

НАУКА и ТЕХНИКА

Международный
научно-технический журнал

Издается с января 2002 года
Периодичность издания –
один раз в два месяца

Учредитель
Белорусский
национальный технический
университет



Science and Technique

International
Scientific and Technical Journal

Published from January 2002
Publication frequency –
bimonthly

Founder
Belarusian
National Technical
University

Vol. 20 / No 2 / 2021

Журнал включен в базы данных:
Web of Science (ESCI), EBSCO, DOAJ, WorldCat, OpenAIRE,
Google Scholar, РИНЦ, ЭБС «Лань», НЭБ «КиберЛенинка», Соционет

The Journal is included in the following databases:
Web of Science (ESCI), EBSCO, DOAJ, WorldCat, OpenAIRE,
Google Scholar, RISC, Lan, CyberLeninka, Socionet

СОДЕРЖАНИЕ

Машиностроение и машиноведение

- Пантелеенко Ф. И., Оковитый В. А.,
Девойно О. Г., Оковитый В. В., Володько А. С.,
Асташинский В. М.**
Формирование покрытий из самофлюсующегося
порошка на основе сталей аустенитного класса
с добавлением молибдена 95
- Дай Вэньци, Алексеев Ю. Г., Королёв А. Ю.,
Будницкий А. С.**
Пластическое формообразование наконечника
концентратора-волновода для ультразвуковой
эндovasкулярной абляции 101
- Федосюк В. М.**
Эволюция микроструктуры и механических
свойств наноструктурированных пленок NiFe
под действием температурной обработки 109
- Луговой В. П., Луговой В. В.**
Сравнительный анализ колебаний
ультразвуковых концентраторов
кольцевой формы 121

CONTENTS

Mechanical Engineering and Engineering Science

- Panteleenko F. I., Okovity V. A.,
Devoino O. G., Okovity V. V., Volodko A. S.,
Astashinsky V. M.**
Forming Coatings from Self-Fluxing
Powder Based on Steels of Austenite Class
Adding Molybdenum 95
- Dai Wenqi, Aliakseyeu Yu. G., Korolyov A. Yu.,
Budnitskiy A. S.**
Plastic Shaping
of Concentrator-Waveguide Tip
for Ultrasound Endovascular Ablation 101
- Fedosyuk V. M.**
Evolution of Microstructure and Mechanical
Properties of Nanostructured NiFe Films
under Influence of Heat Treatment 109
- Lugovoi V. P., Lugovoi V. V.**
Comparative Analysis
of Vibrations of Ring-Shaped
Ultrasonic Concentrators 121

Germashev A. I., Logominov V. A., Dyadya S. I., Kozlova Y. B., Krishtal V. A.
 Influence of the Cut Axial Depth on Surface Roughness at High-Speed Milling of Thin-Walled Workpieces
 (Гермашев А. И., Логоминов В. А., Дядя С. И., Козлова Е. Б., Кришталь В. А.
 Влияние осевой глубины резания на шероховатость поверхности при высокоскоростном фрезеровании тонкостенных деталей) 127

Транспорт

Safonau A. I.
 Blending Control of Trolleybus Traction and Brake Drives to Enhance Braking Efficiency of Vehicle
 (Сафонов А. И. Совместное управление тяговым и тормозным приводами троллейбуса для повышения эффективности торможения транспортного средства) 132

Энергетика

Пехота А. Н., Хрусталеv Б. М., Акельев В. Д., Михальченко А. А.
 Вакуумный пневмотранспорт для производственных и коммунально-бытовых компонентов 142

Седнин В. А., Бубыр Т. В.
 Исследование теплообмена в продуваемых непроходных каналах теплотрасс. Часть I 150

Физико-математические науки

Невдах В. В.
 О выполнении закона сохранения энергии в теории упругих волн 161

Мелешко И. Н., Ласы П. Г.
 Приближенное представление дилогарифмами решения одной вариационной краевой задачи для круга при граничном условии Неймана 168

Гундина М. А.
 Спектральный анализ сигнала в системе Wolfram Mathematica 173

Матвеева Л. Д.
 Прямой метод решения задачи билинейного программирования 179

Germashev A. I., Logominov V. A., Dyadya S. I., Kozlova Y. B., Krishtal V. A.
 Influence of the Cut Axial Depth on Surface Roughness at High-Speed Milling of Thin-Walled Workpieces. 127

Transport

Safonau A. I.
 Blending Control of Trolleybus Traction and Brake Drives to Enhance Braking Efficiency of Vehicle 132

Power Engineering

Pekhota A. N., Khroustalev B. M., Akeliev V. D., Mikhalchenko A. A.
 Vacuum Pneumatic Transport for Industrial and Utility Components 142

Sednin V. A., Bubyr T. V.
 Heat Transfer Research in Blown-Through Non-Passable Heating Mains Channels. Part I 150

Physics and Mathematics Sciences

Nevdakh V. V.
 On Fulfillment of Energy Conservation Law in Theory of Elastic Waves 161

Meleshko I. N., Lasy P. G.
 Approximate Dilogarithm Representation of One Variational Boundary Value Problem Solution for Circle under the Neumann Boundary Condition 168

