах X_m в контактных связях Жемочкина; Δ_1, Δ_m – свободные члены канонических уравнений; x_m, y_m – координаты центра участка Жемочкина; $u_1, \varphi_x, \varphi_y$ – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного защемления в центре плиты; R, M_x, M_y – равнодействующая внешних сил и моменты равнодействующей относительно координатных осей, расположенных в плоскости плиты и проходящих через ее центр; X_k – усилие в связи Жемочкина с номером k .

Алгоритм нелинейного расчета ортотропной плиты с трещиной методом Жемочкина

Сформулированную задачу в нелинейной постановке предлагается решать итерационным путем методом Б. Н. Жемочкина через зависимость «жесткость – кривизна» [35]. Надо отметить, что обычно при подобных расчетах используется зависимость «момент – кривизна», однако, как будет показано ниже, применение зависимости «жесткость – кривизна» помогает сократить промежуточные вычисления. Кроме того, эта зависимость аппроксимируется легче,

чем «момент – кривизна» [36, 37]. На первой итерации плита рассчитывалась как линейно-упругая, ортотропная и однородная, на последующих – как линейно-упругая, ортотропная и неоднородная на каждом участке Жемочкина.

Для упругого однородного изотропного слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем), вертикальные перемещения поверхности упругого слоя от сосредоточенной силы P определяются через соотношение (2.13) из [6]

$$W(R) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \times \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right) \right], \quad (11)$$

где $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ – радиус-вектор перемещающихся точек с координатами (x, y) исследуемой поверхности упругого слоя от силы, приложенной в точке с координатами (ξ, η) ; h – мощность (толщина) упругого слоя, м.

В [6] определены коэффициенты a_n в следующих значениях: $a_0 = -1$; $a_1 = -3/2$; $a_2 = -1$; $a_3 = -1/3$; $a_4 = 1/18$; ... После интегрирования (11) по площади прямоугольного участка размерами $\Delta x \times \Delta y$ получаем выражения для определения перемещений центра участка Жемочкина с номером i от действия сосредоточенной силы, равной 1, приложенной к центру участка с номером k . Первое слагаемое в (11) определяет функцию вертикальных перемещений для упругого однородного изотропного полупространства (решение Буссинеска), интегрируется точно (оно сингулярное), остальные – не сингулярные и не интегрируются. Для практических расчетов в формуле (11) можно ограничиться пятью членами ряда [3].

В [6] получено соотношение (3.3) для перемещения точки $M(x_i, y_i)$ поверхности упругого полупространства при загрузении на ней участка прямоугольной формы равномерно распределенной нагрузкой с равнодействующей, равной 1. Перемещения точки поверхности основания $M(x_i, y_i)$ запишем в следующем виде:

$$W(x_i, y_i) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} F_{i,k}, \quad (12)$$

где $F_{i,k}$ – безразмерная функция, которую определяем из формулы (12) через соотношение (3.3) [6]

$$F_{i,k} = \left[\begin{aligned} & \frac{y_i - d}{\Delta y} \ln \frac{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} + \\ & + \frac{y_i - c}{\Delta y} \ln \frac{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - b}{\Delta y} \ln \frac{y_i - d + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{y_i - c + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - a}{\Delta y} \ln \frac{y_i - c + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{y_i - d + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} \end{aligned} \right] + \frac{\Delta x}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \times P_n \left(\frac{2h}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + 4h^2}} \right). \quad (13)$$

Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы (рис. 5) определяли методом Ритца [38] при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом выражении, предлагаем автором впервые.

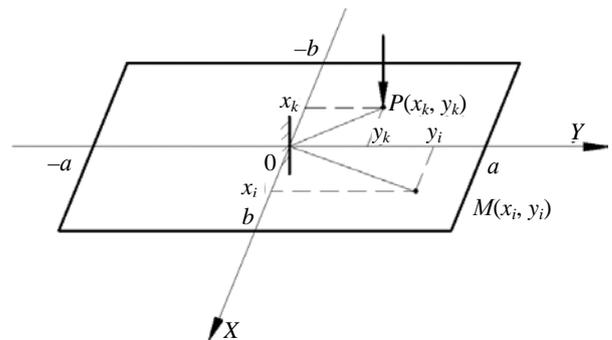


Рис. 5. Гибкая плита с защемленной нормалью

Fig. 5. Flexible plate with pinched normal

Общий вид предлагаемого автором нового решения имеет следующее представление:

$$W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i) = \left(\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} \right) \times \left(A_{0,0}^{(n)} + A_{1,0}^{(n)} \frac{x_i}{a} + A_{0,1}^{(n)} \frac{y_i}{b} + A_{2,0}^{(n)} \frac{x_i^2}{a^2} + A_{1,1}^{(n)} \frac{x_i y_i}{ab} - \frac{b^2(a^2 + 3b^2) A_{2,0}^{(n)} y_i^2}{a^2(3a^2 + b^2) b^2} \right), \quad (14)$$

где x_i, y_i – координаты точки i , в которой определяются прогибы плиты $W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i)$ с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода; $A_{m,k}^{(n)}$ – постоянный коэффициент метода Ритца [38] при координатных функциях, базисной из которых является $f_{m,k}(x_i, y_i) = \frac{x_i^m y_i^k}{a^m b^k}$; $m, k = 0, 1, 2$.

Выражение (14) удовлетворяет не только граничным условиям защемленной плиты по перемещениям, но и бигармоническому уравнению [14].

После выполненных выше расчетов определяется функционал полной энергии ортотропной пластинки с защемленной нормалью и действующей на нее сосредоточенной единичной силой как квадратичная функция коэффициентов $A_{i,k}$, что позволяет из системы линейных алгебраических уравнений найти эти коэффициенты и вычислить прогибы плиты с защемленной нормалью. Так формируется система уравнений метода Жемочкина на каждой итерации.

ВЫВОДЫ

1. Предложены в развитии методика и последовательность нелинейного итерационного расчета методом Б. Н. Жемочкина железобетонной ортотропной плиты на упругом основании, моделируемом упругим слоем конечной толщины. Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы определяли методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом выраже-

нии, предлагаемом автором впервые. Кроме того, в отличие от традиционных подходов, основанных на применении зависимости «момент – кривизна», использовали зависимость «жесткость – кривизна», что сократило объем вычислений.

2. Моделированию работы фундаментной балки с трещинами посвящены труды В. И. Соломина, В. И. Мурашева и др. В них предполагается, что фундаменты или дорожные конструкции (плиты, например) будут работать и с трещинами. В этом случае необходимо учитывать нелинейные свойства железобетона через переменную кривизну плиты в каждом направлении. Проведенный автором анализ по данной тематике показал, что она изучена не в полной мере. Поэтому отрасль исследования нелинейных задач требует дальнейшей разработки как в плане создания общей методики их решения, так и численных методов расчета. Необходимо подчеркнуть, что предлагаемая методика расчета гибких ортотропных плит с учетом трещинообразования справедлива для любой модели упругого основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов, М. И. Балки и плиты на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов. М.: Машстройиздат, 1949. 238 с.
2. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин; 3-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1984. 680 с.
3. Корнев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Корнев. М.: Госстройиздат, 1954. 231 с.
4. Клепиков, С. Н. Расчет конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков. Киев: Будівельник, 1967. 184 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 496 с.
6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
7. Тарасевич, А. Н. Изгиб самонапряженных плит на упругом основании / А. Н. Тарасевич. Брест, 2001. 125 с.
8. Козунова, О. В. Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом / О. В. Козунова. Минск, 2017. 168 с.
9. Семенюк, С. Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформируемом основании / С. Д. Семенюк. Могилев: БРУ, 2003. 269 с.

10. Босаков, С. В. Об одной модели упругого основания и ее использовании для расчета прямоугольной плиты на упругом основании / С. В. Босаков, С. И. Зиневич, О. В. Козунова // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. Т. 279, № 4. С. 2–5.
11. Коган, Б. И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б. И. Коган // Труды ХАДИ. Харьков: Харьковский автомобильно-дорожный институт, 1953. Вып. 14. С. 33–46.
12. Козунова, О. В. Статический расчет дорожной плиты на слоистом основании / О. В. Козунова // Механика. Исследования и инновации. 2018. Вып. 11. С. 134–139.
13. Козунова, О. В. Использование модели трехслойного основания в расчетах шарнирно соединенных дорожных плит / О. В. Козунова // Вестник БрГТУ. Серия: Архитектура и строительство. 2019. Т. 279, № 4. С. 2–5.
14. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. 2-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2002. 400 с.
15. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / под общ. ред. А. Б. Васильева [и др.]. М.: Физматлит, 2003. 432 с.
16. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.
17. Симвулиди, И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. М.: Высш. шк., 1987. 576 с.
18. Попов, Г. Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве / Г. Я. Попов // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1959. № 3. С. 25–33.
19. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
20. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1963. 1098 с.
21. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Госуд. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. 387 с.
22. Gehring, F. De Aequationibus Differentialibus Quibus Aequilibrium et Motus Laminae Crystallinae Definitur / F. Gehring. Berlin, 1860.
23. Boussinesq, I. Complements a Une Etude Sur la Theorie de L'équilibre et du Movement Des Solides Elastiques / I. Boussinesq // Journal des Mathématiques Pures et Appliquées. 1879. Vol. 5, Ser. 3. P. 221–229.
24. Huber, M. T. Teorja Plyt / M. T. Huber. Lwow, 1921.
25. Huber, M. T. Einige Anwendungen der Biegungstheorie Ortotroper Platten / M. T. Huber // Zamm Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1926. B. 6, H. 3.
26. Huber, M. T. Probleme der Statik Technisch Wichtiger Orthotroper Platten / M. T. Huber. Warszawa, 1929.
27. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физматгиз, 1963. 536 с.
28. Мурашев, В. И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона / В. И. Мурашев. М.: Машиностроение, 1950. 268 с.
29. Гвоздев, А. А. Метод предельного равновесия в применении к расчету железобетонных конструкций / А. А. Гвоздев // Инженерный сборник. 1949. Т. 5, вып. 2. С. 3–20.
30. Гвоздев, А. А. К вопросу о предельных условиях (условиях текучести) для ортотропных сред и для изгибаемых железобетонных плит / А. А. Гвоздев // Строительная механика: сб. статей. М.: Стройиздат, 1966. С. 208–218.
31. Карпенко, Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. М.: Стройиздат, 1976. 204 с.
32. Основания и фундаменты зданий и сооружений. Основные положения. Строительные нормы проектирования: ТКП 45-5.01-254-2012* (02250). Введ. 01.07.2012. Минск: Минстройархитектуры, 2012. 118 с.
33. Коренев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Коренев. М.: Госстройиздат, 1954. 231 с.
34. Серебрянный, Р. В. Определение разрушающей нагрузки для плит на упругом основании / Р. В. Серебрянный // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1960. № 2. С. 10–12.
35. Соломин, В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. М.: Стройиздат, 1986. 208 с.
36. Босаков, С. В. Развитие теории расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. / редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. Минск: БелНИИС, 2019. Вып. 11. С. 11–24.
37. Босаков, С. В. Нелинейные колебания прямоугольных ортотропных плит с одной степенью свободы при различных опорных закреплениях / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 5. С. 8–12.
38. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. Брест: БрГТУ, 2006. 107 с.

Поступила 21.12.2021

Подписана в печать 28.02.2022

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Gorbunov-Posadov M. I. (1949) *Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Mashstroizdat Publ. 238 (in Russian).
2. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. 3rd ed. Moscow, Stroizdat Publ. 680 (in Russian).
3. Korenev B. G. (1954) *Issues on Calculation of Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroizdat Publ. 231 (in Russian).
4. Klepikov S. N. (1967) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. Kiev, Budivel'nik Publ. 184 (in Russian).
5. Galin L. A. (ed.) (1976) *Development of the Theory of Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).

6. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
7. Tarasevich A. N. (2001) *Bending of Self-Stressed Slabs on an Elastic Foundation*. Brest. 125 (in Russian).
8. Kozunova O. V. (2017) *Static Analysis of the System "Beam Slab – Non-Linear Elastic Inhomogeneous Foundation" by the Variation-Difference Method*. Minsk. 168 (in Russian).
9. Semenyuk S. D. (2003) *Reinforced Concrete Spatial Foundations of Residential and Civil Buildings on an Evenly Deformed Base*. Mogilev, Belarusian-Russian University. 269 (in Russian).
10. Bosakov S. V., Zinevich S. I., Kozunova O. V. (2018) About one Elastic Foundation Model and its Use for Calculating a Rectangular Slab on an Elastic Foundation. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzhenii = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 279 (4), 2–5 (in Russian).
11. Kogan B. I. (1953) Stresses and Deformations of Multilayer Coatings. *Trudy KhADI* [Proceedings of Kharkov Automobile & Highway University]. Kharkov, Kharkov Automobile & Highway University, (14), 33–46 (in Russian).
12. Kozunova O. V. (2018) Static Calculation of a Road Slab on a Layered Base. *Mekhanika. Issledovaniya i Innovatsii = Mechanics. Investigations and Innovations*, (11), 134–139 (in Russian).
13. Kozunova O. V. (2019) Using the Model of a Three-Layer Base in the Calculations of Hinged Road Slabs. *Vestnik Brestskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Arkhitektura i Stroitel'stvo = Vestnik of Brest State Technical University. Series: Architecture and Construction*, 279 (4), 2–5 (in Russian).
14. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (2002) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. 2nd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
15. Vasil'ev A. B., Medvedev G. N., Tikhonov N. A., Urazgil'dina T. A. (2003) *Differential and Integral Equations, Calculus of Variations in Examples and Problems*. Moscow, Fizmatlit Publ. 432 (in Russian).
16. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. 2nd ed. Moscow, Gosstroizdat Publ. 240 (in Russian).
17. Simvulidi I. A. (1987) *Calculation of Engineering Structures on an Elastic Basis*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 576 (in Russian).
18. Popov G. Ya. (1959) On the Calculation of an Unbounded Articulated Beam Slab Lying on an Elastic Half-Space. *Izvestiya Vuzov. Stroitel'stvo i Arkhitektura = News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture*, (3), 25–33 (in Russian).
19. Rzhaniysyn R. A. (1991) *Structural Mechanics*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).
20. Gradstein I. S., Ryzhik I. M. (1963) *Tables of Integrals, Sums, Series and Works*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 1098 (in Russian).
21. Lekhnitsky S. G. (1957) *Anisotropic Plates*. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature. 387 (in Russian).
22. Gehring F. (1860) *De Aequationibus Differentialibus Quibus Aequilibrium et Motus Laminae Crystallinae Definitur*. Berlin.
23. Boussinesq I. (1879) Compléments a Une Etude Sur la Théorie de L'équilibre et du Mouvement Des Solides Elastiques. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, 5 (3), 221–229 (in French).
24. Huber M. T. (1921) *Teorja Plyt*. Lwow, 1921.
25. Huber M. T. (1926) Einige Anwendungen der Biegungstheorie Ortotroper Platten. *Zamm Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, B. 6, H. 3 (in German).
26. Huber M. T. (1929) *Probleme der Statik Technisch Wichtiger Orthotroper Platten*. Warszawa (in German).
27. Timoshenko S. P., Voynovsky-Kriger S. (1963) *Plates and Shells*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 536 (in Russian).
28. Murashev V. I. (1950) *Fracture Resistance, Stiffness and Strength of Reinforced Concrete*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 268 (in Russian).
29. Gvozdev A. A. (1949) Limit Equilibrium Method as Applied to the Calculation of Reinforced Concrete Structures. *Inzhenerny Sbornik* [Engineering Compilation], 5 (2), 3–20 (in Russian).
30. Gvozdev A. A. (1966) On the issue of Limiting Conditions (Yield Conditions) for Orthotropic Media and for Bending Reinforced Concrete Slabs. *Stroitel'naya Mekhanika: Sbornik Statei* [Building Mechanics: Collection of Articles]. Moscow, Stroizdat Publ. 208–218 (in Russian).
31. Karpenko N. I. (1976) *Theory of Deformation of Reinforced Concrete with Cracks*. Moscow, Stroizdat Publ. 204 (in Russian).
32. TKP [Technical Code of Common Practice] 45-5.01-254–2012* (02250). *Bases and Foundations of Buildings and Structures. Basic Provisions. Building Codes of Design*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction, 2012. 118 (in Russian).
33. Korenev B. G. (1954) *Issues of Calculation of Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroizdat Publ. 231 (in Russian).
34. Serebryanny R. V. (1960) Determination of the Breaking Load for Slabs on an Elastic Foundation. *Osnovaniya, Fundamenty i Mekhanika Gruntov = Soil Mechanics and Foundation Engineering*, (2), 10–12 (in Russian).
35. Solomin V. I., Shmatkov S. B. (1986) *Calculation Methods and Optimal Design of Reinforced Concrete Foundation Structures*. Moscow, Stroizdat Publ. 208 (in Russian).
36. Bosakov S. V., Kozunova O. V. (2019) Development of the Theory of Calculation of Hinged Beams on an Elastic Foundation, Taking into Account their Physical Non-linearity. *Problemy Sovremennogo Betona i Zhelezobetona Sb. Nauch. Tr.* [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete: Collection of Scientific Papers]. Minsk, Belarusian Scientific-Research Institute of Construction, 11, 11–24 (in Russian).
37. Bosakov S. V., Schetko N. S. (2021) Nonlinear Oscillations of Rectangular Orthotropic Plates with One Degree of Freedom at Various Support Fixtures. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (5), 8–12 (in Russian).
38. Bosakov S. V. (2006) *The Ritz Method in Contact Problems of Elasticity Theory*. Brest, Brest State Technical University. 107 (in Russian).

Received: 21.12.2021

Accepted: 28.02.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-222-228>

УДК 537.86

Электромагнитные волны в теории Максвелла

Докт. физ.-мат. наук, проф. В. В. Невдах¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Существующее в физической литературе описание плоской бегущей электромагнитной волны одинаковыми решениями волновых уравнений для напряженностей электрического и магнитного полей является физически некорректным, поскольку такие решения противоречат физическому смыслу уравнений Максвелла и нарушают закон сохранения энергии. В статье дано физически корректное описание электромагнитных волн в рамках теории Максвелла. Предложены новые решения волновых уравнений Максвелла для бегущей электромагнитной волны, в которых напряженности ее электрической и магнитной компонент изменяются во времени со сдвигами на четверть периода и на четверть длины волны по координате. Решения описывают бегущую электромагнитную волну, в которой последовательно происходит преобразование энергии электрической компоненты в энергию магнитной компоненты и обратно; плотность полной энергии волны без потерь остается постоянной в пространстве в любой момент времени; взаимная ориентация векторов напряженностей электрического, магнитного полей и фазовой скорости изменяется с левовинтовой тройки на правовинтовую тройку через каждую четверть длины волны; плотность потока энергии бегущей волны описывается вектором Умова. Показано, что для образования стоячей электромагнитной волны не требуется потеря полуволны одной из компонент отраженной на границе раздела сред волны. В стоячей волне плотность полной энергии остается постоянной по времени, но является функцией координат: в пространстве есть точки, в которых плотность полной энергии волны в любой момент времени равна нулю, – это узлы, и есть точки, в которых она имеет максимальное значение, – это пучности. Из-за неоднородности распределения плотности полной энергии волны в пространстве стоячая электромагнитная волна не может рассматриваться как гармонический осциллятор, а бегущая электромагнитная волна без потерь – может.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, решения волновых уравнений, бегущая электромагнитная волна, стоячая электромагнитная волна, закон сохранения энергии, вектор Умова

Для цитирования: Невдах, В. В. Электромагнитные волны в теории Максвелла / В. В. Невдах // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 222–228. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-222-228>

Electromagnetic Waves in Maxwell's Theory

V. V. Nevdakh¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The description of a plane traveling electromagnetic wave existing in the physical literature by identical solutions of wave equations for the strengths of electric and magnetic fields is physically incorrect, since such solutions contradict the physical meaning of Maxwell's equations and violate the energy conservation law. The paper gives a physically correct

Адрес для переписки

Невдах Владимир Владимирович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-42
v.v.nev@bk.ru

Address for correspondence

Nevdakh Vladimir V.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-42
v.v.nev@bk.ru

description of electromagnetic waves in the framework of Maxwell's theory. New solutions of Maxwell's wave equations for traveling electromagnetic wave are proposed, in which the strength of its electric and magnetic components change in time with shifts of a quarter of the period and a quarter of the wavelength along coordinate. The solutions describe a traveling electromagnetic wave, in which the energy of the electrical component is sequentially converted into the energy of the magnetic component and vice versa; the total energy density of the lossless wave remains constant in space at any time; the mutual orientation of the intensity vectors of the electric, magnetic fields and phase velocity changes from a left-handed three to a right-handed three every quarter of the wavelength; the energy flux density of the traveling wave is described by the Umov vector. It is shown that the formation of a standing electromagnetic wave does not require the loss of half a wave of one of the components of the wave reflected at the interface between the media. In a standing wave, the total energy density remains constant in time, but it is a function of coordinates: there are points in space where the total energy density of the wave at any time is zero – these are nodes, and there are points where it has a maximum value – these are antinodes. Due to the inhomogeneity of the distribution of the total energy density of the wave in space, a standing electromagnetic wave cannot be considered as a harmonic oscillator, but a lossless traveling electromagnetic wave can.

Keywords: Maxwell's equations, wave equation solutions, traveling electromagnetic wave, standing electromagnetic wave, law of energy conservation, Umov vector

For citation: Nevdakh V. V. (2022) Electromagnetic Waves in Maxwell's Theory. *Science and Technique*. 21 (3), 222–228. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-222-228> (in Russian)

Введение

В современной физической литературе по электродинамике и оптике разного уровня – от энциклопедической до учебной – электромагнитные волны в различных средах описываются с помощью электромагнитной теории Максвелла. Так, для однородного диэлектрика, не содержащего объемных зарядов и токов, записывается система уравнений Максвелла в дифференциальной форме (здесь и далее используется международная система единиц СИ):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (4)$$

где \vec{E} , \vec{H} – векторы напряженности электрического и магнитного полей; \vec{D} , \vec{B} – векторы индукции электрического и магнитного полей соответственно.

Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{D} , \vec{B} связаны между собой так называемыми материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (5)$$

где ε , μ – относительная диэлектрическая и относительная магнитная проницаемости среды; ε_0 , μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума [1–13].

Применив к (1) и (2) операцию *rot*, из системы уравнений (1)–(5) получаем волновые уравнения для \vec{E} и \vec{H} :

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (6)$$

$$\Delta \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где $u = 1/\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} = c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ – фазовая скорость волн в среде; $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость света в вакууме.

Решениями уравнений (6) и (7) обычно выбираются одинаковые гармонические функции, описывающие изменение во времени и в пространстве величин \vec{E} и \vec{H} .

Свойства электромагнитных волн анализируются на примере плоской волны, распространяющейся вдоль одной оси координат, например OZ [14]. Из уравнений Максвелла следует, что в плоской волне векторы \vec{E} и \vec{H} ортогональны друг другу и направлению ее распространения. Выберем $\vec{E} \parallel OX$ и $\vec{H} \parallel OY$. Уравнения Максвелла (1) и (2) упрощаются:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}; \quad (1')$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (2')$$

Волновые уравнения также принимают другой вид:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}; \quad (6')$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}. \quad (7')$$

Решениями (6') и (7'), описывающими волну, распространяющуюся в положительном направлении оси OZ , выберем, как это делается например в [1–13], одинаковые гармонические решения:

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz); \quad (8)$$

$$H_y = H_{y0} \cos(\omega t - kz), \quad (9)$$

где $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота; T – период колебаний; k – волновое число.

Подставляя решения (8) и (9) в (1') и (2'), получим соотношения между:

– амплитудами электрической и магнитной компонент волны

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_{x0} = \sqrt{\mu\mu_0} H_{y0}; \quad (10)$$

– величинами u , ω , k

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = u, \text{ или } k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (11)$$

где $\lambda = uT$ – длина волны.