Hundzina M. A.
 Spectrum Analysis of Signal in Wolfram Mathematica System 173

Matveyeva L. D.
 Direct Method for Solving Bilinear Programming Problem 179

Главный редактор
Борис Михайлович Хрусталеv

Редакционная коллегия

- Алексеев Ю. Г.** (*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*), заместитель главного редактора,
- Белый А. В.** (*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*),
- Бисби Л.** (*Эдинбургский университет, Эдинбург, Соединенное Королевство Великобритании и Северной Ирландии*),
- Виттманн Ф. Х.** (*Швейцарская высшая техническая школа Цюриха, Цюрих, Швейцарская Конфедерация*),
- Дидерихс У.** (*Ростокский университет, Росток, Федеративная Республика Германия*),
- Дмитриев С. М.** (*Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация*),
- Згуровский М. З.** (*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, Украина*),
- Кондерс А. Б.** (*Дармштадтский технический университет, Дармштадт, Федеративная Республика Германия*),
- Косёр-Казберук М.** (*Белостокский технический университет, Белосток, Республика Польша*),
- Леонович С. Н.** (*Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*), заместитель главного редактора,
- Лю Тингуо** (*компания «Гаююань», провинция Хэнань, Китайская Народная Республика*),
- Макнами Р. Я.** (*Консультационное агентство по вопросам пожарной безопасности, Стокгольм, Королевство Швеция*),
- Максаров В. В.** (*Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация*),
- Нгуен Тху Нга** (*Научный энергетический институт, Вьетнамская академия наук и технологий, Ханой, Социалистическая Республика Вьетнам*),
- Одиназода Х. О.** (*Таджикский технический университет имени академика М. С. Осими, Душанбе, Республика Таджикистан*),
- Опяляк М.** (*Люблинский технический университет, Люблин, Республика Польша*),
- Пенязьков О. Г.** (*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*),

Editor-in-Chief
Boris M. Khroustalev

Editorial Board

- Aliakseyeu Yu. G.** (*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*), Deputy Editor-in-Chief,
- Byeli A. V.** (*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*),
- Bisby L.** (*University of Edinburgh, Edinburgh, United Kingdom of Great Britain and Northern Ireland*),
- Wittmann F. H.** (*ETH – Swiss Federal Institute of Technology Zürich, Zürich, Swiss Confederation*),
- Diederichs U.** (*University of Rostock, Rostock, Federal Republic of Germany*),
- Dmitriev S. M.** (*Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russian Federation*),
- Zgurovsky M. Z.** (*National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine*),
- Koenders A. B.** (*Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Federal Republic of Germany*),
- Kosior-Kozberuk M.** (*Bialystok University of Technology, Bialystok, Republic of Poland*),
- Leonovich S. N.** (*Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus*), Deputy Editor-in-Chief,
- Liu Tingguo** (*Gaoyuan Company, Henan Province, People’s Republic of China*),
- McNamee R. J.** (*Brandskyddslaget AB, Stockholm, Kingdom of Sweden*),
- Maksarov V. V.** (*Saint-Petersburg Mining University, Saint Petersburg, Russian Federation*),
- Nguyen Thu Nga** (*Institute of Energy Science, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Socialist Republic of Vietnam*),
- Odinazoda H. O.** (*Tajik Technical University named after Academic M. S. Osimi, Dushanbe, Republic of Tajikistan*),
- Opielak M.** (*Lublin University of Technology, Lublin, Republic of Poland*),
- Penyazkov O. G.** (*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*),

Пимьента П. (Научно-технический центр строительной отрасли, Сен-Мартен-д'Эр, Французская Республика),
Родригес Ж. П. К. (Коимбрский университет, Коимбра, Португальская Республика),
Романюк Ф. А. (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь),
Сидерис К. (Фракийский университет имени Демокрита, Комотини, Греческая Республика),
Соболев К. (Университет Висконсин-Милуоки, Милуоки, Соединенные Штаты Америки),
Сумров В. В. (компания «Интернет Коммуникация Девелопмент Групп Лимитед», Рига, Латвийская Республика),
Феличетти Р. (Миланский технический университет, Милан, Итальянская Республика),
Чжао Цзи (Северо-Восточный университет, Шэньян, Китайская Народная Республика),
Чижик С. А. (Национальная академия наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь),
Шелег В. К. (Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь), заместитель главного редактора,
Ши Ли И (Научно-технологический парк Шанхайского университета, Шанхай, Китайская Народная Республика),
Эберхардштайнер Й. (Венский технический университет, Вена, Австрийская Республика),
Янковский А. (Технологический институт ВВС, Варшава, Республика Польша)

Ответственный секретарь редакционной коллегии
В. Г. Горбаш

Pimienta P. (Scientific and Technical Centre for the Building – CSTB Department, Saint-Martin-d'Hères, French Republic),
Rodrigues J. P. C. (University of Coimbra, Coimbra, Portuguese Republic),
Romaniuk F. A. (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus),
Sideris K. (Democritus University of Thrace, Komotini, Hellenic Republic),
Sobolev K. (University of Wisconsin-Milwaukee, Milwaukee, United States of America),
Sumrov V. V. (Internet Communication Development Group Ltd – ICD, Riga, Republic of Latvia),
Felicetti R. (Polytechnic University of Milan, Milan, Italian Republic),
Zhao Ji (Northeastern University, Shenyang, People's Republic of China),
Chizhik S. A. (National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus),
Sheleg V. K. (Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus), Deputy Editor-in-Chief,
Shi Li Yi (Science and Technology Park of Shanghai University, Shanghai, People's Republic of China),
Eberhardsteiner J. (Vienna University of Technology, Vienna, Republic of Austria),
Jankowski A. (Air Force Institute of Technology, Warsaw, Republic of Poland)

Executive Secretary of Editorial Board
V. G. Gorbash

Ведущий стилистический редактор

В. Н. Гурьянчик

Адрес редакции

Белорусский национальный технический университет
пр. Независимости, 65, корп. 2, комн. 327
220013, г. Минск, Республика Беларусь

Тел. +375 17 292-65-14

E-mail: sat@bntu.by
http://sat.bntu.by

Перерегистрировано в Министерстве информации Республики Беларусь 19 декабря 2011 г.
Регистрационный номер 285

С 2002 г. издание выходило под названием «Вестник БНТУ»

ISSN 2227-1031. Подписные индексы 00662, 006622

Подписано в печать 06.04.2021. Формат бумаги 60×84 1/8. Бумага мелованная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 11,75. Уч.-изд. л. . Тираж 150 экз. Дата выхода в свет . Заказ № .

Отпечатано в БНТУ. Лицензия ЛП № 02330/74 от 03.03.2014.
220013, г. Минск, пр. Независимости, 65.

© Белорусский национальный технический университет, 2021

Leading Style Editor

V. N. Guryanchyk

Address

Belarusian National Technical University
Nezavisimosty Avenue, 65, Building 2, Room 327
220013, Minsk, Republic of Belarus

Tel. +375 17 292-65-14

E-mail: sat@bntu.by
http://sat.bntu.by

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-95-100>

УДК 621.793.71

Формирование покрытий из самофлюсующегося порошка на основе сталей аустенитного класса с добавлением молибдена

Чл.-кор. НАН Беларуси, докт. техн. наук, проф. Ф. И. Пантелеенко¹⁾,
канд. техн. наук В. А. Оковитый¹⁾, докт. техн. наук, проф. О. Г. Девойно¹⁾,
инженеры В. В. Оковитый¹⁾, А. С. Володько¹⁾,
чл.-кор. НАН Беларуси, докт. физ.-мат. наук, проф. В. М. Асташинский²⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь),

²⁾Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова НАН Беларуси (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Определено влияние добавления Mo и MoS₂ на микроструктуру и свойства покрытия из порошков на базе аустенитных сталей. Покрытия исследовали с помощью рентгеновской дифракции (XRD), оптической микроскопии, сканирующей электронной микроскопии (SEM) с использованием твердомера по Виккерсу. Абразивную износостойкость определяли по методике Pin on disk. Результаты показывают, что покрытие, не содержащее Mo и MoS₂, состоит из фаз $\gamma(\text{Fe})$, M₇(C, B)₃ и (Fe, Cr)₂B. Добавление Mo и MoS₂ приводит к образованию фаз M₂₃(C, B)₆, Mo₂(B, C) и Fe₃Mo₃(C, B), где M = Fe, Cr, Mo. Цель исследований заключалась в изучении характеристик распределения Mo и MoS₂ и влияния их добавления на микроструктуру, твердость, абразивную износостойкость покрытия из сплава на основе аустенитных сталей. Для напыления использовали композиционные материалы на основе аустенитных сталей, полученных методом диффузионного легирования (Aus0Mo), которые имеют близкую к сферической форму частиц диаметром 50–100 мкм. В порошок композиционного материала на основе аустенитных сталей (Aus3Mo, Aus5Mo и Aus7Mo) добавляли 3–7 мас. % порошка Mo и 1,0–1,5 мас. % порошка MoS₂ с частицами диаметром менее 50 мкм. Методы наплавки, включая газовую дуговую сварку вольфрамовым электродом, дуговую сварку в защитном газе, плазменную наплавку (РТА) и лазерную наплавку, широко применяются в промышленности для повышения износостойкости поверхностей. Наиболее важные различия между этими методами заключаются в скорости осаждения, применимости материалов, разбавлении субстрата, микроструктуре и стабильности твердости после воздействия высоких температур, а также в стоимости изготовления. Среди методов, описанных выше, плазменное напыление с последующим оплавлением представляет собой хорошую альтернативу другим процессам наплавки поверхности. Перегревать покрытие до полного расплавления не следует, поскольку в этом случае первичные кристаллы карбидов и боридов хрома переходят в жидкий раствор и при последующей кристаллизации образуют более грубую структуру, ухудшая качество покрытия. Именно это не происходит при плазменном напылении с последующим оплавлением. Кроме того, способ дешев, покрытия обладают достойным качеством, конкурентоспособной износостойкостью и стабильностью свойств при высокой температуре.

Ключевые слова: плазменное напыление, оплавление, материалы, порошки, аустенитные стали, молибден, морфология, структура покрытия, фазовые характеристики, абразивная износостойкость

Для цитирования: Формирование покрытий из самофлюсующегося порошка на основе сталей аустенитного класса с добавлением молибдена / Ф. И. Пантелеенко [и др.] // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 95–100. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-95-100>

Адрес для переписки

Оковитый Вячеслав Александрович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-71
niil_svarka@bntu.by

Address for correspondence

Okovity Vjacheslav A.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-71
niil_svarka@bntu.by

Forming Coatings from Self-Fluxing Powder Based on Steels of Austenite Class Adding Molybdenum

F. I. Panteleenko¹, V. A. Okovity¹, O. G. Devoino¹, V. V. Okovity¹,
A. S. Volodko¹, V. M. Astashinsky²

¹Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus),

²A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of NAS of Belarus (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper presents a study of the effect of adding Mo and MoS₂ on the microstructure and properties of a powder coating based on austenitic steels. The coatings have been studied using X-ray diffraction (XRD), optical microscopy, scanning electron microscopy (SEM), a Vickers hardness tester, and abrasion wear resistance has been determined by the Pin on disk method. The results show that a coating that does not contain Mo and MoS₂ consists of the phases $\gamma(\text{Fe})$, $\text{M}_7(\text{C}, \text{B})_3$ and $(\text{Fe}, \text{Cr})_2\text{B}$. The addition of Mo and MoS₂ leads to the formation of phases $\text{M}_{23}(\text{C}, \text{B})_6$, $\text{Mo}_2(\text{B}, \text{C})$ and $\text{Fe}_3\text{Mo}_3(\text{C}, \text{B})$, where $\text{M} = \text{Fe}, \text{Cr}, \text{Mo}$. The main goal of these studies was to study characteristics of Mo and MoS₂ distribution and the effect of their addition on the microstructure, hardness, and abrasion wear resistance of an alloy coating based on austenitic steels. Composite materials based on austenitic steels obtained by diffusion alloying (Aus0Mo), which has a nearly spherical shape with a diameter of 50–100 μm , have been used for deposition. 3–7 wt. % of Mo powder and 1.0–1.5 wt. % of MoS₂ powder with a diameter less than 50 μm have been added in the powder of the composite material based on austenitic steels (Aus3Mo, Aus5Mo, Aus7Mo). Surfacing methods, including gas arc welding with a tungsten electrode, arc welding in shielding gas, plasma surfacing (PTA) and laser surfacing are widely used in industry to increase wear resistance of surfaces. The most important differences between these methods are deposition rate, applicability of materials, substrate dilution, microstructure and hardness stability after exposure to high temperatures, as well as manufacturing cost. Among the methods described above, plasma spraying followed by fusion is a good alternative to other surfacing processes. The coating should not be overheated until it is completely melted, since in this case the primary crystals of chromium carbides and borides pass into a liquid solution and upon subsequent crystallization, form a coarser structure, worsening the quality of the coating. This is precisely what does not occur during plasma spraying followed by reflow; in addition, the method is cheap, coatings are of high quality, competitive wear resistance and high stability of properties at high temperature.