Плотность энергии электромагнитной волны (8), (9) описывается выражением

$$\begin{aligned} w(t, z) &= w_E + w_H = \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) = \\ &= \dots \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} E_{x0}^2 \cos^2(\omega t - kz) + \\ &+ \frac{\mu\mu_0}{2} H_{y0}^2 \cos^2(\omega t - kz), \end{aligned} \quad (12)$$

или с учетом (10)

$$\begin{aligned} w(t, z) &= \varepsilon\varepsilon_0 E_{x0}^2 \cos^2(\omega t - kz) = \\ &= \mu\mu_0 H_{y0}^2 \cos^2(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (13)$$

Считается, что эта волна переносит энергию, поэтому ее называют бегущей. Вводится понятие плотности потока энергии бегущей волны, для описания которого используют выражение для вектора Пойнтинга ([1], с. 560)

$$\vec{S} = \vec{E}_x \times \vec{H}_y. \quad (14)$$

Если бегущая электромагнитная волна падает перпендикулярно на границу раздела двух сред, то возникает отраженная волна. Считается, что отраженная волна должна обладать такими же свойствами, что и падающая – если,

например, в падающей волне векторы E_x , H_y , u образовывали правовинтовую тройку, то и в отраженной волне они должны образовывать такую же тройку. Для этого нужно, чтобы при отражении один из векторов E_x или H_y оказывался сдвинутым по фазе на величину π , или, как говорят, при отражении один из них должен потерять полволны. Пусть, к примеру, полволны теряет электрический вектор. В этом случае интерференция падающей и отраженной волн дает новую электромагнитную волну, выражения для векторов E_{xc} и H_{yc} которой имеют вид:

$$E_{xc} = (2E_{x0} \sin kz) \sin \omega t; \quad (15)$$

$$H_{yc} = (2H_{y0} \cos kz) \cos \omega t. \quad (16)$$

Полная плотность энергии такой волны описывается выражением

$$\begin{aligned} w(t, z) &= (2\varepsilon\varepsilon_0 E_{x0}^2 \sin^2 kz) \sin^2 \omega t + \\ &+ (2\mu\mu_0 H_{y0}^2 \cos^2 kz) \cos^2 \omega t. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (15) и (16) следует, что есть точки в пространстве, в которых амплитуды полученной волны всегда равны нулю, – это узлы, и точки, в которых амплитуды всегда имеют максимальное значение, – это пучности, причем положение данных точек для векторов E_{xc} и H_{yc} сдвинуто в пространстве на $\lambda/4$. Из (17) также следует, что через каждую четверть периода энергия электрической компоненты волны преобразуется в энергию ее магнитной компоненты и обратно.

Электромагнитную волну (15)–(17) принято называть стоячей. Описанное выше «общепринятое» получение электромагнитных волн из уравнений Максвелла вызывает вопросы.

Во-первых, почему из всех возможных решений волновых уравнений (6') и (7') выбраны софазные решения типа (8), (9)? Из них, в частности, видно, что амплитуды $E_x(t)$ и $H_y(t)$ достигают своих максимальных значений одновременно. В такие моменты производные по времени от этих величин равны нулю. Рассмотрим моменты времени, в которые $\partial E_x / \partial t = 0$. Из уравнения (2') следует, что в данном случае магнитного поля не должно быть, а согласно (9), напряженность магнитного поля в эти моменты принимает максимальное значение. Если рассмотрим моменты времени, в которые $\partial E_x / \partial t = \max$, то из (2') следует, что в данном случае магнитное поле должно быть

максимальным, тогда как, согласно (9), в эти моменты времени $H_y(t) = 0$. Следовательно, выбранные софазные решения (8) и (9) противоречат физическому смыслу уравнений Максвелла (1') и (2'), и поэтому являются физически некорректными.

Во-вторых, из (13) следует, что есть моменты времени, в которые полная плотность энергии бегущей волны становится равной нулю. Это противоречит закону сохранения энергии. Куда девается энергия волны в такие моменты времени и откуда она появится в волне в следующие моменты?

В-третьих, из того же выражения (13) следует, что существуют точки пространства, в которых полная плотность энергии бегущей волны становится равной нулю. Как переносится энергия волны через такие точки пространства? Почему волну (8), (9) называют бегущей электромагнитной волной?

В-четвертых, из (17) следует, что положение узлов и пучностей электромагнитной волны в пространстве с течением времени меняется. Тогда почему волна, описываемая выражениями (15), (16), называется стоячей электромагнитной волной?

Необходимо также отметить, что в том же самом положительном направлении оси OZ может распространяться и другая электромагнитная волна, у которой $\mathbf{E} \parallel OY$, а $\mathbf{H} \parallel OX$. В этой волне векторы \mathbf{E}_y , \mathbf{H}_x , \mathbf{u} будут образовывать левовинтовую тройку. Следовательно, к описанию потока энергии такой волны вектор Пойнтинга уже не применим.

Сформулированные выше вопросы и отсутствие ответов на них свидетельствуют о том, что существующее в физической литературе описание электромагнитных волн в рамках теории Максвелла является физически некорректным. Цель исследований автора – показать, что есть решения волновых уравнений, не противоречащие физическому смыслу уравнений Максвелла и физически корректно описывающие электромагнитные волны и их свойства.

Бегущая электромагнитная волна

Любая электромагнитная волна является переменным электромагнитным полем, в котором изменение во времени электрического поля порождает вихревое магнитное поле, а изменение во времени магнитного поля порождает вихревое электрическое поле. Поэтому волно-

вые уравнения (6') и (7'), полученные из системы уравнений Максвелла, нужно решать не по отдельности, а как систему уравнений, решения которой должны быть не только математически корректными, но и соответствовать физическому смыслу решаемых уравнений. Поскольку решения (8) и (9) являются не единственными решениями уравнений (6') и (7') [14], то из всех возможных решений следует выбрать именно такие, которые не противоречат физическому смыслу уравнений Максвелла. Поэтому, если решение волнового уравнения (6') берется в виде

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz), \quad (18)$$

то физически корректным решением волнового уравнения (7') будет [15, 16]

$$H_y = -H_{y0} \sin(\omega t - kz). \quad (19)$$

Изменения во времени напряженностей электрического E и магнитного H полей, плотностей энергий электрического W_E и магнитного W_H полей, плотности полной энергии W согласно новым решениям уравнений Максвелла для бегущей электромагнитной волны показаны на рис. 1.

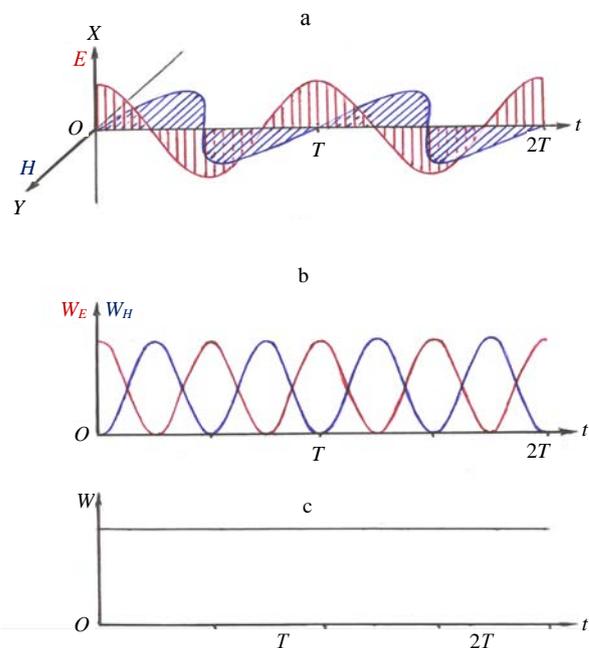


Рис. 1. Изменение во времени: а – напряженностей электрического E и магнитного H полей; б – плотностей энергий электрического W_E и магнитного W_H полей; в – плотности полной энергии W

Fig. 1. Change in time: a – tension of electric E and magnetic H fields; b – energy density of electric W_E and magnetic W_H fields; c – total energy density W

Нетрудно убедиться, что подстановка (18) и (19) в уравнения (1') и (2') позволяет получить соотношения (10) и (11) между амплитудами волн E_{x0} , H_{y0} и величинами ω , k , u .

Плотности энергий электрической (18) и магнитной (19) компонент волны описываются соответственно следующими выражениями:

$$W_E(t, z) = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E_{x0}^2 \cos^2(\omega t - kz); \quad (20)$$

$$W_H(t, z) = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H_{y0}^2 \sin^2(\omega t - kz). \quad (21)$$

Из (18), (19) и рис. 1а видно, что электрическая и магнитная компоненты волны колеблются с одинаковой амплитудой, со сдвигом относительно друг друга по времени на четверть периода и со сдвигом в пространстве на четверть длины волны. При этом в любой фиксированный момент времени взаимная ориентация тройки векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{u} изменяется в пространстве с правовинтовой на левовинтовую через четверть длины волны.

Учитывая уравнение (10), из (20), (21) и рис. 1б видно, что максимальные значения плотностей энергий электрической W_E^{\max} и магнитной W_H^{\max} компонент волны одинаковы и сдвинуты относительно друг друга по времени на четверть периода и в пространстве на четверть длины волны. Следовательно, в такой волне энергия электрической компоненты последовательно преобразуется в энергию магнитной компоненты и обратно, по направлению вектора скорости волны переносится энергия, поэтому это действительно бегущая волна. Из (20), (21) и рис. 1с также видно, что плотность полной энергии бегущей электромагнитной волны без потерь

$$W = W_E^{\max} = W_H^{\max} = \text{const}. \quad (22)$$

То есть плотность полной энергии бегущей электромагнитной волны не зависит ни от времени, ни от координат. Такими же свойствами обладает полная энергия свободного маятника без затухания, совершающего гармонические колебания. Поэтому бегущую электромагнитную волну без потерь можно рассматривать как гармонический осциллятор.

С учетом изменения характера взаимной ориентации тройки векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{u} в бегущей волне, описываемой выражениями (18) и (19), вектор Пойнтинга (14) не может применяться для описания плотности потока энергии такой

волны. Для этой цели нужно использовать вектор Умова

$$\vec{I} = W\vec{u}. \quad (23)$$

Стоячая электромагнитная волна

Если бегущая электромагнитная волна (18), (19), распространяющаяся в положительном направлении оси OZ , падает нормально на границу раздела двух сред, то зеркально отраженная волна, т. е. волна такой же амплитуды, но распространяющаяся в отрицательном направлении оси OZ , будет описываться выражениями:

$$E'' = E_0 \cos(\omega t + kz); \quad (24)$$

$$H'' = -H_0 \sin(\omega t + kz). \quad (25)$$

Отраженная волна интерферирует с падающей волной, образуя результирующую волну, описываемую выражениями:

$$E_{cm} = (2E_0 \cos kz) \cos \omega t; \quad (26)$$

$$H_{cm} = -(2H_0 \cos kz) \sin \omega t. \quad (27)$$

Следует отметить, что отраженная волна обладает точно такими же физическими свойствами, что и падающая. Поскольку плотности полной энергии падающей и отраженной волн не зависят от времени, плотность полной энергии результирующей волны также должна быть независимой от времени.

Плотности энергий электрической (26) и магнитной компонент (27) результирующей волны можно записать в следующем виде:

$$W_E(t, z) = (2\varepsilon \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 kz) \cos^2 \omega t; \quad (28)$$

$$W_H(t, z) = (2\mu \mu_0 H_0^2 \cos^2 kz) \sin^2 \omega t. \quad (29)$$

Из (26)–(29) видно, что напряженности электрической и магнитной компонент результирующей волны и плотности их энергий в пространстве изменяются в одинаковой фазе, а во времени – со сдвигом по фазе на $\pi/2$. Также это можно видеть на рис. 2а, б, где, согласно новым решениям уравнений Максвелла для стоячей электромагнитной волны, показано распределение напряженностей электрического E и магнитного H полей и плотностей энергий этих полей в разные моменты периода колебаний T .

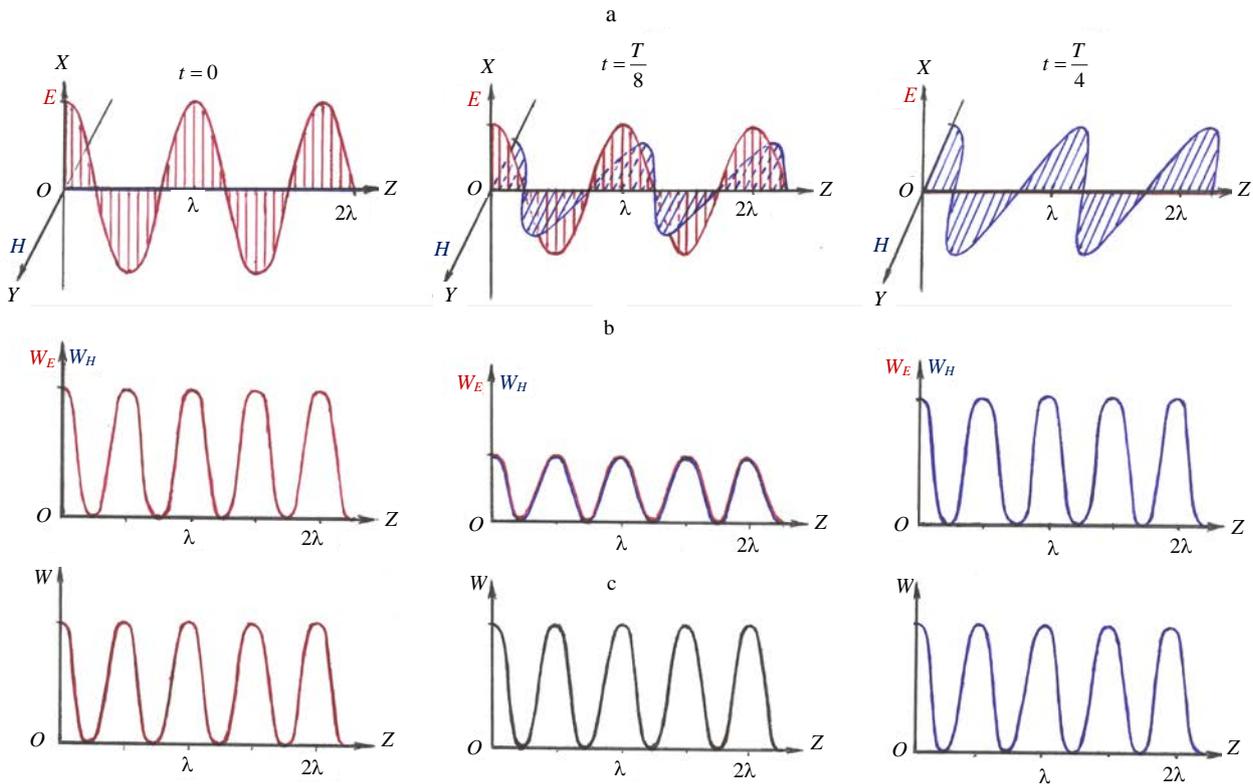


Рис. 2. Пространственное распределение: а – напряженностей электрического E и магнитного H полей; б – плотностей энергий электрического W_E и магнитного W_H полей; с – плотности полной энергии W в разные моменты периода колебаний T

Fig. 2. Spatial distribution: а – tension of electric E and magnetic H fields; б – energy density of electric W_E and magnetic W_H fields; с – total energy density W at different moments of the T oscillation period

Согласно (28), (29), плотность полной энергии полученной волны

$$W = W_E(t, z) + W_H(t, z) = 2\epsilon\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 kz = 2\mu\mu_0 H_0^2 \cos^2 kz = W(z). \quad (30)$$

Уравнение (30) демонстрирует, что эта величина действительно остается постоянной во времени, но является функцией координат: в пространстве есть точки, в которых плотности энергий обеих компонент волны в любой момент времени равны нулю, – это узлы, и есть точки, в которых они имеют максимальное значение, – это пучности (рис. 2с). Следовательно, переноса энергии в пространстве такой волной не происходит – это действительно стоячая электромагнитная волна. Из-за неоднородности распределения плотности полной энергии волны в пространстве стоячая электромагнитная волна не может рассматриваться как гармонический осциллятор.

ВЫВОДЫ

1. Проанализированы свойства общепринятых в физической литературе софазных решений волновых уравнений Максвелла для векторов E и H бегущей электромагнитной волны. Показано, что эти решения являются физически некорректными, так как находятся в противоречии с физическим смыслом уравнений Максвелла. Кроме того, в электромагнитной волне, описываемой этими решениями, постоянной величиной остается только усредненная по периоду плотность полной энергии, что является нарушением закона сохранения энергии.

2. Предложены другие решения волновых уравнений, не противоречащие физическому смыслу уравнений Максвелла, которые описывают действительно бегущую электромагнитную волну без потерь со следующими свойствами:

– напряженности электрической и магнитной компонент волны изменяются во времени со сдвигом на четверть периода и в пространстве со сдвигом на четверть длины волны;

– энергия электрической компоненты волны преобразуется в энергию ее магнитной компоненты и обратно через четверть периода;

– плотность полной энергии волны не зависит от времени и координат, поэтому такая волна может рассматриваться как гармонический осциллятор;

– характер взаимной ориентации тройки векторов E , H и u изменяется в пространстве с правовинтовой на левовинтовую через каждую четверть длины волны;

– плотность потока энергии волны описывается вектором Умова.

3. Показано, что образование действительно стоячей электромагнитной волны происходит без потери полуволны одним из векторов волны, отраженной от границы раздела сред. Свойства стоячей волны:

– напряженности электрической и магнитной компонент и плотности их энергий изменяются со сдвигом относительно друг друга по времени на четверть периода или по фазе на $\pi/2$, а в пространстве они изменяются в одинаковой фазе;

– плотность полной энергии не зависит от времени и является функцией координаты: есть точки в пространстве, в которых она всегда равна нулю, и точки, в которых она всегда имеет максимальное значение, поэтому такая волна не является гармоническим осциллятором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1983. 928 с.
2. Зоммерфельд, А. Оптика / А. Зоммерфельд. М.: Иностран. лит-ра, 1953. 490 с.
3. Калитевский, Н. И. Волновая оптика / Н. И. Калитевский. М.: Наука, 1971. 376 с.
4. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. М.: Наука, 1973. 720 с.
5. Ландсберг, Г. С. Оптика / Г. С. Ландсберг. М.: Наука, 1976. 928 с.
6. Ахманов, С. А. Физическая оптика / С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. 654 с.
7. Джексон, Дж. Классическая электродинамика / Дж. Джексон. М.: Мир, 1965. 702 с.
8. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. 9-е изд. М.: URSS, 2016. Т. 6: Электродинамика. 352 с.
9. Тамм, И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. М.: Наука, 1976. 616 с.
10. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1988. 504 с.
11. Кроуфорд, Ф. С. Берклевский курс физики / Ф. С. Кроуфорд. М.: Наука, 1984. Т. 3: Волны. 512 с.
12. Орир, Дж. Физика / Дж. Орир. М.: Мир, 1981. Т. 1. 336 с.
13. Holiday, D. Fundamentals of Physics / D. Holiday, R. Resnick, J. Walker. 9th ed. John Wiley & Sons, 2010. 1330 p.

14. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю. В. Прохоров М.: Сов. энцикл., 1988. 847 с.
15. Невдах, В. В. Описание световых волн в электромагнитной теории Максвелла / В. В. Невдах // Сб. тр. XI Междунар. конф. «Фундаментальные проблемы оптики – 2019», Санкт-Петербург, 21–25 окт. 2019 г. / под ред. проф. С. А. Козлова. СПб.: ИТМО, 2019. С. 98–100.
16. Невдах, В. В. Описание бегущих и стоячих электромагнитных волн в теории Максвелла / В. В. Невдах // Приборостроение – 2019: материалы 12-й Междунар. науч.-техн. конф., 13–15 нояб. 2019 г. Минск: БНТУ, 2019. С. 402–404.

Поступила 21.05.2021

Подписана в печать 11.01.2022

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Prokhorov A. M. (ed.) (1983) *Physical Encyclopedic Dictionary*. Moscow, Sovetskaya Entsiklopedia Publ. 928 (in Russian).
2. Sommerfeld A. (1964) *Optics*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-395500-5.X5001-3>.
3. Kaliteevsky N. I. (1971) *Wave Optics*. Moscow, Nauka Publ. 376 (in Russian).
4. Born M., Wolf E. (1973) *Fundamentals of Optics*. Moscow, Nauka Publ. 720 (in Russian).
5. Landsberg G. S. (1976) *Optics*. Moscow, Nauka Publ. 928 (in Russian).
6. Akhmanov S. A., Nikitin S. Yu. (2004) *Physical Optics*. Moscow, Publishing House of Moscow State University; Nauka Publ. 654 (in Russian).
7. Jackson J. (1962) *Classical Electrodynamics*. NY, John Wiley & Sons. 641.
8. Feynman R., Leighton R., Sands M. (2016) *The Feynman Lectures on Physics. Vol. 6: Electrodynamics*. Moscow, URSS Publ. 352 (in Russian).
9. Tamm I. E. (1976) *Fundamentals of the Theory of Electricity*. Moscow, Nauka Publ. 616 (in Russian).
10. Landau L. D., Lifshitz E. M. (1988) *Theory of Fields*. Moscow, Nauka Publ. 504 (in Russian).
11. Crawford F. S. (1984) *The Berkeley Physics Course. Vol. 3: Waves*. Moscow, Nauka Publ. 512 (in Russian).
12. Orear J. (1979) *Physics*. New York, Macmillan. 752.
13. Holiday D., Resnick R., Walker J. (2010) *Fundamentals of Physics*. 9th ed. John Wiley & Sons. 1330.
14. Prokhorov Yu. V. (ed.) (1988) *Mathematical Encyclopedic Dictionary*. Moscow, Sovetskaya Entsiklopedia Publ. 847 (in Russian).
15. Nevдах V. V. (2019) Description of Light Waves in Maxwell's Electromagnetic Theory. *Sb. tr. XI Mezhdunar. Konf. "Fundamental'nye Problemy Optiki – 2019"*, Sankt-Peterburg, 21–25 okt. 2019 g. [Proceedings of the XI International Conference "Fundamental Problems of Optics – 2019", Saint Petersburg, Oct. 21–25, 2019]. Saint Petersburg, ITMO, 98–100 (in Russian).
16. Nevдах V. V. (2019) Description of Traveling and Standing Electromagnetic Waves in Maxwell's Theory. *PriBORostroenie – 2019: Materialy 12-i Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf., 13–15 Noyab. 2019 g.* [Instrument-Making – 2019. Proceedings of the 12th International Scientific and Technical Conference, Nov. 13–15, 2019]. Minsk: Belarusian National Technical University, 402–404 (in Russian).

Received: 21.05.2021

Accepted: 11.01.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-229-235>

УДК 519

Применение соотношений теории течения для решения задач установившегося роста трещины

Канд. физ.-мат. наук, доц. М. А. Гундина¹⁾, О. В. Юхновская¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Для представления локальных полей перемещений в задаче об установившемся росте трещины, которую содержит пластина из несжимаемого материала, используется формула интенсивности деформации в виде многочлена второй степени. Рассматривается случай плоской деформации для упругопластического материала. Решение получено методом асимптотических разложений. Численный анализ проводился для первого члена разложения. Целью исследований являлся процесс получения аналитических решений прикладных задач теории пластичности: нахождение компонентов тензоров напряжений и деформаций. В статье представлен вариант метода асимптотических разложений и его применения для задачи о распределении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом образце с трещиной. Метод асимптотических разложений имеет некоторые преимущества по сравнению с численным подходом при изучении напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины. Он позволяет установить точные количественные соотношения между радиальным компонентом, углом и компонентами тензора напряжений и деформаций. Еще одно достоинство такого метода заключается в возможности составления механических характеристик объекта на стадии его проектирования. Разработана система дифференциальных уравнений, содержащая V_0 и ее производные до третьего порядка. Приведен пример распределения напряжений в окрестности вершины трещины в стальном образце, полученного в компьютерной системе численным методом. Построена диаграмма деформирования для стали 40. Результаты исследования могут использоваться при построении полей напряжений и деформаций в окрестности трещины, а также для прогнозирования дальнейшего направления развития трещины.