Keywords: plasma spraying, reflow, materials, powders, austenitic steels, molybdenum, morphology, coating structure, phase characteristics, abrasive wear resistance

For citation: Panteleenko F. I., Okovity V. A., Devoino O. G., Okovity V. V., Volodko A. S., Astashinsky V. M. (2021) Forming Coatings from Self-Fluxing Powder Based on Steels of Austenite Class Adding Molybdenum. *Science and Technique*. 20 (2), 95–100. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-95-100> (in Russian)

Введение

В технологиях напыления существуют два вида молибденовых покрытий – из чистого молибдена и из смеси порошков молибдена и самофлюсующегося сплава. Напыление молибденовой проволокой при помощи газопламенной струи – более дешевый и распространенный процесс, но лучшее качество имеют комбинированные плазменно-напыленные покрытия с использованием молибдена и самофлюсующегося сплава [1–3]. Рассмотрим механизм формирования этого комбинированного плазменного покрытия.

Известно, что температура плавления самофлюсующихся сплавов около 1050 °С, тогда как порошок молибдена плавится при 2620 °С. При нагревании в плазме такой порошковой смеси до температуры плавления частиц молибдена образуются сильно перегретые капли

расплава самофлюсующегося сплава. Когда эти капли попадают на поверхность получаемого субстрата, у них должно хватать энергии на восстановление получаемых оксидных пленок и образование достаточной металлургической связи с материалом субстрата, а также на растекание по получаемой поверхности до того, как они закристаллизуются. Из-за довольно высокой температуры плавления частицы порошка молибдена кристаллизуются практически сразу же, приходя на субстрат, при этом функция этих получившихся застывших частиц не менее важна: остывающие твердые частицы порошка молибдена сохраняют частицы самофлюсующегося сплава дольше в расплавленном состоянии и соответственно создают особые механические препятствия для образования сплошной пленки получившегося сплава, что необходимо для значительного уменьшения усадочных напряжений растяжения в получив-

шемся покрытии. В результате создается принципиальное преимущество двухфазного покрытия из смеси порошков молибдена и самофлюсующегося сплава. При плазменном напылении на холодный субстрат порошков молибдена или самофлюсующегося сплава по отдельности нельзя получить плотные покрытия, тогда как из смеси данных материалов это возможно. Для плазменного напыления самофлюсующийся сплав на базе аустенитных сталей ПР-Х18Н9 обычно используется из-за его высокого соотношения производительности и цены по сравнению с другими сплавами. Покрытие из сплава на основе аустенитных сталей обладает высокой износостойкостью, на которую главным образом влияют его микроструктура и фазовый состав [4–6].

Легирование с использованием Мо и MoS_2 в качестве технологии для повышения износостойкости самофлюсующихся покрытий приводит к созданию однородной микроструктуры матрицы и, следовательно, повышению износостойкости покрытий. К сожалению, мало опубликовано работ по влиянию добавления Мо и MoS_2 на термостойкость покрытия на основе аустенитных сталей, нанесенного методом плазменного напыления. Поэтому в своем исследовании авторы статьи основное внимание уделяли влиянию этих добавок на микроструктуру, фазовые характеристики, абразивную износостойкость покрытия из сплава на основе аустенитных сталей, нанесенного методом плазменного напыления с последующим оплавлением. Цель исследований заключалась в изучении характеристик распределения Мо и MoS_2 и влияния их добавления на микроструктуру, твердость и абразивную износостойкость покрытия из сплава на основе аустенитных сталей.

Формирование плазменных покрытий из композиционных материалов на основе аустенитных сталей, полученных методом диффузионного легирования и молибдена

Для напыления использовали композиционные материалы на основе аустенитных сталей, полученных методом диффузионного легирования (Aus0Mo), которые имеют близкую к сферической форму частиц диаметром 50–100 мкм.

В порошок композиционного материала на основе аустенитных сталей (Aus3Mo , Aus5Mo , Aus7Mo) добавляли 3–7 мас. % порошка Мо, 1,0–1,5 мас. % порошка MoS_2 диаметром частиц менее 50 мкм. Покрытия наносились с использованием плазменной установки УПУ-3Д и разработанного авторами статьи плазмотрона [7–10]. Параметры плазменного напыления: ток 350 А, дистанция напыления 100 мм, расход плазмообразующего газа азота для ПР-Х18Н9 составляет 55 л/мин, фракция порошка 50–100 мкм, толщина покрытия 350 мкм. На рис. 1 приведена микрофотография поперечного шлифа покрытия Aus5Mo на стальной подложке, полученного атмосферным плазменным напылением.

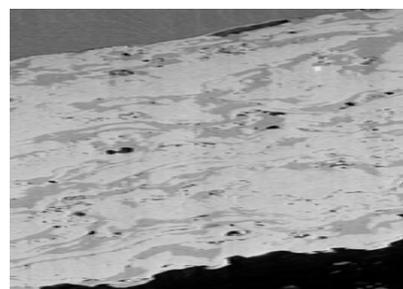


Рис. 1. Покрытие Aus5Mo (мехсмесь порошков самофлюса на базе аустенитных сталей ПР-Х18Н9 с добавлением 5 мас. % Мо и 1 мас. % MoS_2): светлая фаза – молибден; темная – самофлюсующийся сплав ($\times 500$)

Fig. 1. Aus5Mo coating (mechanical mixture of self-flux powders based on ПР-Х18Н9 [PR-Kh18N9] austenitic steels with addition of 5 wt. % Мо and 1 wt. % MoS_2): light phase – molybdenum; darker – self-fluxing alloy ($\times 500$)

Оплавление проводили на этой же установке при следующих режимах: ток 450 А, дистанция оплавления 65–80 мм, расход плазмообразующего газа азота 65 л/мин, скорость перемещения 108 мм/мин, количество проходов 3. Параметры были оптимизированы с точки зрения получения максимальной напыляемости, твердости и толщины осаждения после оптимизации. На рис. 2 представлены типичные сечения морфологии осажденных образцов. Наблюдение показывает, что каждый образец может быть в целом разделен на покрытие и подложку. Тонкий белый слой (линия или зона плавления) плоской кристаллизации наблюдался между двумя частями, показывая хорошую метал-

лургическую связь. Из рис. 2а, в также видно, что типичная гипозвтектическая (дозвтектоидная) микроструктура, характеризующаяся темными дендритами, может быть обнаружена в покрытиях без Мо и с 3 мас. % Мо. Однако очевидная гиперэвтектическая (заэвтектоидная) микроструктура, характеризующаяся яркими игольчатыми соединениями, видна в покрытиях с добавлением 5 и 7 мас. % Мо (рис. 2с, d). Это связано с тем, что добавление Мо в покрытие аустенитных сплавов уменьшает точку эвтектики, помогая увеличить относительное содержание соединений в напыленных покрытиях. Можно предположить, что тип микроструктуры покрытия, не содержащего Мо, будет изменен, когда добавление Мо достигает определенного значения. В нашем исследовании гипозвтектическая микроструктура превращается в гиперэвтектическую, когда добавка Мо достигает 5 и 7 мас. %. Сравнивая микроструктуру покрытия, не содержащего Мо и MoS₂ (рис. 2а), с микроструктурой с их добавлением (рис. 2с, d), видно, что добавление Мо и MoS₂ в покрытие из сплава на основе аустенитных сталей улучшает его микроструктуру. И самая тонкая микроструктура может быть получена в 5 мас. % покрытия при добавлении Мо и MoS₂. Хотя

влияние добавления компонентов на микроструктуру покрытия, не содержащего Мо, неясно, оно может быть результатом изменения характера зародышеобразования и/или химического состава реакции затвердевания. Можно предположить, что фазовое превращение и осаждение были причиной изменения микроструктуры после добавления Мо и MoS₂ в покрытие [10–13]. Твердость (HV) для покрытий без и с добавлением Мо и MoS₂ показана на рис. 3. Из рис. 3а видно, что покрытия с добавлением имеют более высокие значения твердости, чем без Мо и MoS₂, а самое высокое значение твердости можно получить при добавлении 5 мас. % Мо.

На рис. 3 показана абразивная износостойкость покрытий. Можно видеть, что объем износа покрытий уменьшается с добавлением Мо от 0 до 5 мас. %. Это указывает на повышение стойкости к абразивному износу вследствие добавления Мо и MoS₂ в покрытие из сплава на основе аустенитных сталей. Однако когда добавка Мо достигает 7 мас. %, объем износа снова увеличивается, и в результате он меньше, чем у покрытия, не содержащего Мо, но больше, чем покрытия с добавлением 3 мас. % Мо и MoS₂.

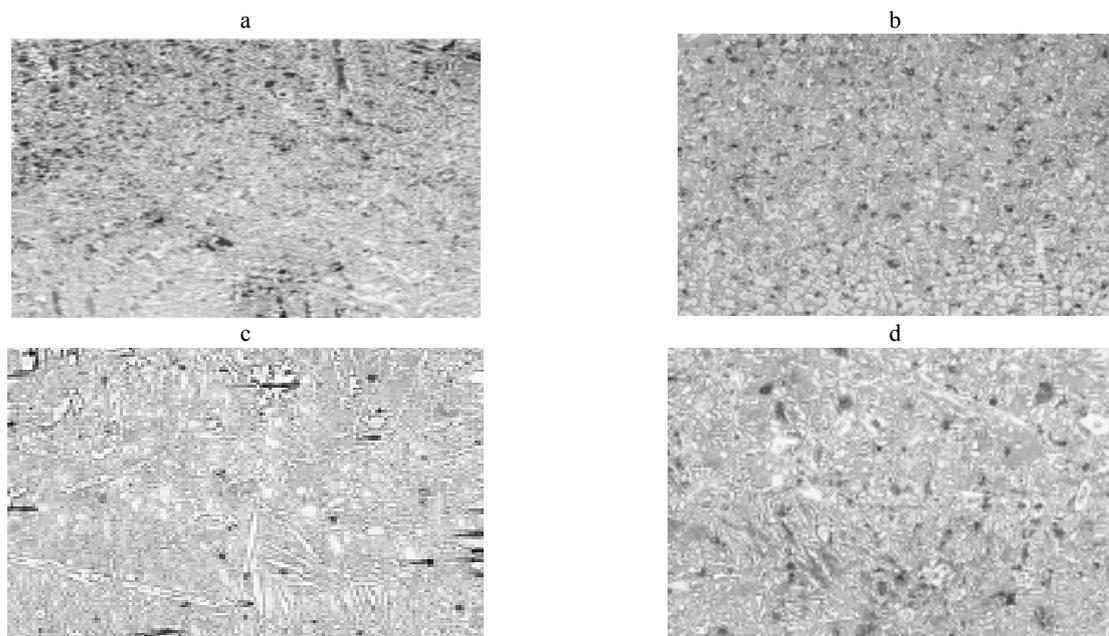


Рис. 2. Микроструктуры в наплавочных покрытиях: а – без Мо; б – с добавлением наплавкой 3 мас. % Мо; с – 5; d – 7 мас. % Мо (в покрытиях 1,0–1,5 мас. % порошка MoS₂)

Fig. 2. Microstructures in surfacing coatings: а – without Mo; б – with added surfacing of 3 wt. % Mo, с – 5; d – 7 wt. % Mo (in coatings 1.0–1.5 wt. % powder MoS₂)