Ключевые слова: рост трещины, упругопластический материал, метод асимптотических разложений, интенсивность деформации, вектор перемещений, напряженно-деформированное состояние

Для цитирования: Гундина, М. А. Применение соотношений теории течения для решения задач установившегося роста трещины / М. А. Гундина, О. В. Юхновская // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 229–235. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-229-235>

Application of Flow Theory Relations for Solving Problems of Steady-State Crack Growth

М. А. Hundzina¹⁾, О. В. Yuhnovskaya¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. To represent local displacement fields in the problem of the steady-state growth of a crack, which contains a plate of incompressible material, the strain intensity formula is used in the form of a polynomial of the second degree. The case of plane deformation for an elastoplastic material is considered. The solution is obtained by the method of asymptotic expansions. Numerical analysis is carried out for the first term of the expansion. The aim of the work is the process of obtaining analytical solutions to applied problems of the theory of plasticity: finding the components of stress and strain tensors. The paper considers a variant of the method of asymptotic expansions and its application for the problem of the distribution of the stress-strain state in an elastoplastic specimen with a crack. The method of asymptotic expansions has some advantages over the numerical approach in studying the stress-strain state in the vicinity of a crack. It allows to establish exact quantita-

Адрес для переписки

Гундина Мария Анатольевна
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-67-84
hundzina@bntu.by

Address for correspondence

Hundzina Maryia A.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-67-84
hundzina@bntu.by

tive relationships between the radial component, the angle, and the components of the stress and strain tensor. Another advantage of this method is the possibility of compiling the mechanical characteristics of an object at the design stage. A system of differential equations has been developed that contains V_0 and its derivatives up to the third order. An example of stress distribution in the vicinity of a crack tip in a steel sample, obtained in a computer system by a numerical method, is given. The deformation diagram has been constructed for the material steel 40. The research results can be used to construct stress and strain fields in the vicinity of a crack, as well as to predict the further direction of crack development.

Keywords: crack growth, elastoplastic material, asymptotic expansion method, strain rate, displacement vector, stress-strain state

For citation: Hundzina M. A., Yuhnovskaya O. V. (2022) Application of Flow Theory Relations for Solving Problems of Steady-State Crack Growth. *Science and Technique*. 21 (3), 229–235. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-229-235> (in Russian)

Введение

Процесс получения аналитических решений прикладных задач теории пластичности, а именно – нахождение компонентов тензоров напряжений и деформаций, описывающих напряженно-деформированное состояние (НДС) упругопластических тел и конструкций, сопряжен с некоторыми математическими и вычислительными трудностями. Для этого есть несколько причин. В первую очередь это связано с нелинейностью дифференциальных уравнений, описывающих состояние материала, и наличием сингулярности возникающих полей напряжений и деформаций в окрестности дефекта. Широкое распространение при решении такого рода задач получили численные способы, такие как метод конечных элементов и метод граничных элементов (рис. 1).

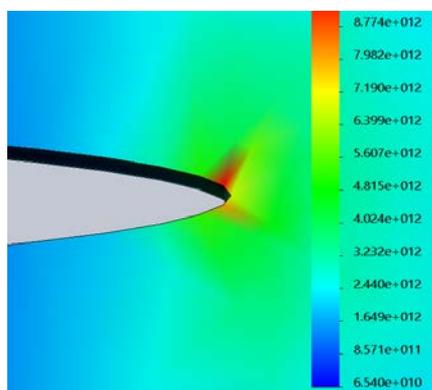


Рис. 1. Распределение напряжений в окрестности вершины трещины в стальном образце, полученное в компьютерной системе численным методом

Fig. 1. Stress distribution in the vicinity of a crack tip in a steel sample, obtained in a computer system by a numerical method

Часто приходится рассматривать задачи, для которых вопрос устойчивости решения остается открытым. Кроме того, даже при небольшом изменении исходных данных в случае численного подхода решать задачу нужно заново, что не позволяет проводить комплексный каче-

ственный анализ возникающих эффектов в материале. А это – явный недостаток в сравнении с аналитическими подходами.

Рассматриваемый в статье вариант метода асимптотических разложений может быть применен для задачи о распределении напряженно-деформированного состояния в упругопластическом образце с трещиной. Построение аналитических зависимостей компонентов напряжений и деформаций от полярного угла и расстояния от вершины трещины, разработка математического аппарата для диагностики прочностных характеристик элементов конструкций, анализ поведения материала при растягивающей нагрузке и учете упругопластических эффектов – все это является важным и актуальным с точки зрения прогнозирования ресурса деталей машин и механизмов, а также развития прикладной математики и соответствующих численных и аналитических методов.

Нелинейные подходы в задачах механики разрушения для детального анализа закономерностей изменения упругопластических полей деформаций и напряжений в окрестности фиксированной и развивающейся трещины описаны в работах отечественных и зарубежных ученых. Подробный анализ НДС материала приводится в публикациях В. И. Астафьева [1], В. Д. Ключникова [2], В. З. Партоня [3], Ю. М. Плескачевского [4], Э. И. Старовойтова [5], Л. В. Степановой [6], Г. П. Черепанова [7], А. В. Чигарева [8], где показано, что процесс развития деформаций в упрочняющихся материалах сложный и сопровождается физическими явлениями, которые требуют учета большого количества факторов. К ним относятся наличие нелинейной диаграммы деформирования материала, влияние границ зон активного нагружения и разгрузки вблизи трещины, эффект упрочнения материала.

В [1] определяется напряженное состояние вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения. Определяющие

соотношения задаются в виде степенной зависимости. Для этого используется уравнение совместности в напряжениях, в которое вводится функция напряжений Эри, и формулируется двухточечная краевая задача. Получившаяся задача решается численно для случаев плоского напряженного состояния и плоской деформации. В [9] Ю. Н. Радаев рассматривает математическую модель распределения напряжений в пластической зоне у вершины трещины нормального отрыва (трещины типа I) в идеально-пластическом теле в условиях плоского напряженного состояния. В качестве критерия текучести принималось условие текучести Мизеса. В процессе исследования были получены точные формулы для вычисления напряжений в пределах локализованной у вершины трещины пластической зоны. В [10] приводятся первые пять коэффициентов асимптотического поля у вершины трещины для изотропных и анизотропных горных пород с использованием различных геометрических параметров и параметров анизотропии.

Рассматриваемый метод асимптотических разложений имеет некоторые преимущества по сравнению с численным подходом при изучении НДС в окрестности трещины. Он позволяет установить точные количественные соотношения между радиальным компонентом, углом и компонентами тензора напряжений и деформаций. Еще одно достоинство такого метода заключается в возможности составления механических характеристик объекта на стадии его проектирования. Метод асимптотических разложений позволяет получить представление решения задачи в общем виде, охватывающем различные случаи и удобном для выполнения анализа.

Решение задачи представляется в виде ряда, содержащего параметр, причем каждый следующий член разложения вносит меньший вклад по сравнению с предыдущим членом. Асимптотические разложения находятся так, что коэффициенты этих рядов разложений конструируются из решений нескольких предельных краевых задач (для первого приближения, второго и т. д.). Во многих случаях для того, чтобы охарактеризовать поля в окрестности вершины трещины, достаточно главного члена асимптотического разложения. С целью исключения громоздких выражений в статье рассматриваются только первые члены асимптотических разложений.

Г. П. Черепанов для случая плоского напряженного состояния [11] дал точное решение

задачи о двухосном растяжении плоскости с круговым отверстием методом асимптотических разложений, определил класс точных решений плоской упругопластической задачи. Д. Д. Ивлев [12] показал, что найденные им четыре приближения методом малого параметра для задач Л. А. Галина и Г. П. Черепанова полностью совпадают с соответствующими разложениями точных решений по тому же малому параметру. Схема Д. Д. Ивлева позволяет определить и последующие приближения. Однако оказалось, что для описания точного решения Л. А. Галина достаточно двух, а Г. П. Черепанова – четырех приближений. Н. Н. Остросаблин [13] получил решение для перемещений в задаче Л. А. Галина.

Цель исследований авторов – изучение построения аналитических зависимостей компонентов напряжений и деформаций от полярного угла и расстояния от вершины трещины, разработка математического аппарата для диагностики прочностных характеристик элементов конструкций, а также анализ поведения материала при растягивающей нагрузке и учете упругопластических эффектов. В статье представлены метод асимптотических разложений и распределение напряжений в окрестности вершины трещины в стальном образце, полученное в компьютерной системе численным методом.

Основная часть

Формулировка задачи: компоненты вектора перемещений представляются в виде функций от двух переменных $u_3 = 0$, $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$. Такое деформированное состояние, в котором $\varepsilon_{3i} = 0$, называется состоянием плоской деформации. Среднее напряжение для случая плоской деформации имеет вид

$$\sigma = \frac{\sigma_{rr}(r, \varphi) + \sigma_{\varphi\varphi}(r, \varphi)}{2}. \quad (1)$$

Девииатор тензора напряжений определяется как

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} & 2\sigma_{r\varphi} & 0 \\ 2\sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Запишем необходимые уравнения равновесия в полярной системе координат:

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\sigma}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (\dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\dot{\sigma}_{r\varphi}}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

где r – радиус, соотнесенный к длине трещины; σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонентов тензора напряжений.

Нагрузки на берегах трещины равны нулю, поскольку они свободны от усилий. Отсюда следуют граничные условия задачи, учитывая условия симметрии:

$$\sigma_{r\varphi} \Big|_{\varphi=\pm\pi} = 0; \quad (5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} \Big|_{\varphi=\pm\pi} = 0. \quad (6)$$

Численно-аналитическое решение

Компоненты вектора приращений [14]:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} U_n(\varphi) r^{\lambda_n}; \quad (7)$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} V_n(\varphi) r^{\lambda_n}. \quad (8)$$

Соотношения Коши в полярной системе координат имеют вид:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n r^{\lambda_n-1}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_{\varphi,\varphi} / r + u_r / r = \sum_{n=0}^{\infty} (V'_n + U_n) r^{\lambda_n-1}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} (u_{\varphi,r} + u_{r,\varphi} / r - u_\varphi / r) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n V_n + U'_n - V_n) r^{\lambda_n-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

где ε_{rr} , $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонентов тензора деформаций; u_r , u_φ – компоненты вектора перемещений.

Компоненты вектора перемещений представляются в виде функций от двух переменных. Ограничимся случаем установившегося роста, когда под скоростью будем понимать

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} - v \left(\cos \varphi \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right), \quad (12)$$

где v – скорость роста трещины.

Тогда скорости компонентов тензора деформаций примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{rr} &= \\ &= -v \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi \lambda_n (\lambda_n - 1) U_n - \sin \varphi \lambda_n U'_n) r^{\lambda_n-2}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} &= -v \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi (V'_n + U_n) (\lambda_n - 1) - \\ &- \sin \varphi (V_n + U'_n)) r^{\lambda_n-2}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{r\varphi} &= -v \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi (\lambda_n V_n + U'_n - V_n) (\lambda_n - 1) - \\ &- \sin \varphi (\lambda_n V'_n + U_n - V'_n)) r^{\lambda_n-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Наличие нелинейного участка диаграммы σ – ε для упругопластических материалов выявлено давно и подтверждено в ряде известных экспериментов, которые описаны в [15]. Для упругопластических материалов линейная зависимость деформаций от напряжений не соответствует экспериментам. При аппроксимации диаграммы σ – ε квадратичной параболой имеет место равенство

$$\varepsilon = B_2 \sigma^2, \quad (16)$$

где B_2 – числовой параметр, который характеризует нелинейность диаграммы деформирования, его значение находится из эксперимента на растяжение соответствующего материала.

Тогда связь между напряжениями и деформациями для упругопластического материала выражается формулами [16]:

$$\sigma = A_1 \varepsilon - A_2 \varepsilon^2; \quad (17)$$

$$\varepsilon = \sigma / A_1 - B_2 \sigma^2, \quad (18)$$

где A_1 , A_2 – некоторые параметры нелинейности.

Известно, что в статической задаче о растяжении прямоугольной пластины, содержащей центральную прямолинейную трещину, связь приращений девиаторов напряжений и деформаций может быть представлена в следующем виде:

$$\delta s_{ij} = \delta e_{ij} - \delta \Phi(\Gamma) e_{ij}, \quad i, j = r, \varphi, \quad (19)$$

где δs_{ij} , δe_{ij} – приращения девиаторов напряжений и деформаций.

Функция интенсивности деформаций может находиться по формуле

$$\Phi(\Gamma) = B_2 \Gamma^2, \quad (20)$$

где $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$; G – модуль сдвига материала.

В соотношении (11) значение коэффициента B_2 подставляется, соотнесенное на удвоен-

ный квадрат модуля сдвига для соответствующего материала [17]. Получим коэффициент B_2 для стали 40 по экспериментальным значениям напряжений и деформаций [18]. Если аппроксимирующая функция представляет собой квадратичную зависимость, то B_2 находится из уравнения

$$\sigma_{\text{экспер}} = B_2 \varepsilon_{\text{экспер}}^2 + b \varepsilon_{\text{экспер}} + c, \quad (21)$$

где $\sigma_{\text{экспер}}$, $\varepsilon_{\text{экспер}}$ – значения эквивалентного напряжения и пластической деформации, полученные из опыта на растяжение.

Для стали 40 диаграмма деформирования представлена на рис. 2.

Значение коэффициента B_2 находится по методу наименьших квадратов из уравнений (13)–(15):

$$\begin{aligned} B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^4 + b \sum_1^n \varepsilon_i^3 + c \sum_1^n \varepsilon_i^2 &= \sum_1^n \varepsilon_i^2 \sigma_i; \\ B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^3 + b \sum_1^n \varepsilon_i^2 + c \sum_1^n \varepsilon_i &= \sum_1^n \varepsilon_i \sigma_i; \\ B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^2 + b \sum_1^n \varepsilon_i + cn &= \sum_1^n \sigma_i, \end{aligned} \quad (22)$$

где ε_i , σ_i – текущее значение напряжения и деформации, полученное из эксперимента на растяжение; n – количество измерений.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\lambda_k (U_k \lambda_{n-k} U_{n-k} - U_k V'_{n-k} - U_k U_{n-k}) + V'_k V'_{n-k} + U_k V'_{n-k} + \\ &+ V'_k U_{n-k} + U_k U_{n-k} + \frac{3}{4} (\lambda_k (V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + V_k U'_{n-k} - V_k V_{n-k}) + U'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + U'_k U'_{n-k} - \\ &- U'_k V_{n-k} - V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} - V_k U'_{n-k} + V_k V_{n-k}) r^{\lambda_k + \lambda_{n-k} - 2}; \\ \dot{E} &= \cos \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\lambda_k + \lambda_{n-k} - 2) (\lambda_k U_k \lambda_{n-k} U_{n-k} - \lambda_k U_k V'_{n-k} - \lambda_k U_k U_{n-k} + V'_k V'_{n-k} + U_k V'_{n-k} + \\ &+ V'_k U_{n-k} + U_k U_{n-k} + \frac{3}{4} (\lambda_k V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + \lambda_k V_k U'_{n-k} - \lambda_k V_k V_{n-k} + U'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + U'_k U'_{n-k} - \\ &- U'_k V_{n-k} - V_k \lambda_{n-k} V_{n-k} - V_k U'_{n-k} + V_k V_{n-k}) r^{\lambda_k + \lambda_{n-k} - 3} - \sin \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (\lambda_k U'_k \lambda_{n-k} U_{n-k} + \lambda_k U_k \lambda_{n-k} U'_{n-k} - \\ &- \lambda_k U'_k V'_{n-k} - \lambda_k U_k V''_{n-k} - \lambda_k U'_k U_{n-k} - \lambda_k U_k U'_{n-k} + V'_k V'_{n-k} + V'_k V''_{n-k} + U'_k V'_{n-k} + U_k V''_{n-k} + V'_k U_{n-k} + \\ &+ V'_k U'_{n-k} + U'_k U_{n-k} + U_k U'_{n-k} + \frac{3}{4} (\lambda_k V'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + \lambda_k V_k \lambda_{n-k} V'_{n-k} + \lambda_k V'_k U'_{n-k} + \lambda_k V_k U''_{n-k} - \lambda_k V'_k V'_{n-k} - \\ &- \lambda_k V_k V'_{n-k} + U''_k \lambda_{n-k} V_{n-k} + U'_k \lambda_{n-k} V'_{n-k} + U''_k U'_{n-k} + U'_k U''_{n-k} - U''_k V_{n-k} - U'_k V'_{n-k} - V'_k \lambda_{n-k} V_{n-k} - \\ &- V_k \lambda_{n-k} V'_{n-k} - V'_k U'_{n-k} - V_k U''_{n-k} + V'_k U'_{n-k} + V'_k V'_{n-k}) r^{\lambda_k + \lambda_{n-k} - 3}. \end{aligned} \quad (26)$$

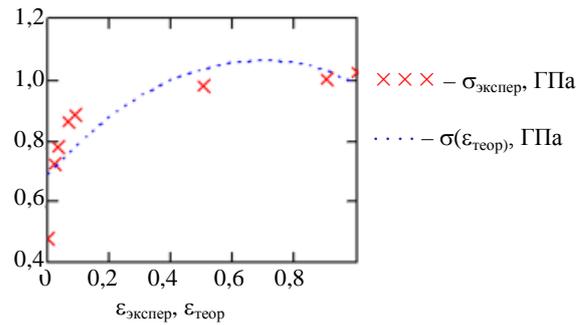


Рис. 2. Диаграмма деформирования стали 40
Fig. 2. Deformation diagram of steel 40

Рассмотрим общий вид для зависимости между компонентами девиаторов деформаций и напряжений при $i, j = r, \varphi$ [19]:

$$\dot{s}_{rr} = 2G_0 \dot{\varepsilon}_{rr} - p(E) \dot{E} \varepsilon_{rr}; \quad (23)$$

$$\dot{s}_{\varphi\varphi} = 2G_0 \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - p(E) \dot{E} \varepsilon_{\varphi\varphi}; \quad (24)$$

$$\dot{s}_{r\varphi} = 2G_0 \dot{\varepsilon}_{r\varphi} - p(E) \dot{E} \varepsilon_{r\varphi}, \quad (25)$$

где \dot{s}_{ij} , $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – приращение компонентов девиаторов напряжений и деформаций; $E = \varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + 3\varepsilon_{r\varphi}^2$ – функция интенсивности деформаций; $p(E) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n E^n$.

Тогда функция интенсивности деформаций и ее скорость примут вид:

Рассмотрим представление среднего напряжения также в виде асимптотического разложения:

$$\sigma = \sum_{n \geq 0} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}; \quad (28)$$

$$\dot{\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos \varphi (\lambda_n - 1) W_n - \sin \varphi W_n') r^{\lambda_n - 2}; \quad (29)$$

$$\dot{\sigma}_{rr} = \dot{s}_{rr} + \dot{\sigma}; \quad (30)$$

$$\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} = \dot{s}_{\varphi\varphi} + \dot{\sigma}; \quad (31)$$

$$\dot{\sigma}_{r\varphi} = \dot{s}_{r\varphi}. \quad (32)$$

Анализ численных результатов

Для решения полученной системы нужна последовательность действий. Заметим, что

$$U_0 = \frac{-1}{(\lambda_0 + 1)V_0}. \quad (33)$$

Итоговая система дифференциальных уравнений будет содержать V_0 и ее производные до третьего порядка (рис. 3). Затем находятся компоненты тензора напряжений, выраженные через W_0 из системы.

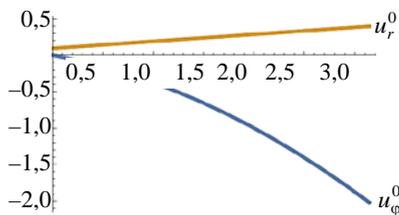


Рис. 3. Распределение компонентов вектора перемещений
Fig. 3. Distribution of displacement vector components

ВЫВОДЫ

1. В исследованиях Г. П. Никишкова [20] для показателя упрочнения $n = 3$ значения компонентов вектора перемещений $u_r(0) = -0,05797$, $u_r(\pi) = 0,26955$ в рамках теории течения для стали $u_r(0) = 0$, $u_r(\pi) = 0$ с относительной погрешностью 0,1 %. Различия в значениях обусловлены тем, что для стали в рамках деформационной теории более адекватно соответствует показатель $n = 5$, а при его увеличении абсолютные значения компонентов вектора перемещений возрастают.