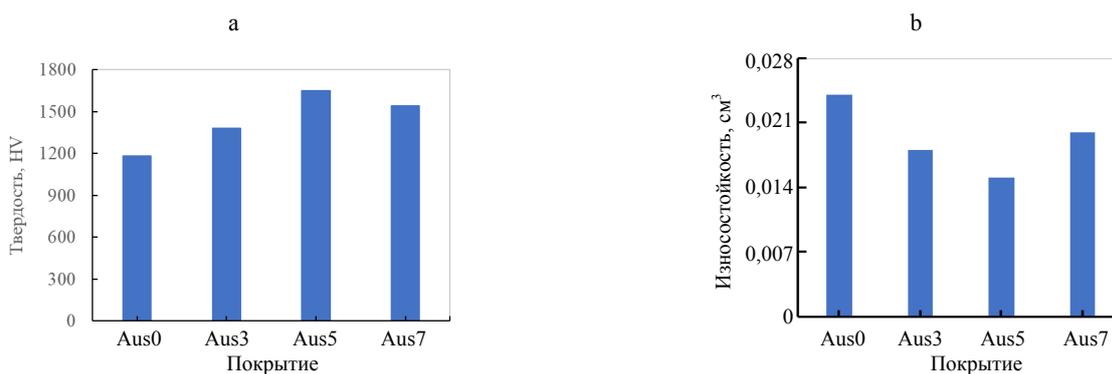


Рис. 3. Твердость по Виккерсу (а) и абразивная износостойкость покрытий из сплавов FeCrBSi без Mo и с добавлением Mo (b)

Fig. 3. Vickers hardness (a) and abrasive wear resistance of coatings from FeCrBSi alloys without Mo and with the addition of Mo (b)

Как было проанализировано выше, добавление 0–5 мас. % Mo и 1,0–1,5 мас. % MoS₂ в покрытие из сплава на основе аустенитных сталей не только улучшает его микроструктуру, но и способствует фазовому превращению и осаждению, помогая повысить абразивную износостойкость напыленных покрытий. Когда добавка Mo достигает 7 мас. %, микроструктура снова становится грубой, снижая износостойкость. Помимо деформации происходило хрупкое разрушение из-за ударов дискретных твердых частиц по нанесенным покрытиям. Очевидно, что увеличение вязкости разрушения полезно для повышения эрозионной износостойкости. В настоящем исследовании уточнение микроструктуры и фазовое превращение из твердого M₇(C, V)₃ в относительно мягкий M₂₃(C, V)₆ после добавления Mo и MoS₂ в покрытие из сплава на основе аустенитных сталей помогают повысить износостойкость. Кроме того, упрочнение твердого раствора, вызванное затвердеванием Mo, ухудшает вязкость разрушения из-за увеличения искажения кристаллической решетки. Следовательно, абразивная износостойкость повышается с увеличением добавления Mo от 0 до 5 мас. %, что объясняется увеличением размера зерна, упрочнения и размягчения второй фазы выше, чем упрочнение твердого раствора. Однако, когда добавка Mo достигает 7 мас. %, увеличивающееся упрочнение твердого раствора и уменьшающееся упрочнение размера зерна снижают абразивную износостойкость, и резуль-

тат даже меньше, чем у покрытия с добавлением 3 мас. % Mo.

ВЫВОДЫ

1. На низкоуглеродистую сталь методом плазменного напыления с последующим оплавлением плазмой наносили четыре вида покрытий из сплава на основе аустенитных сталей без или с 3–7 мас. % Mo и 1,0–1,5 мас. % MoS₂. Изучено влияние добавления Mo на микроструктуру, механические свойства покрытия из сплава на основе аустенитных сталей.

2. Покрытия на основе аустенитных сталей с 0–3 мас. % Mo и 1,0–1,5 мас. % MoS₂ имеют гипозэвтектическую структуру. При увеличении добавления Mo до 5 и 7 мас. % может быть получена гиперэвтектическая структура. Элемент Mo распределяется в основном в (Fe, Cr)-обогащенных соединениях и карбидах молибдена.

3. Не содержащее Mo покрытие на основе аустенитных сталей состоит из фаз γ (Fe), M₇(C, V)₃ и (Fe, Cr)₂V. Добавление 3–7 мас. % Mo и 1,0–1,5 мас. % MoS₂ способствует образованию фаз M₂₃(C, V)₆ и Mo₂(V, C) и Fe₃Mo₃(C, V), за исключением тех, которые существуют в покрытии, не содержащем Mo, и улучшает его микроструктуру. Тончайшая микроструктура может быть получена с добавлением 5 мас. % Mo.

4. При добавлении Mo от 0 до 5 мас. % можно получить очевидное увеличение твердости. Когда добавка Mo достигает 7 мас. %, твердость уменьшается.

5. Добавление Mo и MoS₂ может повысить абразивную износостойкость покрытия из сплава на основе аустенитных сталей. Наивысшая стойкость к абразивному износу может быть достигнута в покрытии с добавлением 5 мас. % Mo.

ЛИТЕРАТУРА

1. Газотермические покрытия / В. Н. Анциферов [и др.]. Екатеринбург: Наука: Урал. издат. фирма, 1994. 324 с.
2. Нанесение покрытий плазмой / В. В. Кудинов [и др.]. М.: Наука, 1990. 407 с.
3. Газотермическое напыление композиционных порошков / А. Я. Кулик [и др.]. Л.: Машиностроение, 1985. 199 с.
4. Оковитый, В. А. Получение композиционного керамического материала для нанесения износостойких покрытий / В. А. Оковитый, А. И. Шевцов, В. В. Оковитый // Порошковая металлургия: респ. межвед. сб. науч. тр. Минск: Белорус. наука, 2008. Вып. 31. С. 156–162.
5. Sulit, R. A. Thermal Spray Applications in the U.S. Navy / R. A. Sulit, V. D. Schaper, H. J. Vanderveldt // *Thin Solid Films*. 1981. Vol. 83, No 3. P. 373–374. [https://doi.org/10.1016/0040-6090\(81\)90642-8](https://doi.org/10.1016/0040-6090(81)90642-8).
6. Лузан, С. А. Повышение долговечности деталей тракторов плазменным напылением / С. А. Лузан // Автоматическая сварка. 1992. № 7. С. 74–75.
7. Ханзаров, Г. М. Повышение износостойкости деталей машин плазменным напылением / Г. М. Ханзаров // Защита металлов. 1992. № 3. С. 453–454.
8. Хасуй, А. Наплавка и напыление / А. Хасуй. М.: Машиностроение, 1985. 240 с.
9. Valarezo, A. An Integrated Assessment of Process-Microstructure – Property Relationships for Thermal-Sprayed NiCr Coatings / A. Valarezo, S. Sampath // *Thermal Spraying Technology*. 2011. Vol. 20, No 6. P. 1244–1258. <https://doi.org/10.1007/s11666-011-9665-6>.
10. Труды Московского высшего технического училища имени Н. Э. Баумана. М., 1997. Вып. 1: Теория и практика плазменного напыления. 128 с.
11. Okovity, V. Plasma Wear-Resistant Coatings with Inclusions of a Solid Lubricant / V. Okovity // *Welding International*. 2002. Vol. 16, No 11. P. 918–920. <https://doi.org/10.1080/09507110209549638>.
12. Пантелеенко, Ф. И. Исследование структуры износостойких покрытий / Ф. И. Пантелеенко, В. А. Оковитый, А. Ф. Пантелеенко // Сварка и родственные технологии: сб. докл. Междунар. симпоз. Минск, 2012. С. 150–152.
13. Пантелеенко, Ф. И. Разработка технологического процесса плазменного напыления покрытий на детали коробок передач энергонасыщенных тракторов / Ф. И. Пантелеенко, В. А. Оковитый, А. Ф. Пантелеенко // Труды ГОСНИТИ. 2012. Т. 110, ч. 2. С. 19–22.

Поступила 17.01.2020
Подписана в печать 31.03.2020
Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Antsiferov V. N., Shmakov A. M., Ageev S. S., Bulanov V. Ya. (1994) *Gas-Thermal Coatings*. Ekaterinburg, Nauka Publ. 324 (in Russian).
2. Kudinov V. V., Pekshev P. Yu., Belashchenko V. E., Solonenko O. P., Safiullin, V. A. (1990) *Application of Plasma Coating*. Moscow, Nauka Publ. 407 (in Russian).
3. Kulik A. Ya., Borisov Yu. S., Mnukhin A. S., Nikitin M. D. (1985) *Gas-Thermal Evaporation of Composite Powders*. Leningrad, Mashinostroenie Publ. 199 (in Russian).
4. Okovity V. A., Shevtsov A. I., Okovity V. V. (2008) Obtaining Composite Ceramic Material for Applying Wear-resistant Coatings. *Poroshkovaya Metallurgiya. Respublikanskii Mezhdovomstvennyi Sbornik Nauchnykh Trudov* [Powder Metallurgy. Republican Interdepartmental Collection of Scientific Papers]. Minsk, Belarusskaya Nauka Publ., (31), 156–162 (in Russian).
5. Sulit R. A., Schaper V. D., Vanderveldt H. J. (1981) Thermal Spray Applications in the U.S. Navy. *Thin Solid Films*, 83 (3), 373–374. [https://doi.org/10.1016/0040-6090\(81\)90642-8](https://doi.org/10.1016/0040-6090(81)90642-8).
6. Luzan S. A. (1992) Increasing the Durability of Tractor Parts by Plasma Spraying. *Avtomaticheskaya Svarka = Automatic Welding*, (7), 74–75 (in Russian).
7. Khanzarov G. M. (1992) Increasing the Wear Resistance of Machine Parts by Plasma Spraying. *Zashchita Metallov* [Protection of Metals], (3), 453–454 (in Russian).
8. Khasui A. (1985) *Surfacing and Spraying*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 240 (in Russian).
9. Valarezo A., Sampath S. (2011) An Integrated Assessment of Process-Microstructure – Property Relationships for Thermal-Sprayed NiCr Coatings. *Thermal Spraying Technology*, 20 (6), 1244–1258. <https://doi.org/10.1007/s11666-011-9665-6>.
10. *Proceedings of Bauman Moscow Higher Technical School. Issue 1: Theory and Practice of Plasma Spraying*. Moscow, 1997. 128 (in Russian).
11. Okovity V. (2003) Plasma Wear-Resistant Coatings with Inclusions of a Solid Lubricant. *Welding International*, 16 (11), 918–920. <https://doi.org/10.1080/09507110209549638>.
12. Panteleenko F. I., Okovity V. A., Panteleenko A. F. (2012) Investigation of the Structure of Wear-Resistant Coatings. *Svarka i Rodstvennyye Tekhnologii: Sb. Dokl. Mezhdunar. Simpoz.* [Welding and Related Technologies: Collected Papers of the International Symposium]. Minsk, 2012, 150–152 (in Russian).
13. Panteleenko F. I., Okovity V. A., Panteleenko A. F. (2012) Development of the Technological Process of Plasma Spraying of Coatings on Parts of Transmissions of Energy-Saturated Tractors. *Trudy GOSNITI* [Transactions of GOSNITI], 110 (2), 19–22 (in Russian).