2. Результаты исследований могут быть использованы при построении полей напряжений и деформаций в окрестности трещины, а также для прогнозирования дальнейшего направления развития трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астафьев, В. И. Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения / В. И. Астафьев, А. Н. Крутов // Вестник СамГУ. 1999. № 4. С. 56–69.
2. Ключников, В. Д. Математическая теория пластичности / В. Д. Ключников. М.: МГУ, 1978. 208 с.
3. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 192 с.
4. Плескачевский, Ю. М. Корректное применение моделей континуума, квазиконтинуума, сетей в наномеханике / Ю. М. Плескачевский, Ю. А. Чигарева // Доклады НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 1. С. 118–122.
5. Starovoitov, E. I. Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity and Viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. V. Nagiyev. Toronto, New Jersey: Apple Academic Press, 2012. 346 p. <https://doi.org/10.1201/b13109>.
6. Степанова, Л. В. Асимптотические методы нелинейной механики разрушения: результаты, современное состояние и перспективы / Л. В. Степанова, Е. М. Адылина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2013. № 2. С. 156–168.
7. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. Чигарев, А. В. Исследование неосесимметричного напряженного состояния при квазистатическом термосиловом нагружении в условиях облучения высокоэнергетическими частицами / А. В. Чигарев, П. И. Ширвель // Наука и техника. 2013. № 4. С. 83–89.
9. Радаев, Ю. Н. Точный анализ распределения напряжений у вершины трещины нормального отрыва напряженного состояния / Ю. Н. Радаев // Вестник СамГУ. 2017. № 4. С. 336–365.
10. Nejati, M. Crack Tip Asymptotic Field and K-Dominant Region for Anisotropic Semicircular Bend Specimen / M. Nejati, S. Ghoul, M. R. Ayatollahi // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2020. Vol. 109. P. 102640. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640>.
11. Черепанов, Г. П. Об одном методе решения упругопластической задачи / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. С. 644–655. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90151-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90151-5).
12. Ивлев, Д. Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов. М.: Наука, 1978. 208 с.
13. Остробалин, Н. Н. Определение смещений в задаче Л. А. Галина / Н. Н. Остробалин // Динамика сплошных сред. 1973. № 14. С. 67–70.
14. Гундина, М. А. Метод асимптотических разложений в задачах распространения трещин. Нахождение коэф-

- фициента нелинейности / М. А. Гундина // *Вестник Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова*. Сер. В. Прыродазнаўчая навука (матэматыка, фізіка, біялогія). 2019. Т. 53, № 1. С. 63–70.
15. Старовойтов, Э. И. Сопроотивление материалов / Э. И. Старовойтов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.
 16. Александровский, С. В. Нелинейные деформации бетона при сложных режимах нагружения / С. В. Александровский, Н. А. Колесников // *Бетон и железобетон*. 1976. № 4. С. 27–32.
 17. Ибрагимов, В. А. Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упруго-пластической среде / В. А. Ибрагимов // *Прикладная математика и механика*. 1976. Т. 40, № 2. С. 311–319. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90068-x](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90068-x).
 18. Шмелев, А. В. Идентификация параметров полилинейных моделей металлов, применяемых при численном моделировании процессов пластического деформирования и разрушения конструкций / А. В. Шмелев, А. Г. Кононов, А. В. Омелюсик // *Наука и образование*. 2017. № 1. С. 1–17.
 19. Trifan, D. A New Theory of Plastic Flow / D. Trifan // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1949. Vol. 7, No 2. P. 201–211. <https://doi.org/10.1090/qam/30426>.
 20. Nikishkov, G. P. An Algorithm and a Computer Program for the Three-Term Asymptotic Expansion of Elastic-Plastic Crack Tip Stress and Displacement Fields / G. P. Nikishkov // *Engineering Fracture Mechanics*. 1995. Vol. 50, No 1. P. 65–83. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00139-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00139-9).
- Поступила 22.09.2021
Подписана в печать 30.11.2021
Опубликована онлайн 31.05.2022
- REFERENCES
1. Astafiev V. I., Krutov A. N. (1999) Stress Distribution Near the Tip of an Inclined Crack in Nonlinear Fracture Mechanics. *Vestnik SamGU = Vestnik of Samara State University*, (4), 56–69 (in Russian).
 2. Klyushnikov V. D. (1978) *Mathematical Theory of Plasticity*. Moscow, Moscow State University. 208 (in Russian).
 3. Parton V. Z., Morozov E. M. (2008) *Mechanics of Elastoplastic Fracture*. Moscow, Publishing House “LKI”. 192 (in Russian).
 4. Pleskachevsky Yu. M., Chigareva Yu. A. (2013) Correct Application of Models of Continuum, Quasi-Continuum, Networks in Nano-Mechanics. *Doklady Natsional'noi Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 57 (1), 118–122 (in Russian).
 5. Starovoitov E. I., Nagiyev F. B. (2012) *Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity and Viscoelasticity*. Toronto, New Jersey, Apple Academic Press. 346. <https://doi.org/10.1201/b13109>.
 6. Stepanova L. V., Adylina E. M. (2013) Asymptotic Methods of Nonlinear Fracture Mechanics: Results, Contemporary State and Perspectives. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki = Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, (2), 156–168 (in Russian).
 7. Cherepanov G. P. (1974) *Mechanics of Brittle Fracture*. Moscow, Nauka Publ. 640 (in Russian).
 8. Chigarev A. V., Shirvel P. I. (2013) Investigation of a Non-Axisymmetric Stress State for Quasi-Static Thermal Power Loading under Conditions of Highest-Energy Particle Irradiation. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, (4), 83–89 (in Russian).
 9. Radaev Yu. N. (2017) Accurate Analysis of Stress Distribution at the Crack Tip of Normal Separation of the Stress State. *Vestnik SamGU = Vestnik of Samara State University*, (4), 336–365 (in Russian).
 10. Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M. R. (2020) Crack Tip Asymptotic Field and K-Dominant Region for Anisotropic Semicircular Bend Specimen. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 109, 102640. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102640>.
 11. Cherepanov G. P. (1963) On a Method of Solving the Elasto-Plastic Problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 27 (3), 644–655. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90151-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90151-5).
 12. Ivlev D. D., Ershov L. V. (1978) *Perturbation Method in the Theory of Elastoplastic Body*. Moscow, Nauka Publ. 208 (in Russian).
 13. Ostrosablin N. N. (1973) Determination of Displacements in Galin's Problem. *Dinamika Sploshnykh Sred [Continuum Dynamics]*, (14), 67–70 (in Russian).
 14. Gundina M. A. (2019) Method of Asymptotic Expansions in Problems of Crack Propagation. Finding the Coefficient of Nonlinearity. *Vestnik Magileŭskaga Dzyrzhajŭnaga Ūniversiteta imya A. A. Kulyashova. Ser. B. Pryrodaznaŭchyya Navuki (Matematyka, Fizika, Biyalogiya) = Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences*, 53 (1), 63–70 (in Russian).
 15. Starovoitov E. I. (2008) *Strength of Materials*. Moscow, FIZMATLIT Publ. 384 (in Russian).
 16. Aleksandrovsky S. V., Kolesnikov N. A. (1976) Nonlinear Deformations of Concrete under Complex Loading Conditions. *Beton i Zhelezobeton [Concrete and Reinforced Concrete]*, (4), 27–32 (in Russian).
 17. Ibragimov V. A. (1976) State of Stress and Strain Near the End of a Growing Crack in an Elastic-Plastic Medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 40 (2), 311–319. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(76\)90068-x](https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90068-x).
 18. Shmelev A. V., Kononov A. G., Omelusik A. V. (2017) Identification of Parameters of Multilinear Models of Metals Used in Numerical Modeling of Plastic Deformation and Destruction of Structures. *Nauka i Obrazovanie = Science & Education*, (1), 1–17 (in Russian).
 19. Trifan D. (1949) A New Theory of Plastic Flow. *Quarterly of Applied Mathematics*, 7 (2), 201–211. <https://doi.org/10.1090/qam/30426>.
 20. Nikishkov G. P. (1995) An Algorithm and a Computer Program for the Three-Term Asymptotic Expansion of Elastic-Plastic Crack Tip Stress and Displacement Fields. *Engineering Fracture Mechanics*, 50 (1), 65–83. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00139-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00139-9).
- Received: 22.09.2021
Accepted: 30.11.2021
Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-236-241>

УДК 517.5:519.6

Об одной вариационной задаче, приводящей к бигармоническому уравнению, и о приближенном решении основной краевой задачи для этого уравнения

Докт. физ.-мат. наук, проф. И. Н. Мелешко¹⁾, канд. физ.-мат. наук, доц. П. Г. Ласы́й¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Многие важные вопросы теории упругости приводят к вариационной задаче, связанной с бигармоническим уравнением, и к соответствующим краевым задачам для такого уравнения. В статье рассматривается основная краевая задача для бигармонического уравнения в единичном круге. К этой задаче приводит, например, исследование прогибов пластины в случае кинематических граничных условий, когда перемещения и их производные зависят от круговой координаты. Точное решение рассматриваемой краевой задачи известно. Искомая бигармоническая функция может быть представлена в единичном круге в явном виде посредством интеграла Пуассона. Приближенное решение данной задачи находится иногда с помощью разностных схем. Для этого на круг набрасывается сетка с ячейками малого диаметра и в каждом узле сетки все частные производные задачи заменяются их конечно-разностными отношениями. В результате возникает система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных приближенных значений бигармонической функции, из которой они однозначно находятся. Недостатком такого метода является то, что указанная выше система не всегда просто решается. Кроме того, мы получаем решение не в любой точке круга, а только в узлах сетки. Для реальных вычислений и численного анализа решений прикладных задач авторами на основе известного точного решения краевой задачи сконструировано его единое аналитическое приближенное представление с помощью логарифмов. Приближенная формула имеет простой вид и легко реализуется численно. Равномерные оценки погрешности позволяют проводить вычисления с заданной точностью. Все коэффициенты квадратурной формулы для интеграла Пуассона неотрицательны, что значительно упрощает исследование приближенного решения. Проведен анализ квадратурной суммы на устойчивость. Рассмотрен пример решения краевой задачи.

Ключевые слова: вариационная задача, краевая задача, интеграл Пуассона, квадратурная формула, аппроксимация решения

Для цитирования: Мелешко, И. Н. Об одной вариационной задаче, приводящей к бигармоническому уравнению, и о приближенном решении основной краевой задачи для этого уравнения / И. Н. Мелешко, П. Г. Ласы́й // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 236–241. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-236-241>

About One Variational Problem, Leading to a Biharmonic Equation, and about the Approximate Solution of the Main Boundary Value Problem for this Equation

I. N. Meleshko¹⁾, P. G. Lasy¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Many important questions in the theory of elasticity lead to a variational problem associated with a biharmonic equation and to the corresponding boundary value problems for such an equation. The paper considers the main boundary value problem for the biharmonic equation in the unit circle. This problem leads, for example, to the study of plate deflections in the case of kinematic boundary conditions, when the displacements and their derivatives depend on the circular coordinate. The exact solution of the considered boundary value problem is known. The desired biharmonic function can be represented explicitly in the unit circle by means of the Poisson integral. An approximate solution of this problem is sometimes found

Адрес для переписки

Мелешко Иван Николаевич
Белорусский национальный технический университет
ул. Б. Хмельницкого, 9,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

Address for correspondence

Meleshko Ivan N.
Belarusian National Technical University
9, B. Khmel'nitskogo str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

using difference schemes. To do this, a grid with cells of small diameter is thrown onto the circle, and at each grid node all partial derivatives of the problem are replaced by their finite-difference relations. As a result, a system of linear algebraic equations arises for unknown approximate values of the biharmonic function, from which they are uniquely found. The disadvantage of this method is that the above system is not always easy to solve. In addition, we get the solution not at any point of the circle, but only at the nodes of the grid. For real calculations and numerical analysis of solutions to applied problems, the authors have constructed its unified analytical approximate representation on the basis of the known exact solution of the boundary value problem while using logarithms. The approximate formula has a simple form and can be easily implemented numerically. Uniform error estimates make it possible to perform calculations with a given accuracy. All coefficients of the quadrature formula for the Poisson integral are non-negative, which greatly simplifies the study of the approximate solution. An analysis of the quadrature sum for stability is carried out. An example of solving a boundary value problem is considered.

Keywords: variational problem, boundary value problem, Poisson integral, quadrature formula, solution approximation

For citation: Meleshko I. N., Lasy P. G. (2022) About One Variational Problem, Leading to a Biharmonic Equation, and about the Approximate Solution of the Main Boundary Value Problem for this Equation. *Science and Technique*. 21 (3), 236–241. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-236-241> (in Russian)

Введение

Известно [1], что необходимым условием минимума функционала

$$\iint_D \left((\Delta u)^2 - 2(1-\alpha) \left(\partial_{x^2} u \partial_{y^2} u - (\partial_{xy} u)^2 - 2fu \right) \right) \times \times dx dy - 2 \int_L p(l) u dl + 2 \int_L q(l) \partial_n u dl, \tag{1}$$

где $f(x, y)$, $p(l)$, $q(l)$ – заданная функция; α – числовой параметр, на некотором допустимом множестве функций $u = u(x, y)$, является уравнение

$$\Delta^2 u - f = 0,$$

где $\Delta^2 = \partial_{x^4} + 2\partial_{x^2 y^2} + \partial_{y^4}$.

Линейное однородное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$\Delta^2 u = 0,$$

рассматриваемое в области D , называется бигармоническим в этой области. К краевым задачам для такого уравнения приводят многие вопросы теории упругости [2–6].

Основная часть

Исследуем основную краевую задачу для бигармонического уравнения в полярных координатах в единичном круге:

$$\Delta^2 u = 0, r < 1; \tag{2}$$

$$u(1, \varphi) = f_0(\varphi); \partial_r u(1, \varphi) = f_1(\varphi); \varphi \in [-\pi, \pi], \tag{3}$$

где $f_0(\varphi)$, $f_1(\varphi)$ – заданные непрерывные функции.

Краевая задача (2), (3) имеет единственное решение (например, [2]). Искомая бигармоническая функция $u = u(r, \varphi)$ может быть представлена в единичном круге с помощью интеграла Пуассона

$$u(r, \varphi) = Q(f_0, r, \varphi) + + 0,5(1-r^2)(r\partial_r Q(f_0, r, \varphi) - Q(f_1, r, \varphi)), \tag{4}$$

где

$$Q(f_1, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau; \tag{5}$$

$$Q(f_0, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau. \tag{6}$$

Несложно проверить, что функции $Q(f_1, r, \varphi)$ и $Q(f_0, r, \varphi)$ являются гармоническими в единичном круге. Далее займемся построением приближенного решения.

1. Аппроксимация интеграла Пуассона (5)

Возьмем на промежутке $[-\pi, \pi]$ сетку с узлами в точках

$$\varphi_k = kh, k = \overline{-n, n}, h = \frac{2\pi}{2n+1} \tag{7}$$

и аппроксимируем плотность интеграла Пуассона (5) на этом промежутке по формуле

$$f_1(\varphi) \approx \tilde{f}_1(\varphi) = \sum_{k=-n}^n \eta_k(\varphi) f_1(\varphi_k), \tag{8}$$

где $\eta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, \varphi \in [\varphi_{k-0,5}, \varphi_{k+0,5}], \\ 0, \varphi \notin [\varphi_{k-0,5}, \varphi_{k+0,5}]; \end{cases}$ $\varphi_{k-0,5} = \varphi_k - 0,5h;$

$\varphi_{k+0,5} = \varphi_k + 0,5h.$

В итоге для интеграла Пуассона (5) получаем квадратурную формулу

$$Q(f_1, r, \varphi) \approx Q(\tilde{f}_1, r, \varphi) = \sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) f_1(\varphi_k) \tag{9}$$

с коэффициентами

$$R_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_{k-0,5}}^{\varphi_{k+0,5}} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau. \tag{10}$$

Теорема 1. Все коэффициенты $R_k(r, \varphi)$ квадратурной формулы (9) положительны для любых $r < 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$, вычисляются через логарифмы по формулам

$$R_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(h + 2 \operatorname{Im} \ln \left(1 - ze^{-i\varphi} \right) \Big|_{\varphi_{k-0.5}}^{\varphi_{k+0.5}} \right), \quad (11)$$

$$k = \overline{-n, n},$$

где $z = re^{i\varphi}$ и

$$\sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) = 1, \quad r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (12)$$

Доказательство. Так как ядро интеграла

Пуассона $\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}$ положительно при $r < 1$, то из (10) следует, что $R_k(r, \varphi) > 0, r < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Непосредственно проверяется, что для ядра интеграла Пуассона справедлива формула

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} = 2 \operatorname{Re} \frac{1}{1-z/t} - 1,$$

$$t = e^{i\tau}, \quad z = re^{i\varphi},$$

откуда, используя ряд геометрической прогрессии, находим

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} = 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} z^m e^{-im\tau}.$$

Подставив это представление ядра Пуассона в правую часть формулы (10), получаем

$$R_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\varphi_{k-0.5}}^{\varphi_{k+0.5}} d\tau + 2 \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} z^m \int_{\varphi_{k-0.5}}^{\varphi_{k+0.5}} e^{-im\tau} d\tau \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(h + 2 \operatorname{Im} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m e^{-im\varphi}}{m} \Big|_{\varphi_{k-0.5}}^{\varphi_{k+0.5}} \right).$$

Тогда, используя разложение логарифмической функции в степенной ряд, приходим к формуле (11). Далее очевидно, что

$$\sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau. \quad (13)$$

Известно, что $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau = 1$

при $r < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$. Отсюда, согласно (13), и следует (12).

Примечание. Предположим, что значения функции $f_1(\varphi)$ в узлах квадратурной формулы (9) вычислены приближенно, т. е. $f_1(\varphi_k) \approx f_1^*(\varphi_k), k = \overline{-n, n}$ и, значит, погрешности их вычисления $\varepsilon_k = f_1(\varphi_k) - f_1^*(\varphi_k), k = \overline{-n, n}$. Пусть $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon, k = \overline{-n, n}$. Тогда, благодаря (12), для погрешности вычисления квадратурной суммы в (9) получаем неравенство

$$\left| \sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) f_1(\varphi_k) - \sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) f_1^*(\varphi_k) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) = \varepsilon.$$

Таким образом, верхняя граница погрешности вычисления квадратурной суммы в (9) равна ε , что свидетельствует о численной устойчивости (9). Найдем теперь оценку погрешности аппроксимации интеграла Пуассона по приближенной формуле (9).

Теорема 2. Пусть плотность $f_1(\varphi)$ интеграла Пуассона непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$. Тогда равномерно по $r < 1$ и $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ выполняется неравенство

$$|Q(f_1, r, \varphi) - Q(\tilde{f}_1, r, \varphi)| \leq \omega(f_1, h), \quad (14)$$

где $\omega(f_1, h)$ – модуль непрерывности функции $f_1(\varphi)$. Если же $f_1(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на указанном промежутке, то также равномерно имеет место неравенство

$$|Q(f_1, r, \varphi) - Q(\tilde{f}_1, r, \varphi)| \leq 0,5 M_{f_1} h, \quad (15)$$

$$M_{f_1} = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_1'(\varphi)|.$$

Доказательство. Из (5), (7)–(10) следует, что

$$|Q(f_1, r, \varphi) - Q(\tilde{f}_1, r, \varphi)| \leq \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_1(\varphi) - \tilde{f}_1(\varphi)| \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau.$$

Стало быть, ввиду (12) и (13)

$$|Q(f_1, r, \varphi) - Q(\tilde{f}_1, r, \varphi)| \leq$$

$$\leq \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_1(\varphi) - \tilde{f}_1(\varphi)|. \quad (16)$$

Если функция $f_1(\varphi)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$, то

$$|f_1(\varphi) - \tilde{f}_1(\varphi)| \leq \omega(f_1, h), \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (17)$$

Если же $f_1(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на указанном промежутке, то, применив к этой функции на каждом из отрезков $[\varphi_{k-0.5}, \varphi_{k+0.5}]$, $k = -n, n$ теорему Лагранжа, получим

$$|f_1(\varphi) - \tilde{f}_1(\varphi)| \leq 0,5M_{f_1}h, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (18)$$

Из (16)–(18) и следуют неравенства (14), (15).

2. Аппроксимация интеграла Пуассона (6)

По аналогии можем записать квадратурную формулу для интеграла (6) с узлами (7) и коэффициентами (12)

$$Q(f_0, r, \varphi) \approx Q(\tilde{f}_0, r, \varphi) = \sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) f_0(\varphi_k). \quad (19)$$

Функция $\tilde{f}_0(\varphi)$ в (19) определяется формулой (8), в которой $f_1(\varphi)$ следует заменить функцией $f_0(\varphi)$. Квадратурная формула (19) численно устойчива, а для оценки ее погрешности можно пользоваться неравенствами (14), (15) теоремы 2 для плотности $f_0(\varphi)$

$$|Q(f_0, r, \varphi) - Q(\tilde{f}_0, r, \varphi)| \leq \omega(f_0, h),$$

где $\omega(f_0, h)$ – модуль непрерывности функции $f_0(\varphi)$ или

$$|Q(f_0, r, \varphi) - Q(\tilde{f}_0, r, \varphi)| \leq 0,5M_{f_0}h, \quad M_{f_0} = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_0'(\varphi)|. \quad (20)$$

3. Аппроксимация производной по радиусу интеграла (6)

Гармоническая в единичном круге функция $Q(f_1, r, \varphi)$ представима также рядом

$$Q(f_0, r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\tau) \cos m(\tau - \varphi) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} r\partial_r Q(f_0, r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m r^m \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\tau) \cos m(\tau - \varphi) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{-\pi}^{\pi} f_0(\tau) d \sin m(\tau - \varphi) = \\ &= \frac{1}{\pi} (f_0(\pi) - f_0(-\pi)) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} r^m \sin m\varphi - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{-\pi}^{\pi} f_0'(\tau) \sin m(\tau - \varphi) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Принимая во внимание, что:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} r^m \sin m\varphi &= -\operatorname{Im} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m z^m \right) = \\ &= -\operatorname{Im} \frac{1}{1+z} = \frac{r \sin \varphi}{1+2r \cos \varphi + r^2}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 2) \sum_{m=1}^{\infty} r^m \sin m(\tau - \varphi) &= \operatorname{Im} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{t^m} = \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-z/t} - 1 \right) = \frac{r \sin(\tau - \varphi)}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2}, \end{aligned}$$

$$z = r e^{i\varphi}, \quad t = e^{i\tau},$$

можем переписать (21) в виде

$$\begin{aligned} r\partial_r Q(f_0, r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} (f_0(\pi) - f_0(-\pi)) \times \\ &\quad \times \frac{r \sin \varphi}{1+2r \cos \varphi + r^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0'(\tau) \times \\ &\quad \times \frac{r \sin(\tau - \varphi)}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Квадратурная формула для интеграла в формуле (23) строится тем же способом, что и в интеграле Пуассона. В результате получаем следующую приближенную формулу:

$$\begin{aligned} r\partial_r Q(f_0, r, \varphi) &\approx \frac{1}{\pi} (f_0(\pi) - f_0(-\pi)) \times \\ &\quad \times \frac{r \sin \varphi}{1+2r \cos \varphi + r^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}_0'(\tau) \times \\ &\quad \times \frac{r \sin(\tau - \varphi)}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau = \frac{1}{\pi} (f_0(\pi) - f_0(-\pi)) \times \\ &\quad \times \frac{r \sin \varphi}{1+2r \cos \varphi + r^2} + \sum_{k=-n}^n S_k(r, \varphi) f_0'(\varphi_k), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\tilde{f}_0'(\varphi)$ – определяется формулой (8), в которой f_1 следует заменить функцией f_0' ; $S_k(r, \varphi) =$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_{k-0.5}}^{\varphi_{k+0.5}} \frac{r \sin(\tau - \varphi)}{1-2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau; \quad k = \overline{-n, n}.$$

Из (22) следует, что

$$\begin{aligned} S_k(r, \varphi) &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\sum_{m=1}^{\infty} z^m \int_{\varphi_{k-0.5}}^{\varphi_{k+0.5}} e^{-im\tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m e^{-im\varphi}}{m} \Bigg|_{\varphi_{k+0.5}}^{\varphi_{k-0.5}}. \end{aligned}$$

Суммируя ряды в правой части, окончательно получаем:

$$S_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \ln \left(1 - z e^{-i\varphi} \right) \Big|_{\varphi_{k+0,5}}^{\varphi_{k-0,5}}, \quad k = \overline{-n, n}. \quad (25)$$

4. Аппроксимация решения краевой задачи (2), (3)

Подставляя в формулу (4) приближенные выражения для интегралов из (9), (19) и (24) с коэффициентами (11), (25), получим приближенное решение краевой задачи (2), (3):

$$u(r, \varphi) \approx \tilde{u}(r, \varphi) = \sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) f_0(\varphi_k) + 0,5(r^2 - 1) \times \left(\sum_{k=-n}^n R_k(r, \varphi) f_1(\varphi_k) - \frac{1}{\pi} (f_0(\pi) - f_0(-\pi)) \times \right. \\ \left. \times \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2} - \sum_{k=-n}^n S_k(r, \varphi) f_0'(\varphi_k) \right). \quad (26)$$

Оценим погрешность приближенного решения.

Теорема 3. Если функция $f_1(\varphi)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$, а $f_0(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на этом промежутке, то для всех $r < 1$ и $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

$$|u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi)| \leq 0,5(1 - r^2) \times \omega(f_1, h) + \omega(f_0, h) + r\omega(f_0', h), \quad (27)$$

где $\omega(f_1, h)$, $\omega(f_0, h)$, $\omega(f_0', h)$ – модули непрерывности соответствующих функций.

Если же $f_1(\varphi)$ и $f_0'(\varphi)$ непрерывно дифференцируемы на $[-\pi, \pi]$, то

$$|u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi)| \leq 0,5(0,5(1 - r^2)M_{f_1} + M_{f_0} + rM_{f_0'})h, \quad (28)$$

$$M_{f_1} = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_1'(\varphi)|; \quad M_{f_0} = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_0'(\varphi)|;$$

$$M_{f_0'} = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_0''(\varphi)|.$$

Доказательство. Сравнивая формулы (4) и (26), получаем неравенство

$$|u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi)| \leq 0,5(1 - r^2) \times \left(|Q(f_1, r, \varphi) - Q(\tilde{f}, r, \varphi)| + |Q(f_0, r, \varphi) - Q(\tilde{f}_0, r, \varphi)| \right) + \quad (29)$$

$$+ 0,5(1 - r^2) \left| r \partial_r Q(f_0, r, \varphi) - \sum_{k=-n}^n S_k(r, \varphi) f_0'(\varphi_k) \right| = \varepsilon_1(r, \varphi) + \varepsilon_2(r, \varphi) + \varepsilon_3(r, \varphi).$$

Из неравенств (14), (15) и (20) следует, что:

– если функции $f_1(\varphi)$ и $f_0(\varphi)$ непрерывны на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$\varepsilon_1(r, \varphi) \leq 0,5(1 - r^2)\omega(f_1, h); \quad (30)$$

$$\varepsilon_2(r, \varphi) \leq \omega(f_0, h);$$

– если $f_1(\varphi)$ и $f_0(\varphi)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$\varepsilon_1(r, \varphi) \leq 0,25(1 - r^2)M_{f_1}h; \quad (31)$$

$$\varepsilon_2(r, \varphi) \leq 0,5M_{f_0}h.$$

Слагаемое $\varepsilon_3(r, \varphi)$ запишем в виде интеграла и оценим его

$$\varepsilon_3(r, \varphi) \leq 0,5(1 - r^2) \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_0'(\tau) - \tilde{f}_0'(\tau)| \times \left| \frac{r \sin(\tau - \varphi)}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} \right| d\tau \right| \leq \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_0'(\tau) - \tilde{f}_0'(\tau)| \times \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau \leq r \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_0'(\tau) - \tilde{f}_0'(\tau)| \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau = r \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f_0'(\tau) - \tilde{f}_0'(\tau)|.$$

Отсюда следует, что:

– если функция $f_0'(\varphi)$ непрерывна на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$\varepsilon_3(r, \varphi) \leq r\omega(f_0', h); \quad (32)$$

– если $f_0'(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$\varepsilon_3(r, \varphi) \leq 0,5rM_{f_0'}h. \quad (33)$$

Используя в (29) соответствующие оценки (30)–(33), получим неравенства (27), (28). Оценка погрешности (28) позволяет находить приближенное решение краевой задачи (2), (3) с заданной точностью.

Примечание. Известно, что действительная часть интеграла Шварца с плотностью $\rho(\tau)$ представляет собой интеграл Пуассона с той же плотностью

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\tau) \frac{t+z}{t-z} d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau, \end{aligned} \quad (34)$$

где $t = e^{i\tau}$; $z = r e^{i\varphi}$; $|z| < 1$; $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Точные методы вычисления интегралов Шварца и Гильберта, изложенные в [7, 8], в некоторых случаях позволяют получать точное решение краевой задачи (2), (3), не содержащее интегралов.

Пример. Пусть граничное условие (3) имеет вид $u(1, \varphi) = \cos 2022\varphi$, $\partial_r u(1, \varphi) = |\varphi|$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Интеграл Шварца с такими плотностями находится точно [7, 8]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2022\tau \frac{t+z}{t-z} d\tau = z^{2022}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tau| \frac{t+z}{t-z} d\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} (L^2(z) - L^2(-z)), \end{aligned}$$

где $L^2(z)$ – дилогарифм Эйлера [9, 10], определяемый в круге $|z| < 1$ следующим рядом:

$$L^2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

Тогда, воспользовавшись формулой (4) и учитывая равенство (34), получим точное решение краевой задачи

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = 0,5(r^2 - 1) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Re}(L^2(z) - L^2(-z)) - \right. \\ \left. - 2022r^{2022} \cos 2022\varphi \right) + r^{2022} \cos 2022\varphi. \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

1. Построено эффективное приближенное представление решения основной краевой задачи для бигармонического уравнения в единичном круге. Аппроксимирующая формула эффективна в том смысле, что она имеет достаточно простую аналитическую структуру, устойчива и легко реализуется численно, а равномерные оценки погрешности позволяют проводить вычисления с заранее заданной точностью. Рассмотрен пример краевой задачи при таких граничных условиях на окружности, которые дают возможность найти точное решение с помощью дилогарифмов Эйлера.

2. Аппроксимация решения основной краевой задачи для бигармонического уравнения в единичном круге может быть использована при ре-

шении соответствующих вариационных задач, приводящих к бигармоническому уравнению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.–Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
2. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 1977. 736 с.
3. Михлин, С. Г. Интегральные уравнения / С. Г. Михлин. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 304 с.
4. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. М.: Наука, 1968. 512 с.
5. Векуа, Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н. П. Векуа. М.: Наука, 1970. 380 с.
6. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
7. Пыхтеев, Г. Н. Точные методы вычисления интегралов типа Коши / Г. Н. Пыхтеев. Новосибирск: Наука, 1980. 121 с.
8. Пыхтеев, Г. Н. Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида / Г. Н. Пыхтеев. Новосибирск: Наука, 1982. 127 с.
9. Пыхтеев, Г. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. Минск: Изд-во БГУ, 1976. 68 с.
10. Мелешко, И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. 197 с.

Поступила 21.02.2022

Подписана в печать 26.04.2022

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Kantarovich L. V., Krylov V. I. (1962) *Approximate Methods of Higher Analysis*. Moscow–Leningrad, Fizmatgiz Publ. 708 (in Russian).
2. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. (1977) *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
3. Mikhlin S. G. (1947) *Integral Equations*. Moscow–Leningrad, Gostekhizdat Publ. 304 (in Russian).
4. Muskhelishvili N. I. (1968) *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka Publ. 512 (in Russian).
5. Vekua N. P. (1970) *Systems of Singular Integral Equations and Some Boundary Problems*. Moscow, Nauka Publ. 380 (in Russian).
6. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. (1973) *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
7. Pykhteev G. N. (1980) *Exact Methods for Calculating Cauchy-Type Integrals*. Novosibirsk, Nauka Publ. 121 (in Russian).
8. Pykhteev G. N. (1982) *Approximate Methods for Computing Cauchy-Type Integrals of Special Form*. Novosibirsk, Nauka Publ. 127 (in Russian).
9. Pykhteev G. N., Meleshko I. N. (1976) Polylogarithms, their Properties and Calculation Methods. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 68 (in Russian).
10. Meleshko I. N. (1999) *Special Formulas for Cauchy-Type Integrals and their Applications*. Minsk, VUZ-UNITI Publ. 197 (in Russian).

Received: 21.02.2022

Accepted: 26.04.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-242-249>

УДК 005.932:656.136 (476)

Экономические основы развития логистики международных автомобильных перевозок грузов в Республике Беларусь в условиях пандемии коронавируса

Чл.-кор. НАН Беларуси, докт. экон. наук, проф. Р. Б. Ивуть¹⁾, магистр А. С. Зиневич¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Рассмотрен вопрос развития международной логистики в Беларуси в условиях мировой пандемии коронавирусной инфекции COVID-19. При аналитическом обзоре современной научной литературы по исследуемой проблеме отмечена целесообразность выделения логистики международных автомобильных перевозок грузов в качестве самостоятельного направления теоретических исследований и практической деятельности. Дальнейшее развитие логистики международных грузовых перевозок в Республике Беларусь требует проведения комплексного экономического анализа текущего состояния и динамики рынка международных автомобильных перевозок грузов, реализация которого является целью настоящей публикации. В статье представлены результаты анализа рынка международных и транзитных грузовых автомобильных перевозок. Отдельно охарактеризована динамика сегмента транзитной транспортировки товаров на этом рынке в условиях переориентации международных грузовых потоков. Отмечена взаимосвязь между объемными показателями международного автомобильного транзита грузов через территорию Беларуси с динамикой импорта товаров в Российскую Федерацию из стран Европейского союза. Впервые предложено использование методического инструментария системно-матричного диагностического анализа для исследования макроэкономического процесса развития логистики международных автомобильных перевозок грузов. Сформирован авторский набор исходных параметров для проведения анализа, представлены его результаты на основе данных формы государственной статистической отчетности за 2019–2020 гг. Предложено совместное использование инструментария системно-матричного диагностического анализа в сочетании с авторской методикой оценки эффективности транзитных (международных) автомобильных грузоперевозок при оценке конкурентоспособности хозяйствующих субъектов отрасли. Отмечены наиболее характерные тенденции развития рынка в краткосрочной перспективе с учетом усложнившейся рыночной конъюнктуры.

Ключевые слова: международная экономическая интеграция, логистика, международные автомобильные перевозки грузов, пандемия коронавируса COVID-19, анализ рынка, транзитные автомобильные перевозки грузов, системно-матричный диагностический анализ, методика оценки эффективности международных (транзитных) перевозок, тенденции развития

Для цитирования: Ивуть, Р. Б. Экономические основы развития логистики международных автомобильных перевозок грузов в Республике Беларусь в условиях пандемии коронавируса / Р. Б. Ивуть, А. С. Зиневич // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 242–249. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-242-249>

Economic Fundamentals for Development of International Road Freight Transportation Logistics in the Republic of Belarus under Coronavirus Pandemic

R. B. Ivut¹⁾, A. S. Zinevich¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers an issue of international logistics development in Belarus under world coronavirus COVID-19 pandemic. As a result of analytical reviewing of the up-to-date scientific literature on the problem under study, the expediency

Адрес для переписки

Ивуть Роман Болеславович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 12,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-75-31
eut_atf@bntu.by

Address for correspondence

Ivut Roman B.
Belarusian National Technical University
12, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-75-31
eut_atf@bntu.by

is stated for highlighting the logistics of international road freight transportation as an independent area of theoretical research and practical activity. Further development of international road freight transportation logistics in the Republic of Belarus requires a complex economic analysis of the present state and dynamics of the international road freight transportation market, which is the main purpose of the present publication. The paper contains the results of the analysis of the market for international and transit freight road transportation. Separately the paper points out the dynamics of transit goods transportation segment in this market in response to the reorientation of international freight flows. Interconnection is shown between the volume indices of international road freight transit through the territory of Belarus and the dynamics of goods import to the Russian Federation from the EU countries. For the first time a proposal is given to use the methodological tools of system-matrix diagnostic analysis for investigation of the macroeconomic development process of international road freight transit logistics. The author's set of initial parameters for the analysis has been formed, and its results are presented on the basis of the data of the State statistical reporting form for 2019–2020. A suggestion is given for joint usage of system-matrix diagnostic tools in combination with author's methodology for assessing the effectiveness of transit (international) freight transportation while evaluating the competitiveness of economic entities in the industry. The most typical trends of the market development in the short term are stated, taking into account the more complicated market conditions.

Keywords: international economic integration, logistics, international road freight transportation, pandemic of coronavirus COVID-19, market analysis, transit road freight transportation, system-matrix diagnostic analysis, methodology for assessing the effectiveness of international (transit) transportation, development trends

For citation: Ivut R. B., Zinevich A. S. (2022) Economic Fundamentals for Development of International Road Freight Transportation Logistics in the Republic of Belarus under Coronavirus Pandemic. *Science and Technique*. 21 (3), 242–249. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-242-249> (in Russian)

Введение

В настоящее время развитие международных экономических отношений на основе мирового разделения труда осуществляется в сложных условиях пандемии коронавирусной инфекции COVID-19. Географическое положение Республики Беларусь предопределяет высокую значимость сферы международных грузовых перевозок для экономического развития страны. Усложнение рыночной конъюнктуры и переориентация грузовых потоков по причине пандемии требуют дальнейшего развития и распространения в стране новых методических подходов и экономических инструментов международного логистического менеджмента в целом и логистики международных автомобильных грузовых перевозок в частности (с учетом приоритетности автотранспорта для компактной внутриконтинентальной территории республики).

Проблемам текущего этапа развития международной логистики посвящены научные труды ряда отечественных и зарубежных авторов: В. А. Лазарева и В. И. Воронова [1], А. Е. Эмировой и Н. Д. Эмирова [2], И. В. Карапетянц и Е. И. Павловой [3], Р. Б. Ивута [4–6], В. Г. Булавко и П. Г. Никитенко [7]. При этом сам термин «логистика международных перевозок» встречается лишь в [3, 5], хотя актуальность его выделения в качестве самостоятельной области международной логистики и детального исследования сегодня не вызывает сомнений. Современная экономическая ситуация, связанная с пандемией коронавируса, повлекла

изменения в структуре и объемах международных автомобильных перевозок (МАП) грузов, а также поступлений валютных средств в бюджет страны. В связи с этим в статье проведен анализ и показана динамика рынка МАП в Беларуси с учетом внешних и внутренних факторов.

Анализ рынка международных автомобильных перевозок грузов в Беларуси

Важнейшей структурной подсистемой в составе транспортного комплекса страны традиционно выступает международный автомобильный грузовой транспорт, имеющий стратегическое значение и оказывающий значительное и многоаспектное воздействие на процесс экономического развития с позиции валютных поступлений в бюджет. До начала мировой пандемии коронавирусной инфекции COVID-19 рынок международных автомобильных перевозок грузов (включая транзит) как в Европейском союзе, так и в странах Азии находился на стадии подъема с 1995 г. Однако с началом пандемии его развитие замедлилось, в том числе в Беларуси. Для республики приоритетность развития МАП грузов во многом связана с обеспечением значительных поступлений валютных средств в бюджет страны в ходе реализации данного вида деятельности. Международная транспортировка товаров – стабильный источник доходов в иностранной валюте для отечественных перевозчиков, транспортных экспедиторов, логистических операторов и инфраструктурных объектов.

Несмотря на негативные изменения мировой и региональной рыночной конъюнктуры из-за пандемии коронавируса, в Беларуси по итогам 2020 г. сохранился (хотя и относительно замедлился до +0,7 % в год) прирост объема экспорта услуг грузового автомобильного транспорта, который составил 1391,5 млн дол. США (рис. 1 [8]).



Рис. 1. Экспорт услуг по транспортировке грузов автомобильным транспортом в Беларуси

Fig. 1. Service export volume for road freight transportation in Belarus

Внешняя торговля услугами по грузовой транспортировке автомобильным транспортом сохранила за собой вторую по объему позицию в структуре совокупного экспорта услуг страны. Как следует из рис. 1, в республике на протяжении 2016–2020 гг. четко прослеживалась тенденция стабильного прироста валютных поступлений от МАП. За десять лет (2010–2020 гг.) годовой объем экспорта услуг грузового автотранспорта увеличился более чем в два раза. Следует отметить, что удельный вес грузовых перевозок в общем объеме экспорта услуг автомобильного транспорта превышает 90 % [6, с. 250].

Основными количественными показателями, характеризующими результаты развития рынка МАП, являются количество перевозок (поездов) и объем транспортируемых грузов. Динамика этих показателей представлена на рис. 2, 3.



Рис. 2. Количество международных автомобильных грузовых перевозок в Беларуси в период 2015–2020 гг.

Fig. 2. Number of international road freight transportation in Belarus in the period of 2015–2020



Рис. 3. Объем международных грузоперевозок в Беларуси автомобильным транспортом в период 2015–2020 гг.

Fig. 3. Volume of international road freight transportation in Belarus in the period of 2015–2020

В 2019 г. достигнуто наибольшее количество МАП грузов – более 1,8 млн поездок, в том числе осуществляемых иностранными перевозчиками – 1259,5 тыс. поездок, белорусскими – почти 550 тыс. поездок [6, с. 250]. В 2020-м общее количество международных перевозок уменьшилось на 0,48 %, в основном за счет снижения числа поездок иностранных перевозчиков на 2,61 %. При этом на 0,45 % увеличилось число поездок отечественных перевозчиков.

Суммарный объем грузов, перевезенных международным автотранспортом через Беларусь в 2019 г., превысил 28,5 млн т, из которых 69 % грузов перевезено иностранными (более 19,7 млн т, в том числе 3,3 млн т по процедуре МДП) и 31 % – белорусскими перевозчиками (более 8,8 млн т, в том числе 391,3 тыс. т по МДП) [6, с. 250]. Необходимо отметить неуклонное снижение объемных показателей перевозок в рамках системы МДП. Так, в работе отечественных перевозок доля поездок по процедуре МДП уменьшилась с 68,6 % в 2006 г. до 3,7 % в 2020-м. В работе иностранных перевозчиков имеет место аналогичная тенденция.

На вышеуказанные показатели значительное влияние оказывает структура парка подвижного состава международных перевозчиков с позиции соответствия экологическим стандартам Евро, которая отражена на рис. 4 за период 2015–2020 гг.

По состоянию на 01.01.2021 численность парка грузовых автотранспортных средств, зарегистрированных в республике для работы в системе МДП, превысила 12 тыс. ед. (при общей численности парка 19,8 тыс. ед.). В течение анализируемого периода международный

грузовой автомобильный парк страны увеличился на 9,2 %. В структуре парка по экологическим стандартам Евро более 50 % приходится на класс Евро-5. Вместе с тем увеличивается доля грузовых автомобилей класса Евро-6, которая возросла до 13,1 % в 2020 г. Это свидетельствует об улучшении экологической структуры парка подвижного состава, осуществляющего МАП грузов.

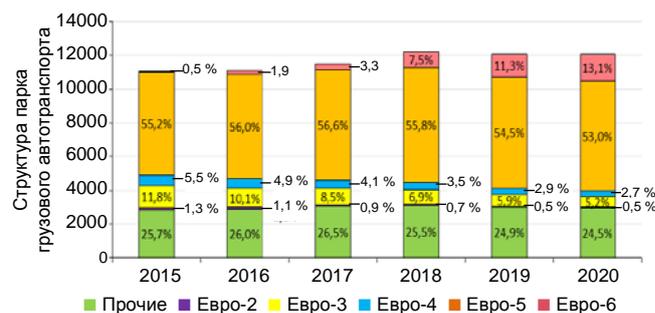


Рис. 4. Экологическая структура парка международного грузового автотранспорта Беларуси в период 2015–2020 гг.

Fig. 4. Environmental standard structure of international truck fleet in Belarus in the period of 2015–2020

Основные показатели работы международного грузового автомобильного транспорта республики в 2015 и 2020 гг. приведены в табл. 1 [8].

Анализ показал, что экспортные поступления от МАП грузов в 2015–2020 гг. увеличились в 1,6 раза, объем выручки – почти в 2,2 раза, а годовое количество поездок международного грузового автотранспорта – в 1,46 раза. Годовые объемы перевозок и транспортная работа по международным грузовым автоперевозкам увеличились соответственно в 1,4 и 1,3 раза. Отмечается рост и других показателей работы транспорта, занятого МАП.

Таблица 1

Показатели деятельности международных автомобильных грузоперевозчиков в Беларуси
Activity indicators of international road freight carriers in Belarus

Показатель	2015 г.	2020 г.
Экспортные поступления от грузовых МАП, млн дол. США	852,2	1391,5
Выручка международных автоперевозчиков грузов, млн руб.	1367,2	2963,1
Количество перевозок грузов в международном сообщении, поездки	713811	1045037
Объем перевезенных грузов в международном сообщении, млн т	11,3	16,2
Грузооборот международного автотранспорта, млрд т-км	16,7	21,6
Количество автомобилей, осуществляющих МАП грузов, ед.	15692	19815
Среднесписочная численность работников на МАП, чел., в том числе: водителей, чел.	27954 18981	32003 22054

Анализ рыночного сегмента транзитных автомобильных перевозок грузов в Беларуси

Как отмечено в [9, 10], крайне важным элементом МАП грузов является их транзит через территорию Республики Беларусь, обладающей значительным транзитным потенциалом. На рис. 5 [11] представлены результаты сравнительного анализа динамики годового объема автомобильного транзита грузов через территорию Беларуси и годового объема импорта товаров в Россию из стран Евросоюза.



Рис. 5. Взаимосвязь между объемом транзитных автомобильных грузовых перевозок через территорию Беларуси и объемом импорта товаров в Россию из стран Евросоюза

Fig. 5. Correlation between the volume of transit road freight transportation through the territory of Belarus and the volume of import to Russia from the European Union countries

Из рис. 5 видно, что действие взаимных санкций между Россией и странами Евросоюза в одинаковой степени влияет на объемы внешнеторговых перевозок в Россию и на количество грузов, перевозимых транзитом через территорию Беларуси. Так, ухудшение отношений между государствами Европы и Россией в 2014–2016 гг. привело к уменьшению объема импорта товаров в Россию из стран Евросоюза на 44,0 %, что, в свою очередь, повлекло снижение годового объема автомобильного транзита грузов в Беларуси на 16,1 %. Однако в дальнейшем внешняя торговля между указанными странами улучшилась, что позитивно повлияло на объем грузового транзита автотранспортом через Беларусь. Например, в 2020 г. он увеличился на 30 % по сравнению с 2016-м. В 2015–2018 гг. наблюдалась наиболее тесная корреляция динамики объемов транзита грузов автотранспортом в Беларуси и импорта в Россию из стран Евросоюза (значение коэффициента корреляции составило 96,8 %). Дальнейшее расхождение в динамике показателей свидетельствует о переориентации транзитных

грузопотоков, перемещаемых автотранспортом через территорию Беларуси.

Доля транзита грузов через Беларусь в 2020 г. составила 59,2 % в объеме международных автомобильных перевозок грузов. В структуре автомобильного транзита в 2020 г. традиционно преобладали грузы, доставляемые иностранными перевозчиками (87,4 %). Доля белорусских автоперевозчиков в объеме автомобильного транзита сложилась на уровне 12,6 %. В общем объеме автомобильного транзита грузов иностранными перевозчиками по территории Беларуси в 2020 г. (100 %) наибольший удельный вес имели грузы, транспортируемые международными перевозчиками с регистрацией в России (55,0 %), Польше (20,9 %) и Литве (7,3 %).

Экономическая диагностика исследуемого рынка международных автомобильных перевозок и перспективы его развития

Проведенный выше анализ рынка МАП преимущественно касается его количественных характеристик, таких как число поездок, объем перевозок, численность и состав парка подвижного состава. При этом комплексный экономический анализ на основе системного подхода требует дополнительного исследования динамики показателей, связанных с доходами, затратами и финансовыми результатами субъектов рынка. В качестве методического инструментария для проведения анализа избран матричный метод, обладающий большими возможностями и широко используемый при микроэкономическом анализе производственно-хозяйственной деятельности транспортных предприятий [12] и нетранспортных организаций [13]. Применение матричного метода в макроэкономическом анализе предполагает представление ключевых результативных показателей субъектов рынка «в виде квадратной матрицы, элементами которой являются отношения выбранных показателей по ее столбцу к исходному показателю по строке» [12, с. 72]. В таком случае совокупность значений показателей в матрице, именуемых целевыми элементами C_{ij} , формирует взаимосвязанную систему экономического диагностирования динамики рынка.

Источником информации для проведения матричного анализа служат данные формы государственной статистической отчетности 4-тр (международные) (Минтранс) «Отчет о международных автомобильных перевозках». Сформированные в исследовании матричные модели

для диагностирования рынка международных автомобильных грузоперевозок в Беларуси за базисный (2019 г.) и отчетный (2020 г.) периоды представлены соответственно в табл. 2, 3.

В качестве исходных показателей выбраны 10 параметров деятельности субъектов рынка международных автомобильных грузоперевозок: прибыль (убыток) от деятельности транспорта ПР; доходы (выручка от эксплуатации автомобилей) Д; объем грузовых перевозок Q; грузооборот P; пробег с грузом $L_{гр}$; количество поездок N; налоги от деятельности грузового автотранспорта Н; затраты З, связанные с эксплуатацией грузовых автомобилей; количество грузовых автомобилей А; среднесписочная численность работников Ч.

Целевые элементы матричных моделей в табл. 2, 3, расположенные под так называемой главной диагональю (состоящей из единиц), имеют определенное экономическое содержание, а их динамика свидетельствует о развитии

исследуемого рынка. Так, например, по целевым элементам:

– $C_{8.1}$: рентабельность деятельности международных автомобильных перевозчиков грузов возросла с отрицательного значения $-0,11\%$ в 2019 г. до положительного $4,39\%$ в 2020-м;

– $C_{5.2}$: выручка на один километр пробега с грузом выросла на $15,9\%$;

– $C_{9.2}$: выручка на один автомобиль в 2020 г. увеличилась на $16,3\%$ и составила $150,26$ руб.;

– $C_{10.2}$: стоимостная оценка производительности труда на МАП грузов в 2020 г. достигла уровня $92,6$ тыс. руб. на одного работника сферы;

– $C_{6.5}$: средний пробег с грузом за одну международную перевозку составил по итогам 2020 г. $1289,8$ км, показав уменьшение на $0,7\%$ к значению 2019-го;

– $C_{9.8}$: средние затраты на одно грузовое автотранспортное средство в 2020 г. составили $143,35$ тыс. руб./год, увеличившись на $11,4\%$ к уровню 2019-го, и т. д.

Таблица 2

Матричная модель рынка международных автомобильных грузоперевозок в Беларуси, 2019 г.

Matrix model for international road freight transportation market in Belarus, 2019

	ПР, тыс. руб.	Д, тыс. руб.	Q, тыс. т	P, тыс. т-км	$L_{гр}$, тыс. км	N, поездки	Н, тыс. руб.	З, тыс. руб.	А, ед.	Ч, чел.
ПР	1	-894,67	-5,7335	-7428,9	-472,02	-363,04	-37,690	-891,39	-6,9265	-11,750
Д	-0,0011	1	0,0064	8,3035	0,5276	0,4058	0,0421	0,9963	0,0077	0,0131
Q	-0,1744	156,04	1	1295,72	82,3276	63,3188	6,5737	155,47	1,2081	2,0494
P	-0,0001	0,1204	0,0007	1	0,0635	0,0489	0,0051	0,1200	0,0009	0,0016
$L_{гр}$	-0,0021	1,8954	0,0121	15,7385	1	0,7691	0,0798	1,8885	0,0147	0,0249
N	-0,0028	2,4644	0,0158	20,4634	1,3002	1	0,1038	2,4554	0,0191	0,0324
Н	-0,0265	23,7376	0,1521	197,11	12,5238	9,6322	1	23,6507	0,1838	0,3118
З	-0,0011	1,0037	0,0064	8,3340	0,5295	0,4073	0,0423	1	0,0078	0,0132
А	-0,1444	129,17	0,8278	1072,54	68,1473	52,4127	5,4414	128,69	1	1,6964
Ч	-0,0851	76,1409	0,4879	632,24	40,1714	30,8962	3,2076	75,8622	0,5895	1

Таблица 3

Матричная модель рынка международных автомобильных грузоперевозок в Беларуси, 2020 г.

Matrix model for international road freight transportation market in Belarus, 2020

	ПР, тыс. руб.	Д, тыс. руб.	Q, тыс. т	P, тыс. т-км	$L_{гр}$, тыс. км	N, поездки	Н, тыс. руб.	З, тыс. руб.	А, ед.	Ч, чел.
ПР	1	23,8979	0,1310	173,85	10,8713	8,4284	0,9606	22,7994	0,1590	0,2581
Д	0,0418	1	0,0055	7,2746	0,4549	0,3527	0,0402	0,9540	0,0067	0,0108
Q	7,6344	182,45	1	1327,22	82,9954	64,3456	7,3333	174,06	1,2142	1,9705
P	0,0058	0,1375	0,0008	1	0,06253	0,0485	0,0055	0,1311	0,0009	0,0015
$L_{гр}$	0,0920	2,1983	0,0120	15,9915	1	0,7753	0,0884	2,0972	0,0146	0,0237
N	0,1186	2,8354	0,0155	20,6264	1,2898	1	0,1140	2,7051	0,0188	0,0306
Н	1,0411	24,8791	0,1364	180,99	11,3176	8,7745	1	23,7355	0,1656	0,2687
З	0,0439	1,0482	0,0057	7,6251	0,4768	0,3697	0,0421	1	0,0070	0,0113
А	6,2875	150,259	0,8236	1093,07	68,3533	52,9938	6,0396	143,35	1	1,6229
Ч	3,8743	92,5882	0,5075	673,54	42,1188	32,6543	3,7215	88,3323	0,6162	1

Из приведенных для примера тенденций развития рынка первые четыре (по целевым элементам $C_{8,1}$, $C_{5,2}$, $C_{9,2}$, $C_{10,2}$ матричной модели) носят позитивный характер, в то время как последние две тенденции (по целевым элементам $C_{6,5}$, $C_{9,8}$ матричной модели) могут быть отнесены к числу негативных проявлений рыночной конъюнктуры. Представленные методические и практические рекомендации для оценки уровня развития логистики МАП грузов в Республике Беларусь могут использоваться в практике хозяйствующими субъектами в сочетании с существующей авторской методикой для микроэкономической оценки эффективности конкретных международных (транзитных) перевозок грузов, положения которой изложены в [14, 15].

Развитие отечественного рынка МАП грузов в 2021 г. осуществлялось под влиянием последствий мировой пандемии, в условиях которой отмечены новые тенденции его развития:

1) рост уровня затрат на осуществление международных грузоперевозок в разрезе основных статей себестоимости: заработная плата водителей, стоимость топлива, расходы по техническому обслуживанию и ремонту подвижного состава, стоимость страхования, экспедирования, лизинга;

2) значительные колебания стоимости транспортных услуг: имеющиеся экспертные оценки свидетельствуют, что данная тенденция носит повсеместный характер (внутрироссийские ставки фрахта с начала года выросли примерно на 20 %, европейские – на 10–35 % [16]);

3) рост внешних рисков, связанных с пролонгацией времени самой международной транспортировки и совершением сопутствующих финансовых операций, а также прочие финансовые затруднения в работе рынка (несоблюдение договорных сроков выплат, риски неплатежей);

4) усиление интеграции белорусского и российского рынков, прежде всего проявляющееся в форме создания белорусских филиалов субъектами российского транспортного бизнеса, деятельность которых приоритетно связана с осуществлением перевозок в/из России и во многом обеспечивается высоким кадровым потенциалом республики;

5) определенные негативные ожидания участников рынка в значительной степени связаны с планируемыми изменениями норм законода-

тельства по налогообложению в сторону ужесточения требований к индивидуальным предпринимателям и субъектам малого и среднего бизнеса;

б) недостаточно высоки в Беларуси текущие темпы цифровой трансформации транспортного рынка, требующей дальнейших мер «по внедрению электронного документооборота в сфере грузоперевозок, в том числе e-CMR и eTIR» [16].

ВЫВОДЫ

1. Проведенный анализ рынка международных автомобильных грузовых перевозок в Беларуси отражает проявление следующих последствий мировой пандемии коронавирусной инфекции COVID-19: замедление роста выручки международных перевозчиков и объемов международных и транзитных грузоперевозок до 1 % в год и переориентация грузовых потоков в регионе актуализируют поиск и использование резервов развития логистики международных перевозок в республике.

2. Предложено новое направление для использования системно-матричного диагностического анализа, традиционно применяемого в микроэкономическом анализе производственно-хозяйственной деятельности автотранспортных предприятий. Авторский подход предполагает использование модифицированной версии системно-матричного диагностического анализа для целей макроэкономического анализа текущего состояния и динамики развития логистики международных автомобильных перевозок грузов. Сформирован комплекс исходных показателей для проведения указанного вида анализа, приведен пример применения его инструментария на основе статистических данных из формы государственной отчетности 4-тр (международные) (Минтранс) за 2019–2020 гг.

3. В качестве основных тенденций текущего этапа развития рынка международных автомобильных перевозок грузов в Беларуси в краткосрочной перспективе отмечены рост уровня затрат на перевозки, высокая волатильность транспортных тарифов, рост финансовых и временных рисков, относительно невысокие темпы цифровизации транспортно-логистической отрасли. Преодоление указанных барьеров призвано стать основным ориентиром в процессе развития логистики международных грузоперевозок в республике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарев, В. А. Международная логистика / В. А. Лазарев, В. И. Воронов. М.: КНОРУС, 2022. 236 с.
2. Эмирова, А. Е. Международная логистика / А. Е. Эмирова, Н. Д. Эмиров. М.: Юрайт, 2021. 173 с.
3. Карапетянц, И. В. Логистика и управление цепями поставок на транспорте / под ред. И. В. Карапетянц, Е. И. Павловой. М.: Юрайт, 2022. 362 с.
4. Транспортно-логистическая система Республики Беларусь: теория, методология, практика / под общ. и науч. ред. Р. Б. Ивуть. Волгоград: Сфера, 2016. 292 с.
5. Ивуть, Р. Б. Международная логистика / Р. Б. Ивуть, А. Г. Баханович, Т. Р. Косовская. Минск: БНТУ, 2017. 93 с.
6. Ивуть, Р. Б. Логистика / Р. Б. Ивуть. Минск: БНТУ, 2021. 462 с.
7. Булавко, В. Г. Формирование транспортно-логистической системы Республики Беларусь / В. Г. Булавко, П. Г. Никитенко. Минск: Беларус. навука, 2009. 356 с.
8. Луцевич, А. Курс устойчив / А. Луцевич // Транспорт & Транзит. 2021. № 2. С. 12–15.
9. Ивуть, Р. Б. Развитие транзитного потенциала Республики Беларусь в условиях формирования ее транспортно-логистической системы / Р. Б. Ивуть, А. Ф. Зубрицкий, А. С. Зиневиц // Новости науки и технологий. 2015. № 1. С. 19–33.
10. Ивуть, Р. Б. Формирование организационно-экономических основ развития транзитного потенциала Республики Беларусь в области автомобильных перевозок / Р. Б. Ивуть, А. С. Зиневиц // Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2015. Т. 1, № 1. С. 151–165.
11. Гольдман, Г. Э. Оценка рисков, влияющих на транзит товаров и транспортных средств через территорию Республики Беларусь / Г. Э. Гольдман, С. П. Якубович, А. И. Кункевич // Перспективы развития транспортного комплекса: материалы VI Междунар. заоч. науч.-практ. конф. Минск: БелНИИТ «Транстехника», 2021. С. 108–118.
12. Бачурин, А. А. Анализ производственно-хозяйственной деятельности автотранспортных организаций / А. А. Бачурин. М.: Юрайт, 2018. 318 с.
13. Уварова, Г. В. Экономический советник менеджера / Г. В. Уварова, В. А. Анташов. М.: ИД «Экономическая газета», 2008. 384 с.
14. Зиневиц, А. С. Формирование методического обеспечения для исследования транзитного потенциала Республики Беларусь / А. С. Зиневиц // Экономическая наука сегодня: сб. науч. ст. Минск: БНТУ, 2018. Вып. 7. С. 285–294.
15. Зиневиц, А. С. Методика оценки эффективности транзитных автомобильных грузоперевозок в Беларуси / А. С. Зиневиц // Автотракторостроение и автомобильный транспорт: сб. науч. тр.: в 2 т. Минск: БНТУ, 2020. Т. 2. С. 231–235.
16. Азаревич, Т. Перевозчик правит бал / Т. Азаревич // Транспорт & Транзит. 2021. № 4. С. 14–17.

Поступила 04.02.2022

Подписана в печать 06.04.2022

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Lazarev V. A., Voronov V. I. (2022) *International Logistics*. Moscow, KNORUS Publ. 236 (in Russian).
2. Emirova A. E., Emirov N. D. (2021) *International Logistics*. Moscow, Yurait Publ. 173 (in Russian).
3. Karapetyants I. V., Pavlova E. I. (2022) *Logistics and Supply Chain Management in Transport*. Moscow, Yurait Publ. 362 (in Russian).
4. Ivut R. B., Kisel' T. R., Popov P. V., Khartovskii V. E., Shevchenko O. V. (2016) *Transport-Logistical System in the Republic of Belarus: Theory, Methodology, Practice*. Volgograd, Sfera Publ. 292 (in Russian).
5. Ivut R. B., Bakhanovich A. G., Kosovskaya T. R. (2017) *International Logistics*. Minsk, Belarusian National Technical University. 93 (in Russian).
6. Ivut R. B. (2021) *Logistics*. Minsk, Belarusian National Technical University. 462 (in Russian).
7. Bulavko V. G., Nikitenko P. G. (2009) *Formation of the Transport-Logistical System of the Republic of Belarus*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ. 356 (in Russian).
8. Lutsevich A. (2021) The Course is Stable. *Transport & Transit*, (2), 12–15 (in Russian).
9. Ivut R. B., Zubritskiy A. F., Zinevich A. S. (2015) Transit Capacity Development in the Republic of Belarus in the Context of its Transport-Logistical System Formation. *Novosti Nauki i Tekhnologii* [News of Science and Technologies], (1), 19–33 (in Russian).
10. Ivut R. B., Zinevich A. S. (2015) Formation of Economic-Organizing Basics of Transit Capacity Development in the Republic of Belarus in the Field of Road Transportations. *Vestnik Nauki i Obrazovaniya Severo-Zapada Rossii = Journal of Science and Education of North-West Russia*, 1 (1), 151–165 (in Russian).
11. Goldman G. E., Yakubovich S. P., Kunkevich A. I. (2021) Assessment of Risks Affecting the Transit of Goods and Vehicles Through the Territory of the Republic of Belarus. *Perspektivy Razvitiya Transportnogo Kompleksa: Materialy VI Mezhdunar. Zaoch. Nauch.-Prakt. Konf.* [Prospects of Transport Complex Development: Proceedings of the VI Scientific-Practical Conference]. Minsk, Belarusian Research Institute of Transport "Transtekhnika", 108–118 (in Russian).
12. Bachurin A. A. (2018) *Analysis of Industrial and Economic Activity of Road Transport Enterprises*. Moscow, Yurait Publ. 318 (in Russian).
13. Uvarova G. V., Antashov V. A. (2008) *Economic Counselor of Manager*. Moscow, Ekonomicheskay Gazeta Publ. 384 (in Russian).
14. Zinevich A. S. (2018) Formation of Methodological Supply for Transit Capacity Research in the Republic of Belarus. *Ekonomicheskaya Nauka Segodnya: Sb. Nauch. St.* [Economic Science Today: Collection of Scientific Papers]. Minsk, Belarusian National Technical University, (7), 285–294 (in Russian).
15. Zinevich A. S. (2020) Methodology for Assessing the Effectiveness of Transit Road Cargo Transportation in Belarus. *Avtotraktorostroenie i Avtomobil'nyi Transport: Sb. Nauch. Tr. T. 2* [Autotractor-Building and Road Transport: Collection of Scientific Papers. Vol. 2]. Minsk, Belarusian National Technical University, 231–235 (in Russian).
16. Azarevich T. (2021) The Carrier Rules the Ball. *Transport & Transit*, (4), 14–17 (in Russian).

Received: 04.02.2022

Accepted: 06.04.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-250-256>

УДК 331.5.024.52:332

Методология прогнозирования обеспеченности кадрами в Комплексном прогнозе научно-технического прогресса и направления ее совершенствования

Канд. физ.-мат. наук И. В. Салтанова¹⁾, М. А. Седнина¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Создание и внедрение во все сферы жизнедеятельности общества инновационных товаров, новых продуктовых групп, услуг и технологий на фоне глобальной цифровизации экономики требуют повышения квалификации имеющихся кадров, а также появления новых специальностей и профессий. В этой связи возникает необходимость прогнозирования потребности в кадрах новых специальностей и специализаций, а также изучения возможностей повышения квалификации и переподготовки уже имеющихся специалистов. Проанализирован опыт Комплексного прогноза научно-технического прогресса (КП НТП) Республики Беларусь на 2021–2025 гг. и на период до 2040 г. в части обеспеченности кадрами для инновационного развития. При формировании КП НТП необходимый кадровый потенциал оценивался методом экспертного опроса. Прогнозирование потребности в кадрах в КП НТП имело ряд ограничений, которые представляется возможным частично устранить при разработке следующего КП НТП и других прогнозов потребности в кадрах для инновационной экономики. В статье рассмотрены возможные направления совершенствования прогнозирования обеспеченности экономики кадрами для инновационного развития. Обеспеченность экономики кадрами целесообразно оценивать с учетом исследования соотношения спроса и предложения на них в количественном и качественном аспектах. Предложены алгоритмы оценки: потребности национальной экономики в кадрах для инновационного развития; наличия кадров для инновационного развития и их компетенций в организациях реального сектора экономики; возможностей системы образования для подготовки кадров для инновационного развития. Совершенствование методологии прогнозирования обеспеченности кадрами позволит выявить наиболее перспективные направления подготовки кадров необходимых компетенций и квалификаций, способных заниматься разработкой и внедрением технологических инноваций для дальнейшего развития Республики Беларусь.

Ключевые слова: прогнозирование, потребность в кадрах, подготовка кадров, компетенции, методология прогнозирования, форсайт-исследование, инновационное развитие, технологические инновации, высокотехнологичный сектор экономики

Для цитирования: Салтанова, И. В. Методология прогнозирования обеспеченности кадрами в Комплексном прогнозе научно-технического прогресса и направления ее совершенствования / И. В. Салтанова, М. А. Седнина // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 250–256. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-250-256>

Methodology for Forecasting Staffing in the Comprehensive Forecast of Scientific and Technological Progress and Directions for its Improvement

I. V. Saltanova¹⁾, M. A. Sednina¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Developing and implementing innovative goods, new product groups, services and technologies in all spheres of society in terms of «economic» global digitalization requires advanced training of existing personnel, as well as the emergence of new specialties and professions. In this aspect, it is necessary to forecast the need for personnel in new specialties

Адрес для переписки

Седнина Марина Александровна
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 266-26-58
sednina@bntu.by

Address for correspondence

Sednina Marina A.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 266-26-58
sednina@bntu.by

and specializations, as well as to study the possibilities for advanced training and retraining of existing specialists. The experience of the Comprehensive Forecast of Scientific and Technological Progress (CF STP) of the Republic of Belarus for 2021–2025 and for the period up to 2040 is analyzed in terms of staffing for innovative development. The required human resources potential has been assessed by the method of an expert survey in the process of forming the CF STP. Forecasting the need for personnel in the CF STP had a number of limitations. These limitations could be partially eliminated when developing the next CF STP and other forecasts of the need for personnel in the innovation economy. The paper considers possible directions for improving the forecasting of the provision of the economy with personnel for innovative development. It is advisable to assess the availability of personnel in the economy, taking into account the study of the ratio of supply and demand for them in quantitative and qualitative aspects. Algorithms are proposed for assessing: the needs of the national economy in personnel for innovative development; availability of personnel for innovative development and their competencies in organizations of the real sector of the economy; opportunities of the education system for training personnel for innovative development. The improvement of the methodology for forecasting the availability of personnel will allow to identify the most promising areas of training personnel with the necessary competencies and qualifications capable of developing and implementing technological innovations for the further development of the Republic of Belarus.

Keywords: forecasting, need for personnel, personnel training, competencies, forecasting methodology, foresight research, innovative development, technological innovations, high-tech sector of the economy

For citation: Saltanova I. V., Sednina M. A. (2022) Methodology for Forecasting Staffing in the Comprehensive Forecast of Scientific and Technological Progress and Directions for its Improvement. *Science and Technique*. 21 (3), 250–256. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-250-256> (in Russian)

Введение

Создание и внедрение во все сферы жизнедеятельности общества инновационных товаров, новых продуктовых групп, услуг и технологий на фоне глобальной цифровизации экономики требуют непрерывного повышения квалификации имеющихся кадров, а также появления новых специальностей и профессий. В этой связи возникает необходимость прогнозирования потребности в кадрах новых специальностей и специализаций, а также изучения возможностей повышения квалификации и переподготовки уже имеющихся специалистов.

Для прогнозирования потребности в новых кадровых компетенциях во многих странах мира проводят масштабные исследования по методологии форсайт-исследования. На ее основе разрабатываются долгосрочные (25–30 лет) стратегии развития экономики, науки, технологий, нацеленные на повышение конкурентоспособности и максимально эффективного развития социально-экономической сферы [1]. В России в 2015 г. был осуществлен подобный проект, в результате которого определены наиболее востребованные профессии во многих отраслях экономики и сформирован «Атлас новых профессий», впоследствии претерпевший несколько редакций [2].

В нашей стране прогнозирование потребности в кадрах для экономики регулируется постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 28 декабря 2017 г. № 1016 «О некоторых вопросах прогнозирования потребности экономики в кадрах» [3]. В период 2018–2019 гг.

в стране выполнялись работы по формированию очередного Комплексного прогноза научно-технического прогресса Республики Беларусь на 2021–2025 гг. и на период до 2040 г. (далее – КП НТП). В число задач, решавшихся в КП НТП, входила оценка обеспеченности кадрами по перспективным специальностям, связанным с разработкой и внедрением высокотехнологических инноваций. С учетом приобретенного опыта при разработке следующего прогноза научно-технического прогресса целесообразно уточнить методологию прогнозирования потребности в кадрах необходимой квалификации, способных заниматься разработкой и внедрением технологических инноваций.

Опыт прогнозирования обеспеченности кадрами в Комплексном прогнозе научно-технического прогресса

В основу методологии КП НТП положен мировой опыт форсайт-исследований, который адаптирован с учетом особенностей функционирования экономики Республики Беларусь [4]. Наибольшее влияние на разработку КП НТП оказал опыт Прогноза научно-технологического развития России на период до 2030 г. [5].

Разработка КП НТП включала в себя следующие этапы:

- составление перечня объектов прогнозирования на основе мировых тенденций и положений Стратегии «Наука и технологии: 2018–2040» (перспективные инновационные технологии, продуктовые группы, товары) [6];

– получение значений параметров объектов прогнозирования;

– обработку параметров объектов прогнозирования.

В число параметров, характеризующих реализуемость каждого из объектов прогнозирования в условиях Республики Беларусь, были включены сведения о кадровом потенциале. При формировании КП НТП необходимый кадровый потенциал оценивался методом экспертного опроса. Информация базировалась на знаниях конкретных экспертов, которые вносили в прогноз определенный инновационный объект [2]. В контексте анализа кадрового потенциала экспертам необходимо было дать ответы о способности имеющегося в стране кадрового потенциала обеспечить производство конкретной инновации и о возможности подготовки недостающих кадров.

По результатам КП НТП наличие кадрового потенциала условно разделено на три группы:

– для освоения некоторых инновационных объектов кадры имеются;

– для освоения других – отсутствуют, но имеется возможность их подготовить в учреждениях высшего образования Республики Беларусь;

– группа инновационных объектов прогнозирования, по которым как нет кадров, способных внедрять инновации, так и отсутствует возможность их подготовки.

Необходимо остановиться на некоторых ограничениях, присущих методологии прогнозирования потребности в кадрах в КП НТП.

1. Выполненная по каждому объекту прогнозирования оценка потребности в кадрах носит качественный, но не количественный характер. Для каждого объекта прогнозирования дан ответ на вопрос: «Имеются ли в стране необходимые кадры или нет и, если нет, то можно ли их подготовить?» При этом отсутствуют количественная оценка потребности в кадрах, количество кадров, имеющихся в наличии, количественная оценка возможности подготовки кадров необходимого профиля.

2. В КП НТП выполнена оценка кадрового потенциала по каждому отдельно взятому инновационному объекту. Однако отсутствует оценка инновационного кадрового потенциала для национальной экономики в целом, которая не может быть выполнена в рамках КП НТП, поскольку в нем не решена задача, какие кон-

кретно объекты из полученного перечня будут реализованы в будущем.

3. Согласно методологии КП НТП, кадровый потенциал по каждому инновационному объекту прогнозирования оценивался теми же экспертами, которые определяли перечень этих объектов. Эксперты, являясь специалистами в своих предметных областях, как правило, могут не быть специалистами по организации образовательного процесса и подготовке кадров и могут не владеть актуальной информацией по данным вопросам.

Оценка обеспеченности экономики кадрами по перспективным специальностям

Конъюнктура рынка труда представляет собой различные аспекты его функционирования, к важнейшим элементам которой относят спрос и предложение на труд, их структуру и соотношение; абсолютные размеры, структуру и уровень занятости и безработицы среди трудоспособного населения. Основным элементом, характеризующим конъюнктуру рынка труда, является соотношение спроса и предложения в количественном (избыток/дефицит кадров) и качественном (структурном, в первую очередь профессионально-квалификационном) аспектах [7].

Оценку обеспеченности экономики кадрами для инновационного развития целесообразно проводить в три этапа:

1) оценка потребности национальной экономики в кадрах для инновационного развития;

2) оценка наличия кадров для инновационного развития и их компетенций в организациях реального сектора экономики;

3) оценка возможностей системы образования для подготовки кадров для инновационного развития.

Оценка потребности национальной экономики в кадрах для инновационного развития

На этапе оценки потребности национальной экономики в кадрах для инновационного развития нужно обеспечить решение следующих задач [8]:

1) изучение мирового опыта организации и методологии прогнозирования потребности

экономики в кадрах необходимых компетенций и квалификаций;

2) разработку инструментария для проведения опроса экспертов, т. е. перечня вопросов о наличии кадров необходимых компетенций и квалификаций для инновационного развития. Для проведения экспертного опроса экспертное сообщество должно быть сформировано из представителей технопарков, институтов НАН Беларуси, производственных организаций и научно-производственных объединений, высококвалифицированных специалистов республиканских органов государственного управления, учреждений высшего образования (УВО), научной общественности;

3) опрос экспертов целесообразно проводить с использованием метода Делфи. Анализ полученных данных является основанием для формирования перечня кадровых компетенций, необходимых для освоения объектов прогнозирования в разрезе важнейших приоритетных направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности;

4) сбор и анализ данных по УВО, в которых организована подготовка кадров по специальностям для инновационного развития. Данные по УВО собираются путем изучения информации, содержащейся в открытых источниках;

5) накопление всей полученной информации в базе данных. Разработка информационного ресурса с базой данных по кадровому потенциалу проводится в разрезах:

- приоритетных направлений научно-технологического развития;

- организаций, осуществляющих высокотехнологические инновации по выделенному (выбранному) приоритетному направлению;

- УВО, осуществляющих подготовку специалистов по выделенному (выбранному) приоритетному направлению.

Кроме того, при формировании базы данных целесообразно предусмотреть возможность дальнейшего наполнения ее информацией по:

- существующим в настоящее время требованиям к специалистам на отечественном рынке труда в разрезе высокотехнологичных секторов экономики (в соответствии с кодами по ОКПД);

- профессионально значимым компетенциям в разрезе технологических инноваций (информации, полученной на основании анализа зарубежного опыта);

- соответствии перспективным направлениям научно-технических разработок разделов внешнеэкономической деятельности.

В результате выполнения первого этапа база данных должна содержать информацию об:

- организациях реального сектора экономики, осуществляющих технологические инновации по конкретному направлению научно-технологического развития;

- организациях, которые могут осуществлять разработку и внедрение объектов прогнозирования (на основе ответов экспертов);

- отечественных УВО, осуществляющих подготовку специалистов для высокотехнологичных секторов экономики.

Оценка наличия кадров для инновационного развития и их компетенций в организациях реального сектора экономики

С учетом полученных результатов о потребности в кадрах на втором этапе необходимо обеспечить решение следующих задач:

1) сбор и анализ информации об организациях высокотехнологичных секторов экономики. С учетом результатов первого этапа и иной актуальной информации производится сбор и анализ информации об организациях высокотехнологичных секторов экономики. Перечень организаций систематизируется в соответствии с их деятельностью по приоритетным направлениям научной, научно-технической, инновационной деятельности;

2) сбор данных о кадровом потенциале в организациях высокотехнологичных секторов экономики, научная, научно-техническая, инновационная деятельность которых осуществляется по приоритетным направлениям. Для выполнения задачи необходимо провести опросы топ-менеджеров организаций (работодателей) и кадров (работников). Перечень ведущих организаций при этом может быть отправной точкой для определения мест опроса работодателей и работников, занятых в сфере технологических инноваций. В рамках опроса топ-менеджерам определенных для опроса организаций следует предложить выбрать из широкого списка компетенций те, которые, по их мнению, являются наиболее востребованными для специалиста инновационной отрасли экономики, к которой относится данная организация.

Общая схема проведения опроса работодателей представлена на рис. 1.



Рис. 1. Схема проведения опроса работодателей

Fig. 1. Survey scheme for employers

По вопросу наличия/отсутствия общих, специальных и универсальных компетенций необходимо опросить: представителей административно-управленческого аппарата организаций; сотрудников, занятых научными исследованиями; инженерно-технических специалистов, в том числе занятых в сфере опытно-конструкторских работ; рабочих, занятых непосредственно на производстве. Показателями для оценки будут:

– востребованность указанной компетенции в организации, но отсутствие ее в достаточной степени у опрашиваемой категории сотрудников;

– востребованность указанной компетенции в организации, наличие и развитость ее в достаточной степени у данной категории работников;

– наличие и развитость указанной компетенции в достаточной степени у опрашиваемой категории работников, но не востребованность в исследуемой организации.

При этом оценка может быть представлена на трехуровневой шкале, где индикаторами будут являться переизбыток, баланс либо недостаток указанных компетенций.

Проведение опроса в организациях, осваивающих высокотехнологичную продукцию, соответствующую направлениям научно-технологического развития, и анализ результатов опроса позволят провести оценку текущего и перспективного спроса высокотехнологичных предприятий на компетентные кадры. Методом экспертных оценок необходимо также провести анализ факторов, влияющих на количественные показатели этого спроса, под которым понимается востребованность компетенций персонала (в настоящее время и в прогнозируемом будущем). Оценить перспективный спрос на компе-

тенции можно методами качественного и количественного прогнозирования.

При качественной оценке спроса на компетенции методом экспертного опроса производится сравнение текущих характеристик имеющегося перечня компетенций, которыми обладают работающие в данный момент специалисты, и эталонного перечня компетенций, которыми должны были бы обладать соответствующие специалисты. Спрос на недостающие компетенции определяется путем вычитания из эталонного объема компетенций имеющегося объема компетенций.

При количественном прогнозировании используется формальный подход: определяются рациональные и физиологические нормы, как, например, среднестатистическая норма естественно-возрастного выбытия, которые предположительно должны действовать в будущем. Таким образом, одновременно задается уровень явления на далекую и формируются прогнозы на ближайшую перспективу.

Имея общую (выраженную количественно) потребность в кадрах для инновационной экономики, можно оценить потребность в кадрах «на замену» и на «развитие производства» [9, 10].

Оценка возможностей системы образования для подготовки кадров для инновационного развития

На данном этапе необходимо оценить, может ли отечественная система образования обеспечить нужное количество кадров требуемых компетенций. Оценку возможностей отечественной системы образования в этом направлении целесообразно осуществлять по алгоритму, представленному на рис. 2.

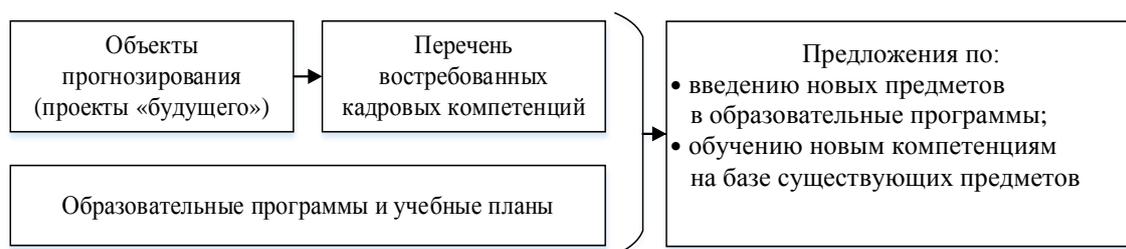


Рис. 2. Алгоритм оценки возможностей системы образования для подготовки кадров для инновационного развития

Fig. 2. Algorithm for assessing the possibilities of the education system for training personnel for innovative development

Реализация третьего этапа базируется на результатах двух предыдущих этапов. Оценка спроса на компетенции в освоении технологических инноваций, а также оценка имеющегося на данный момент уровня развития «инновационных» кадровых компетенций (на основе опроса) может являться основой для возможного пересмотра образовательных программ УВО, в результате которых могут быть сформированы новые компетенции для внедрения технологических инноваций.

С учетом полученной ранее информации о наличии или отсутствии кадров соответствующих компетенций и возможности их подготовки на третьем этапе необходимо:

1) провести экспертный опрос по программам УВО. Целесообразно осуществить опрос руководителей и заведующих профильными кафедрами УВО в отношении имеющихся образовательных программ, направленных на формирование дополнительных профессиональных компетенций кадров для реализации инноваций. Кроме того, с учетом полученных ранее результатов экспертного опроса для категории отсутствующих кадров и отсутствия возможности их подготовки, а также информации, собранной по УВО, следует сделать оценку потребности:

- в подготовке кадров (открывать новые специальности, переобучать);
- в отправке на обучение за границу;
- в приглашении иностранных специалистов;

2) сформировать перечень востребованных компетенций для реализации прогнозируемых инноваций, при этом используются:

- данные, полученные в результате анализа мирового опыта по определению компетенций, связанных с внедрением и реализацией технологических инноваций;

– информация первого этапа, полученная в результате опроса экспертов (предваритель-

ный перечень требуемых кадровых компетенций для освоения прогнозируемых инноваций);

- данные результатов проведенных опросов топ-менеджеров организаций;

3) разработать рекомендации для республиканских органов государственного управления по совершенствованию подготовки кадров для инновационной экономики.

ВЫВОДЫ

1. Одной из ресурсных составляющих инновационного развития Республики Беларусь являются квалифицированные кадры, формирование которых осуществляется в сфере образования, науки и технологий.

2. Проблемы инновационного развития страны, вызванные нехваткой кадров, а также несоответствием кадровых компетенций и квалификаций требованиям современного и будущего рынка труда, обуславливают необходимость разработки методологии прогнозирования перспективной потребности в кадрах для инновационной экономики.

3. Оценка обеспеченности кадрами по перспективным специальностям, связанным с разработкой и внедрением высокотехнологических инноваций, выполнена в Комплексном прогнозе научно-технического прогресса Республики Беларусь на 2021–2025 гг. и на период до 2040 г. Методология прогнозирования потребности в кадрах в КП НТП имела ряд ограничений, которые представляется возможным частично устранить при разработке следующего Комплексного прогноза научно-технического прогресса, а также других прогнозов потребности в кадрах для разработки и внедрения технологических инноваций.

4. Оценка обеспеченности экономики кадрами для инновационного развития целесообразно проводить с учетом исследования основных элементов конъюнктуры рынка труда, таких как соотношение спроса и предложения

в количественном и качественном аспектах в три этапа: оценка потребности национальной экономики в кадрах для инновационного развития; оценка наличия кадров для инновационного развития и их компетенций в организациях реального сектора экономики; оценка возможностей системы образования для подготовки кадров для инновационного развития.

5. Проблема обеспечения соответствия между спросом и предложением компетенций и квалификаций на рынке труда становится все более актуальной. Совершенствование методологии прогнозирования обеспеченности кадрами позволит выявить наиболее перспективные направления подготовки кадров необходимых компетенций и квалификаций, способных заниматься разработкой и внедрением технологических инноваций для дальнейшего развития Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов, А. В. Форсайт: взгляд в будущее / А. В. Соколов // Форсайт. 2007. Т. 1, № 1. С. 8–15.
2. Атлас новых профессий 3.0 / под ред. Д. Варламовой, Д. Судакова. М.: Интеллектуальная лит., 2020. 456 с.
3. О некоторых вопросах прогнозирования потребности экономики в кадрах [Электронный ресурс]: постановление Совета Министров Республики Беларусь, 28.12.2017, № 1016 // Эталон – Беларусь / Нац. центр правовой информ. Респ. Беларусь. Минск, 2022.
4. Комплексный прогноз научно-технического прогресса Республики Беларусь на 2021–2025 гг. и на период до 2040 г. / под ред. А. Г. Шумилина. Минск: ГУ «БелИСА», 2020. Т. 2. 750 с.
5. Zianchuk, M. Foresighting Technological and Innovative Development of Belarus / M. Zianchuk, I. Saltanova // MEST Journal. 2020. Vol. 8, No 2. P. 192–198. <https://doi.org/10.12709/mest.08.08.02.22>.
6. Стратегия «Наука и технологии 2018–2040» [Электронный ресурс]: проект Национальной академии наук Беларуси. Минск, 2017. Режим доступа: https://nasb.gov.by/congress2/strategy_2018-2040.pdf.
7. Бобрешова, И. Конъюнктура регионального рынка труда / И. Бобрешова // Вестник Оренбургского государственного университета. 2015. Т. 183, № 8. Режим доступа: http://vestnik.osu.ru/2015_8/2.pdf. Дата доступа: 22.01.2022.
8. Зеньчук, Н. Ф. Прогнозирование научно-технического и инновационного развития в Республике Беларусь / Н. Ф. Зеньчук, И. В. Салтанова // Право. Экономика. Социальное партнерство: сб. докл. Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 90-летию Учреждения образов. Федерации профс. Беларуси «Международный университет «МИТСО», Минск, 26 марта 2020 г.: в 2 ч. / Междунар. ун-т «МИТСО»; редкол.: В. В. Лосев (гл. ред.) [и др.]. Минск, 2020. Ч. 2. С. 82–85.
9. Миндели, Л. Э. О прогнозе развития кадрового потенциала науки / Л. Э. Миндели, В. Е. Чистякова. М.: ИПРАН РАН, 2018. 44 с.

10. Гуртов, В. А. Прогнозирование потребностей экономики в квалифицированных кадрах: обзор подходов и практик применения / В. А. Гуртов, Е. А. Питухин // Университетское управление: практика и анализ. 2017. Т. 21, № 4. С. 130–161.

Поступила 10.02.2022

Подписана в печать 12.04.2022

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Sokolov A. V. (2007) Foresight: a Look into the Future. *Forsait* [Foresight], 1 (1), 8–15 (in Russian).
2. Varlamova D., Sudakov D. (eds.) (2020) *Atlas of New Professions 3.0*. Moscow, *Intellectualnaya Literatura Publ.* 456 (in Russian).
3. On Some Issues of Forecasting the Needs of the Economy in Personnel: Resolution of the Council of Ministers of the Republic of Belarus, 28.12.2017, No 1016. National Center of Legal Information of the Republic of Belarus. *Eталон – Беларусь* [Standard – Belarus]. Minsk, 2022 (in Russian).
4. Shumilin A. G. (ed.) (2020) *Comprehensive Forecast of Scientific and Technological Progress of the Republic of Belarus for 2021–2025 and up to 2040. Vol. 2*. Minsk, State Organization “Belarusian Institute of System Analysis and Information Support for Scientific and Technical Sphere”. 750 (in Russian).
5. Zianchuk M., Saltanova I. (2020) Foresighting Technological and Innovative Development of Belarus. *MEST Journal*, 8 (2), 192–198. <https://doi.org/10.12709/mest.08.08.02.22>.
6. Strategy “Science and Technology 2018–2040”: Project of the National Academy of Sciences of Belarus. Minsk, 2017. Available at: https://nasb.gov.by/congress2/strategy_2018-2040.pdf.
7. Bobreshova I. (2015) Conjunction of the Regional Labor Market. *Vestnik Orenburgskogo Gosudarstvennogo Universiteta = Vestnik of the Orenburg State University*, 183 (8). Available at: http://vestnik.osu.ru/2015_8/2.pdf (Accessed 22 January 2022) (in Russian).
8. Zenchuk N. F., Saltanova I. V. (2020) Forecasting Scientific, Technical and Innovative Development in the Republic of Belarus. *Pravo. Ekonomika. Sotsial'noe Partnerstvo: Sb. Dokl. Mezhdunar. Nauch.-Prakt. Konf., Posvyashch. 90-letiyu Uchrezhdeniya Obrazov. Federatsii Prof. Belarusi “Mezhdunarodnyi Universitet “MITSO”, Minsk, 26 Marta 2020 g. Ch. 2* [Law. Economy. Social Partnership: Collection of Papers of the International Scientific and Practical Conference Dedicated to the 90th Anniversary of the Educational Institution of the Federation of Trade Unions of Belarus “International University “MITSO”, Minsk, March 26, 2020. Part 2]. Minsk, 82–85 (in Russian).
9. Mindeli L. E., Chistyakova V. E. (2018) *On the Forecast for the Development of the Personnel Potential of Science*. Moscow, Institute for the Study of Science of Russian Academy of Sciences. 44 (in Russian).
10. Gurtov V. A., Pitukhin E. A. (2017) Forecasting the Needs of the Economy in Qualified Personnel: Review of Approaches and Practices. *Universitetskoe Upravlenie: Praktika i Analiz* [University Management: Practice and Analysis], 21 (4), 130–161 (in Russian).

Received: 10.02.2022

Accepted: 12.04.2022

Published online: 31.05.2022

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-257-264>

УДК 339.138

Экспертная составляющая как элемент контент-стратегии промышленного предприятия

О. А. Малайчук¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Интернет-маркетинг на промышленном рынке имеет ряд особенностей и отличается от такового на потребительском рынке. Для первого характерны специализированный и персонализированный подходы. Кроме того, он должен учитывать длительный цикл сделки и наличие большого числа лиц, принимающих решения. Маркетологи на промышленных предприятиях должны обладать рядом знаний о рынке и тенденциях в отрасли, владеть информацией об организации процессов закупок и работе каналов сбыта, уметь выстроить коммуникационный процесс с определенным типом покупателя. В статье представлены методы онлайн-продвижения промышленной продукции и исследование особенностей выбора инструментов интернет-маркетинга для промышленных предприятий. Основная цель – выделить экспертную составляющую для таких предприятий как главный инструмент коммуникации с покупателями. Для решения поставленной задачи рассмотрены инструментарий интернет-маркетинга промышленного предприятия и показана экспертная составляющая в его контент-стратегии, изучены подходы к систематизации инструментов интернет-маркетинга. В ходе проведения исследования использовали общенаучные методы: анализ, синтез, обобщение. Результатом проведенной работы стала модель продвижения товара в логике путешествия промышленного потребителя, строящаяся на связи карты путешествия потребителя с инструментами интернет-маркетинга.

Ключевые слова: продвижение промышленного предприятия, интернет-маркетинг, инструменты интернет-маркетинга, контент-стратегия, экспертные продажи, воронка продаж, карта путешествия потребителя

Для цитирования: Малайчук, О. А. Экспертная составляющая как элемент контент-стратегии промышленного предприятия / О. А. Малайчук // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 257–264. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-257-264>

Expert Component as Element of Content Strategy of Industrial Enterprise

V. A. Malaichuk¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Internet marketing in the industrial market has a number of features and differs from that in the consumer market. The first is characterized by specialized and personalized approaches, as well as it must take into account the long cycle of the transaction, and the presence of a large number of decision makers. Marketers at industrial enterprises must have a range of knowledge about the market and industry trends, possess information about the organization of procurement processes and the operation of distribution channels, and be able to build a communication process with a certain type of customer.

Адрес для переписки

Малайчук Ольга Александровна
Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 67,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-97
malaichuk@bntu.by

Address for correspondence

Malaichuk Volha A.
Belarusian National Technical University
67, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-97
malaichuk@bntu.by

The paper presents methods for online promotion of industrial products and a study of the features of choosing of internet marketing tools for industrial enterprises. The main idea of the paper is to highlight the expert component for such enterprises as the main tool for communication with customers. To solve this problem, the internet marketing tools of an industrial enterprise has been considered and the expert component in its content strategy has been shown, approaches to the systematization of internet marketing tools have been studied. In the course of the study, general scientific methods have been used: analysis, synthesis, generalization. The result of the research is a model of product promotion in the logic of the industrial consumer's journey, which is based on the connection of the consumer's journey map with internet marketing tools.

Keywords: industrial enterprise promotion, internet marketing, internet marketing tools, content strategy, expert sales, sales funnel, consumer journey map

For citation: Malaichuk V. A. (2022) Expert Component as Element of Content Strategy of Industrial Enterprise. *Science and Technique*. 21 (3), 257–264. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-257-264> (in Russian)

Введение

Сегодня промышленные предприятия для продвижения своей продукции на рынке активно используют инструменты традиционного маркетинга: выставки, рекламу в средствах массовой информации, холодные звонки, почтовые рассылки, персональные встречи и т. д. Инструменты интернет-маркетинга получили широкое распространение для взаимодействия с потребителями в секторе B2C и только начинают внедряться в B2B-сектор. Таким образом, научные исследования должны быть ориентированы на разработку эффективного механизма продвижения продукции с помощью инструментов интернет-маркетинга для промышленных предприятий на стратегическом и тактическом уровнях.

Проблемами развития инструментария интернет-маркетинга занимается ряд ученых, таких как В. О. Сычева и Т. В. Черевичко [1], И. В. Успенский [2], В. Холмогоров [3], И. В. Алексеев [4], П. Дойль и Ф. Штерн [5], К. А. Татаринцов [6] и др. Вопросы, связанные с особенностями организации интернет-маркетинга на рынках товаров промышленного назначения, поднимаются в исследованиях К. А. Татаринцова [6], О. В. Мартыненко [7], И. А. Красюк и М. А. Пашоликова [8], И. В. Игнатьева, О. Н. Сараева, И. И. Зедгенизова [9] и др. Однако анализ научной литературы показал, что вопросам организации интернет-маркетинга промышленного предприятия, наряду с проблемами разработки стратегии и тактики интернет-маркетинга промышленного предприятия, уделяется недостаточное внимание.

Основная часть

В большинстве случаев учеными интернет-маркетинг рассматривается как инструмент

маркетинга на потребительском рынке, однако сегодня он начинает завоевывать позиции на рынке товаров промышленного назначения. По данным Digital-агентства Wpromote, 56 % опрошенных маркетологов промышленных предприятий планируют увеличить расходы на интернет-маркетинг, из них 27 % указали, что доля этих расходов в маркетинговом бюджете превышает 40 %. В качестве основной цели интернет-маркетинга респонденты отметили рост узнаваемости бренда. Также они выделяют такие приоритетные направления, как привлечение качественных лидов и большего числа потенциальных клиентов на сайт, повышение рентабельности инвестиций в маркетинг (рис. 1) [10].

Какова цель интернет-маркетинга вашего предприятия?



Рис. 1. Цели интернет-маркетинга промышленных предприятий

Fig. 1. Goals of internet marketing of industrial enterprises

Если рассмотреть динамику использования инструментов интернет-маркетинга промышленными предприятиями, можно увидеть рост, а также большой перевес в использовании предприятиями таких инструментов, как электронный маркетинг и социальные сети (табл. 1).

Таблица 1
Динамика использования инструментов
интернет-маркетинга промышленными предприятиями
Dynamics of use of internet marketing tools
by industrial enterprises

Инструмент	Динамика использования инструментов интернет-маркетинга, %	
	2018 г.	2019 г.
Медийная реклама	47	55
Контекстная реклама	64	71
Органический поиск	88	91
Социальные сети	93	95
Электронные письма	95	93

Данные инструменты позволяют предоставить потребителям уникальный и полезный контент, сформировать положительный образ предприятия, сделать клиентский опыт персонализированным [9].

Однако инструментарий интернет-маркетинга значительно шире, и сегодня промышленные предприятия в своей деятельности могут использовать большой ряд инструментов. В табл. 2 представлен инструментарий интернет-маркетинга и приведен перечень задач, которые позволяют решить данные инструменты.

Таблица 2

Перечень инструментов интернет-маркетинга
List of internet marketing tools

Инструмент интернет-маркетинга	Средство	Решаемая задача
Веб-сайт	Корпоративный сайт; landing page и др.	1. Сообщить пользователям о предприятии и товарах. 2. Сформировать положительный имидж бренда. 3. Вести коммуникации с клиентами и партнерами. 4. Быстро реагировать на запросы пользователей. 5. Отслеживать популярные и непопулярные товары
Контент-маркетинг	Тексты; статьи; электронный журнал; white-paper; инфографика; вебинары; онлайн-конференции; фото-, видео-, аудиоконтент; корпоративный блог и др.	1. Повышение значимости сайта для поисковых систем. 2. Рост лояльности клиентов, конкурентов и соискателей. 3. Знакомство аудитории с брендом. 4. Формирование экспертного образа. 5. Информирование о продукции, технических характеристиках, преимуществах. 6. Снятие возражений
Поисковый (SEO) маркетинг	Комплексный анализ сайта; конверсионные цепочки; дизайн и юзабилити сайта; анализ ключевых показателей эффективности по направлениям маркетинга; семантическое ядро; теги и др.	1. Информирование о компании и продукции. 2. Информирование о деятельности и проектах компании. 3. Привлечение потенциальных клиентов на сайт. 4. Получение заявок. 5. Продвижение сайта в поисковой системе. 6. Получение органического трафика. 7. Расширение списка ключевых фраз и слов или его изменение
Контекстная реклама	Текстографическое объявление; рекламный баннер; видеоролик и др.	1. Повышение рекламной конкурентоспособности компании. 2. Привлечение потенциальных клиентов для совершения целевого действия. 3. Сбор данных потенциальных клиентов для дальнейшей обработки
Медийная (баннерная) реклама	Баннер; видеореклама; брендрование; текстографические блоки и др.	1. Поддерживать узнаваемость бренда и знание о нем. 2. Поддерживать имидж. 3. Привлекать внимание аудитории. 4. Стимулировать продажи

Инструмент интернет-маркетинга	Средство	Решаемая задача
Индивидуальная рассылка (E-mail-маркетинг)	Информационная рассылка; дайджесты; триггерная рассылка; welcome-письмо; реанимационная рассылка; серийная рассылка и др.	1. Повышение продаж. 2. Демонстрация экспертности. 3. Повышение лояльности за счет различных бонусов и помощи клиенту. 4. Проведение исследования потенциальных клиентов
Маркетинг в социальных сетях (SMM)	Ведение профиля в социальных сетях (Facebook, Instagram, «ВКонтакте», «Одноклассники» и др.); постинг тематического контента; общение с аудиторией; вирусный маркетинг	1. Повышение узнаваемости бренда. 2. Постоянная коммуникация с клиентами. 3. Создание интереса к рекламируемым продуктам
Партнерский или аффилиативный маркетинг	Партнерские сети менеджеров по партнерским программам; различные типы одиночных партнеров (фрилансеров) и др.	1. Оказание информационных посреднических услуг по привлечению потенциальных клиентов, их информированию и вовлечению. 2. Продажа клиенту товаров или услуг силами посредника
Формирование общественных мнений (работа с репутацией в сети)	Публикации о компании в интернет-СМИ; онлайн пресс-конференции; онлайн-управление репутацией и др.	1. Формирование положительного образа компании. 2. Повышение лояльности потенциальных клиентов. 3. Сбор информации о возможных заказах. 4. Отслеживание отзывов потребителей

Продвижение промышленных товаров в Интернете может осуществляться с помощью широкого набора инструментов. Выбор того или иного инструмента зависит от типа бизнеса, его размеров и конкретных целей, стоящих перед маркетологом. Существует несколько подходов к систематизации инструментов интернет-маркетинга в зависимости от:

- целей, для достижения которых они используются: увеличение объема и частоты продаж, повышение известности [11];
- выбранной рекламной модели: непрерывная, пульсирующая [12];
- стадии работы с целевой аудиторией: привлечение, вовлечение, конвертация, удержание [12].

Наиболее часто применяется последний вид систематизации инструментов интернет-маркетинга. Он основан на концепции воронки продаж, которая выделяет несколько этапов на пути трансформации лида в покупателя: осведомленность, интерес, решение, действие, удержание. На рис. 2 изображена связь этапов воронки продаж с инструментами интернет-маркетинга в зависимости от этапа вовлеченности клиента в процесс покупки.

Большинство маркетологов ошибочно подходят к организации процесса продвижения в Интернете промышленных предприятий, делая ставку на ворону продаж и холодные звонки. Если рассматривать жизненный путь клиента, то этапы воронки продаж – это всего лишь небольшая часть клиентского пути, который начинается с осознания потребности и поиска решения проблемы, и лишь после ее осознания и изучения всей доступной информации позволяет перейти к этапам воронки продаж.

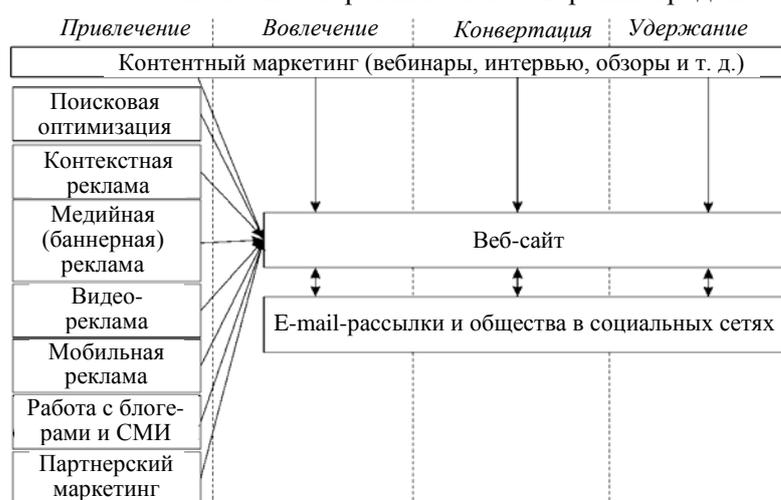


Рис. 2. Классификация инструментов интернет-маркетинга по этапам работы с аудиторией

Fig. 2. Classification of internet marketing tools by stages of working with audience

Международная консалтинговая компания McKinsey в 2009 г. провела межотраслевое исследование с целью выявить, на каком этапе воронки клиенты совершают больше всего покупок. Оказалось, что для некоторых отраслей, например автомобильного рынка, основные сделки происходят после первой покупки, в так называемом цикле лояльности. То есть основную часть прибыли автопроизводители получают от клиентов после того, как те «провалились» по воронке и купили автомобиль. Этим исследованием McKinsey подтвердила, что воронка не подходит для ориентира в сложной и нелинейной среде клиента. Позже маркетологи и разработчики начали использовать Customer Journey Map (CJM – карта путешествия потребителя) для проектирования пользовательского опыта. Сравнение концепций воронки продаж и CJM представлено в табл. 3 [13–15].

Карта путешествия потребителя позволяет составить путь, по которому промышленные предприятия могут начать направлять своих клиентов к успешному завершению сделки. Полностью понимая уникальные потребности клиента, можно предложить ему индивидуальные решения на каждом этапе пути.

Сегодня промышленные предприятия сталкиваются с большим количеством задач, связанных с улучшением клиентского опыта [16, 17]. Для их решения компаниям необходимо развивать цифровые точки контакта со своими клиентами. В данном случае предприятия могут использовать корпоративный блог, образовательные платформы с видеоматериалами или курсами. Подобные методы взаимодействия помогут преобразовать клиентский

опыт, улучшить позиционирование предприятия и выйти на рынок в качестве интеллектуального лидера. Например, если какой-то промышленный бренд чему-то научил клиента, то, скорее всего, он сможет довериться этой компании в части реализации крупного комплексного проекта. Такая стратегия выстраивания коммуникации между предприятием и клиентом называется экспертной составляющей.

Выходя на рынок с экспертными продажами, промышленные предприятия должны придерживаться таких целей, как:

- улучшение клиентского опыта (Customer Experience);
- создание имиджа интеллектуального лидера;
- сопровождение экспертных продаж (Sales Enablement);
- цифровая забота (e-Care): через контентные платформы, материал, статьи, видеоуроки промышленное предприятие решает проблемы клиентов, обучает их и отвечает на вопросы.

Перечислим задачи, которые ставят перед собой промышленные предприятия, выбравшие путь экспертных продаж:

- создание дополнительной точки контакта с партнерами и клиентами;
- создание дополнительной ценности;
- управление клиентским опытом через образовательные форматы: если предприятие обучает клиентов, оно получает преимущество в тендере, а также может конкурировать не только по цене. С другой стороны, в перспективе компания может встроить образовательный продукт в продуктовую линейку;

Таблица 3

Сравнение концепций воронки продаж и CJM
Comparison of sales funnel concepts and CJM

Критерий сравнения	Воронка продаж	Customer Journey Map
Объект внимания	Ориентация на нужды и запросы компании	Ориентация на нужды и запросы клиента
Характер процесса принятия решения	Линейный	Нелинейный
Характеристика инструмента	Описание процесса продажи товара или услуги	Гибкий инструмент проектирования продукта и сервиса
Структура	Графическая модель, отображающая входящий поток потенциальных клиентов (лидов) и их трансформацию в постоянных клиентов	Графическая модель, на которой отражены условные шаги клиентов во времени и точки контакта с компанией от осознания потребности до повторных покупок
Уровень информированности клиента	Клиент уже знает о компании или товаре	Показывает все пути возможного знакомства с компанией и продуктом
Область применения	Работа над улучшением бизнес-процессов	Работа с барьерами, которые могут помешать клиенту на любом пути взаимодействия с продуктом

– развитие бренд-амбассадоров: контент-платформа может выступать в качестве развития бренд-амбассадоров. Как правило, это внутренний эксперт со стороны компании, который пишет статьи, делает образовательный контент, проводит курсы, выступает на конференциях. Таким образом, промышленное предприятие сможет использовать человекоцентричный подход к позиционированию компании;

– сбор контактных данных о потенциальных партнерах и клиентах через инструменты контент-маркетинга;

– выстраивание триггерных коммуникаций с партнерами и клиентами: если у предприятия есть контактные данные клиентов и оно знает, какой контент читают, смотрят и изучают его клиенты на платформе, то имеет возможность понять, что для клиентов наиболее актуально. Данные о том, какой продукт интересен пользователю, какие тезисы и статьи он читает, ка-

кие видеоуроки смотрит, необходимы для того, чтобы в дальнейшем предложить персонализированное решение. Например, если клиент прочитал такую-то статью, ее можно обсудить в рамках личной встречи. Или если пользователь прошел такой-то видеокурс, ему можно предложить следующий по схожей тематике. Таким образом, ценность для предприятия состоит в том, что оно данными действиями прогревает аудиторию до следующего шага – более конкретных взаимодействий – продажи продукции.

Разрабатывая контент-стратегию, промышленные предприятия должны рассмотреть особенности потребительского путешествия, чтобы зафиксировать ключевые точки контакта и коммуникационные разрывы. Для этих целей автор предлагает выстроить модель продвижения товара в логике путешествия промышленного потребителя и на каждом этапе следования отметить возможные методы коммуникации с клиентом (рис. 3).

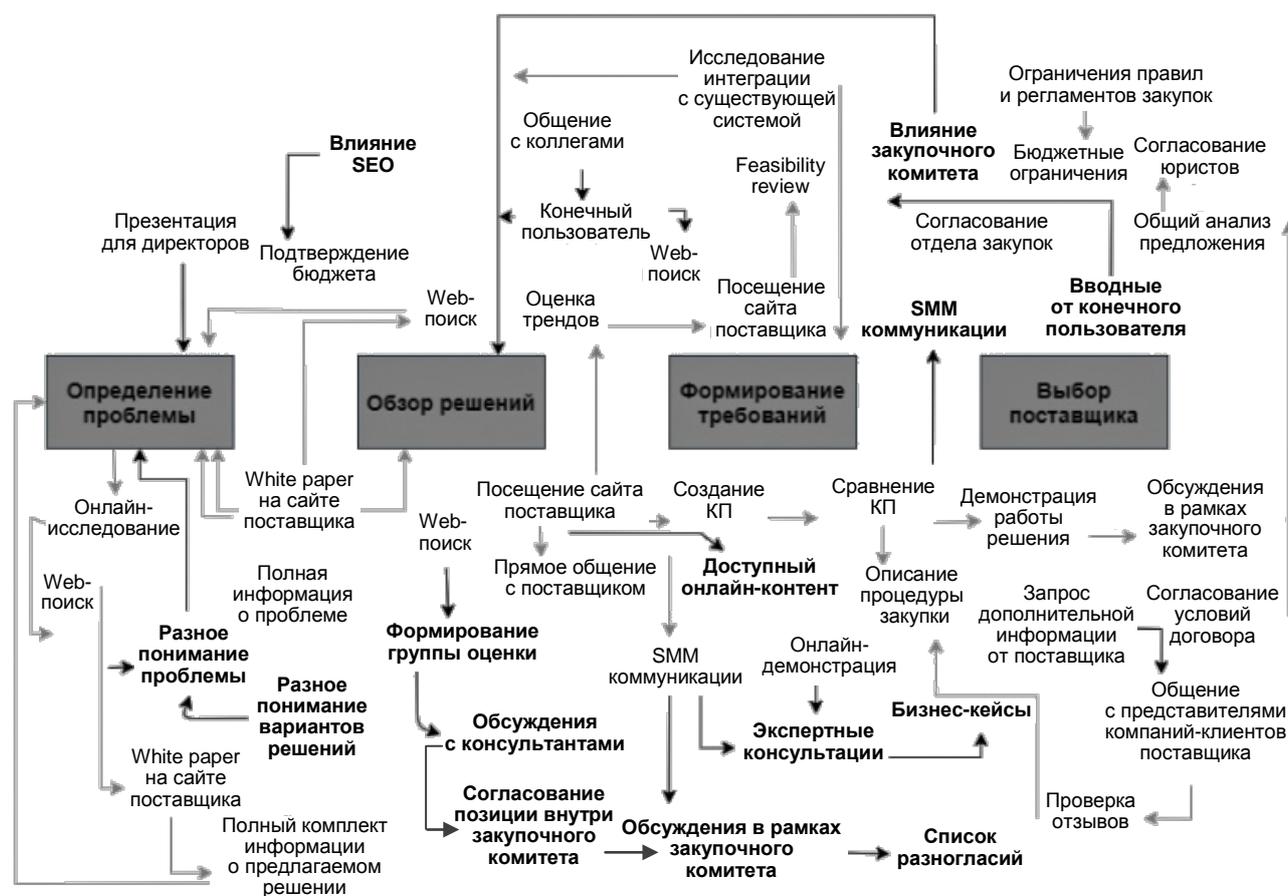


Рис. 3. Модель продвижения товара в логике путешествия промышленного потребителя

Fig. 3. Model of product promotion in the logic of industrial consumer journey

Если предприятие понимает, что клиент находится на этапе определения проблемы, оно должно предоставить ему контент на данную тему. В контенте обязательно должен быть какой-то материал, связанный с обзором решений и с формированием требования к выбору поставщика. Таким образом, контентная стратегия и расписание публикаций строятся исходя из того, на каком этапе находится потенциальный клиент и какую информацию он должен получить исходя из его потребностей.

ВЫВОД

Представлена модель продвижения товара в логике путешествия промышленного потребителя. Данная модель основана на карте путешествия потребителя промышленных товаров и описывает основные этапы процесса принятия решения на промышленном рынке, а также демонстрирует принцип внедрения инструментов интернет-маркетинга в логику движения покупателей. Используя цифровые точки контакта, промышленные предприятия могут быстрее наладить коммуникационный процесс с клиентами, внедрив в свою коммуникационную стратегию такие инструменты, как корпоративный блог, образовательные платформы с видеоматериалами и курсами, чек-листы и т. д. Данные методы взаимодействия помогают улучшить клиентский опыт промышленных предприятий, позволяют пересмотреть позиционирование компании и выйти на рынок в качестве интеллектуального лидера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычева, В. О. Интернет-маркетинг в деятельности предприятий общественного питания [Электронный ресурс] / В. О. Сычева, Т. В. Черевичко // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. № 12. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27535579>. Дата доступа: 02.05.2021.
2. Успенский, И. В. Интернет-маркетинг / И. В. Успенский. СПб.: Изд-во СПГУЭиФ, 2003. 197 с.
3. Холмогоров, В. Интернет-маркетинг / В. Холмогоров. СПб.: Питер, 2002. 136 с.
4. Алексеев, И. В. Теоретико-методологические аспекты исследования категории «Интернет-маркетинг» / И. В. Алексеев // Транспортное дело России. 2014. № 3. С. 55–56.
5. Дойль, П. Маркетинг менеджмент и стратегии / П. Дойль, Ф. Штерн. СПб.: Питер, 2007. 544 с.
6. Татаринов, К. А. Особенности интернет-маркетинга на b2b-рынках / К. А. Татаринов // Известия Байкальского государственного университета. 2018. Т. 28, № 3. С. 517–528. [https://doi.org/10.17150/2500-2759.2018.28\(3\).517-528](https://doi.org/10.17150/2500-2759.2018.28(3).517-528).
7. Мартыненко, О. В. Роль маркетинга в развитии промышленности в условиях цифровизации экономики / О. В. Мартыненко // Вестник Ростовского государственного экономического университета (РИНХ). 2020. № 2. С. 140–148.
8. Красюк, И. А. Влияние маркетинговой стратегии на деятельность промышленного предприятия в условиях цифровизации / И. А. Красюк, М. А. Пашоликов // Практический маркетинг. 2021. № 4. С. 10–16. <https://doi.org/10.24412/2071-3762-2021-4290-10-16>.
9. Игнатъева, И. В. Стратегия и тактика интернет-маркетинга на B2B-рынке / И. В. Игнатъева, О. Н. Сараява, И. И. Зедгенизова // Инновации и инвестиции. 2021. № 5. С. 281–284.
10. Хальзова, Н. А. Классификация инструментов интернет-маркетинга [Электронный ресурс] / Н. А. Хальзова, Ю. В. Лунина // Ученые заметки ТОГУ. 2020. Т. 11, № 2. Режим доступа: <https://pnu.edu.ru/ejournal/pub/articles/2706/>.
11. Капустина, Л. М. Интернет-маркетинг. Теория и практика продвижения бренда в Сети / Л. М. Капустина, И. Д. Мосунов. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. экон. ун-та, 2015. 102 с.
12. Руденко, А. Воронка продаж против Customer Journey Map [Электронный ресурс] / А. Руденко // Бюро сервисного дизайна. 2017. Режим доступа: <https://medium.com/cxbureau/%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B0-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B6-vs-customer-journey-map-471bfef21e9b>. Дата доступа: 15.09.2021.
13. The Consumer Decision Journey [Electronic Resource] / D. Court [et al.] // McKinsey & Company. 2009. Mode of access: <https://www.mckinsey.com/business-functions/marketing-and-sales/our-insights/the-consumer-decision-journey>. Date of access: 16.09.2021.
14. Williams, P. How to Tackle Complex B2B Customer Journey Mapping [Electronic Resource] / P. Williams // Dept. Mode of access: <https://www.deptagency.com/insight/how-to-tackle-complex-b2b-customer-journey-mapping/>. Date of access: 16.09.2021.
15. 2020 B2B Trend Report [Electronic Resource] // Digital Marketing Community 2019. Mode of access: <https://www.digitalmarketingcommunity.com/researches/b2b-trend/>. Date of access: 16.09.2021.
16. Малайчук, О. А. Рынок электронной коммерции Республики Беларусь: характеристика и основные тенденции развития / О. А. Малайчук // Мировая экономика и бизнес-администрирование малых и средних предприятий: материалы 16-го Междунар. науч. сем., провод. в рамках 18-й Междунар. науч.-техн. конф. «Наука – образованию, производству, экономике».

26 марта 2020 г., г. Минск. Минск: Право и экономика, 2020. С. 163–166.

17. Малайчук, О. А. Маркетинговая деятельность промышленных предприятий в условиях цифровой трансформации: особенности и тенденции / О. А. Малайчук // Новая экономика. 2021. Т. 77, № 1. С. 291–296.

Поступила 23.09.2021

Подписана в печать 30.11.2021

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Sycheva V. O., Cherevichko T. V. (2016) Internet Marketing in the Activities of Public Catering Enterprises. *Kontsept = Konzept*, (12). Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27535579> (Accessed 2 May 2021) (in Russian).
2. Uspensky I. V. (2003) *Internet Marketing*. Saint Petersburg, Publishing House of Saint Petersburg University of Economics and Finance. 197 (in Russian).
3. Kholmogorov V. (2002) *Internet Marketing*. Saint Petersburg, Piter Publ. 136 (in Russian).
4. Alekseev I. V. (2014) Theoretical and Methodological Aspects of the Study of the Category “Internet Marketing”. *Transportnoe Delo Rossii* [Transport Business in Russia], (3), 55–56 (in Russian).
5. Doyle P., Stern F. (2007) *Marketing Management and Strategy*. Saint Petersburg, Piter Publ. 544 (in Russian).
6. Tatarinov K. A. (2018) Features of Internet Marketing in b2b-Markets. *Izvestiya Baikalskogo Gosudarstvennogo Universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 28 (3), 517–528. [https://doi.org/10.17150/2500-2759.2018.28\(3\).517-528/](https://doi.org/10.17150/2500-2759.2018.28(3).517-528/) (in Russian).
7. Martynenko O. V. (2020) The Role of Marketing in Industrial Development in the Context of Digitalization of the Economy. *Vestnik Rostovskogo Gosudarstvennogo Ekonomicheskogo Universiteta (RINKh) = Vestnik of Rostov State University (RINH)*, (2), 140–148 (in Russian).
8. Krasnyuk I. A., Pasholikhov M. A. (2021) The Influence of Marketing Strategy on the Activity of an Industrial Enterprise in the Context of Digitalization. *Prakticheskii Marketing = Practical Marketing*, (4), 10–16. <https://doi.org/10.24412/2071-3762-2021-4290-10-16> (in Russian).
9. Ignatieva I. V., Saraeva O. N., Zedgenizova I. I. (2021) Strategy and Tactics of Internet Marketing in the B2B-Market. *Innovatsii i Investitsii = Innovation and Investment*, (5), 281–284 (in Russian).
10. Khalzova N. A., Lunina Yu. V. (2020) Classification of Internet Marketing Tools. *Uchenye Zametki TOGU = Scientists Notes PNU*, 11 (2). Available at: <https://pnu.edu.ru/ejournal/pub/articles/2706/> (in Russian).
11. Kapustina L. M., Mosunov I. D. (2015) *Internet Marketing. Theory and Practice of Brand Promotion on the Web*. Yekaterinburg: Publishing House of the Ural State University of Economics. 102 (in Russian).
12. Rudenko A. (2017) Sales Funnel Versus Customer Journey Map. *Service Design Bureau*. Available at: <https://medium.com/cxbureau/%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%BD%D0%BA%D0%B0-%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B0%D0%B6-vs-customer-journey-map-471bfef21e9b> (Accessed 15 September 2021) (in Russian).
13. Court D., Elzinga D., Mulder S., Vetvik O. (2009) The Consumer Decision Journey *McKinsey & Company*. Available at: <https://www.mckinsey.com/business-functions/marketing-and-sales/our-insights/the-consumer-decision-journey> (Accessed 16 September 2021).
14. Williams P. How to Tackle Complex B2B Customer Journey Mapping. *Dept*. Available at: <https://www.deptagency.com/insight/how-to-tackle-complex-b2b-customer-journey-mapping/> (Accessed 16 September 2021).
15. 2020 B2B Trend Report. *Digital Marketing Community 2019*. Available at: <https://www.digitalmarketingcommunity.com/researches/b2b-trend/> (Accessed 16 September 2021).
16. Malaichuk O. A. (2020) The E-Commerce Market of the Republic of Belarus: Characteristics and Main Development Trends. *Mirovaya Ekonomika i Biznes-Administrirovanie Malykh i Srednikh Predpriyatii: Materialy 16-go Mezhdunar. Nauch. Sem., Provod. v Ramkakh 18-i Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf. “Nauka – Obrazovaniyu, Proizvodstvu, Ekonomike”*, 26 Marta 2020 g., g. Minsk [World Economy and Business Administration of Small and Medium Enterprises: Proceedings of the 16th International Scientific Workshop, Held Within the Framework of the 18th International Scientific and Technical Conference “Science for Education, Production, Economy”, March 26, 2020, Minsk]. Minsk, Pravo i Economics Publ. 163–166 (in Russian).
17. Malaichuk O. A. (2021) Marketing Activities of Industrial Enterprises in the Context of Digital Transformation: Features and Trends. *Novaya Ekonomika [New Economy]*, 77 (1), 291–296 (in Russian).

Received: 23.09.2021

Accepted: 30.11.2021

Published online: 31.05.2022