Received: 17.01.2020

Accepted: 31.03.2020

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-101-108>

УДК 621.7.043

Пластическое формообразование наконечника концентратора-волновода для ультразвуковой эндоваскулярной абляции

Асп. Дай Вэньци¹⁾,
кандидаты техн. наук, доценты Ю. Г. Алексеев¹⁾, А. Ю. Королёв¹⁾,
инж. А. С. Будницкий¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Одним из наиболее эффективных методов лечения внутрисосудистых образований в настоящее время является применение ступенчатых ультразвуковых волноводных систем трубчатого типа (концентраторов-волноводов) с полым сферическим наконечником. Его наличие обеспечивает возможность подачи жидких сред в зону дислокации внутрисосудистого образования с целью дополнительного кавитационного воздействия, а также максимально эффективное разрушение внутрисосудистых образований за счет виброударного воздействия. При существующих особенностях методов формообразования для получения полого сферического наконечника концентратора-волновода целесообразно использовать методы пластического деформирования – раздачу и обжим. В статье представлены результаты предварительного расчета, численного моделирования и экспериментальных исследований процессов формообразования наконечника концентратора-волновода раздачей и обжимом. На основе метода конечных элементов в среде программного комплекса ABAQUS выполнено моделирование операций раздачи и обжима трубной заготовки, позволившее: оценить напряженно-деформированное состояние деформируемого конического участка заготовки, изменение толщины стенки в процессе формоизменения и рассчитать длину заготовки для оформления конического участка; установить закономерности влияния геометрических параметров на силовые режимы процесса раздачи; установить параметры режимов формообразования наконечника концентратора-волновода методом раздачи и обжима, обеспечивающие формирование требуемой геометрии. Полученные результаты предварительного расчета, численного моделирования и экспериментальных исследований процессов формообразования наконечника концентратора-волновода раздачей и обжимом имеют схожие значения, что подтверждает корректность использования как метода предварительного расчета, так и численного моделирования при разработке технологии изготовления концентратора-волновода.

Ключевые слова: трубчатый концентратор-волновод, внутрисосудистые образования, сферический наконечник, пластическая деформация, формообразование раздачей и обжимом

Для цитирования: Пластическое формообразование наконечника концентратора-волновода для ультразвуковой эндоваскулярной абляции / Дай Вэньци [и др.] // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 101–108. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-101-108>

Plastic Shaping of Concentrator-Waveguide Tip for Ultrasound Endovascular Ablation

Dai Wenqi¹⁾, Yu. G. Aliakseyeu¹⁾, A. Yu. Korolyov¹⁾, A. S. Budnitskiy¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. One of the most effective methods of treating intravascular formations at present is the use of stepped ultrasonic waveguide systems of a tubular type (concentrators-waveguides) with a hollow spherical tip, the presence of which makes

Адрес для переписки

Будницкий Алексей Сергеевич
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 24,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-76-78
budnitskiy@park.bntu.by

Address for correspondence

Budnitskiy Alexey S.
Belarusian National Technical University
24, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-76-78
budnitskiy@park.bntu.by

it possible to supply liquid media to the dislocation zone of an intravascular formation with the aim of additional cavitation effect and as efficiently as possible. destroy intravascular formations due to vibration impact. Based on the results of the analysis on the features of the existing shaping methods for obtaining a hollow spherical tip of the concentrator-waveguide, it is advisable to use methods of plastic deformation – expansion and crimping. The paper presents results of preliminary calculations, numerical modeling and experimental studies of tip shaping processes of the concentrator-waveguide by distribution and crimping. On the basis of the finite element method in the environment of the ABAQUS software package, modeling of the expansion and crimping of a pipe billet was carried out, which has made it possible to: evaluate the stress-strain state of the deformable conical section of the billet, the change in wall thickness during the forming process and calculate the length of the billet for the design of the conical section; to establish the patterns of the influence of geometric parameters on the power modes of the distribution process; to set the parameters of the modes of forming the tip of the concentrator-waveguide by the method of distribution and crimping, which ensure the formation of the required geometry. The obtained results of preliminary calculation, numerical modeling and experimental studies of tip shaping processes of the concentrator-waveguide by distribution and crimping have similar values, which confirms the correctness of using both the method of preliminary calculation and numerical modeling in the development of the technology for manufacturing the concentrator-waveguide.

Keywords: tubular concentrator-waveguide, intravascular formations, spherical tip, plastic deformation, shaping by distribution and crimping

For citation: Dai Wenqi, Aliakseyeu Yu. G., Korolyov A. Yu., Budnitskiy A. S. (2021) Plastic Shaping of Concentrator-Waveguide Tip for Ultrasound Endovascular Ablation. *Science and Technique*. 20 (2), 101–108. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-101-108> (in Russian)

Введение

Тромбозы кровеносных сосудов являются одной из главных причин смертности и инвалидизации населения всего мира [1]. От тромбозов ежегодно умирает один из 250 человек, живущих на земле, несмотря на большое количество лекарственных препаратов, созданных для лечения этого заболевания [2, 3]. В Белорусском национальном техническом университете разработана принципиально новая конструкция ультразвуковой волноводно-катетерной системы для устранения непроходимости кровеносных сосудов, основанная на использовании в ней концентратора-волновода нового поколения, а именно – ступенчатого концентратора-волновода трубчатого типа (далее – концентратора-волновода). Эффект разрушения тромбов/бляшек осуществляется за счет применения кавитационной струи жидкости, которая формируется путем инфузионной подачи через внутреннюю полость концентратора-волновода на его дистальную часть одновременно с ультразвуковым воздействием [4].

Для обеспечения максимального эффекта разрушения внутрисосудистых образований путем виброударного воздействия при ультразвуковых колебаниях на дистальной части концентратора-волновода [5] сформирован рабочий сферический наконечник, имеющий три поперечных и центральное осевое отверстия (рис. 1).

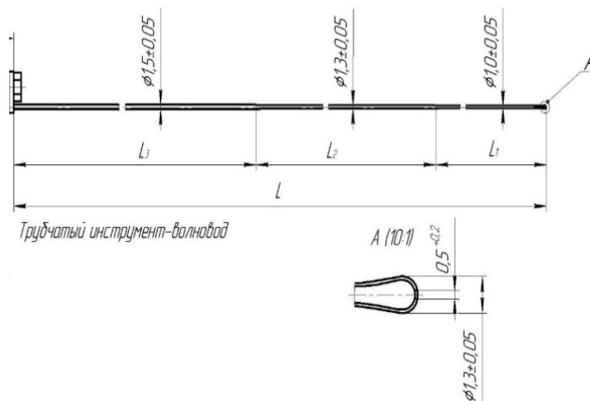


Рис. 1. Проксимальная, дистальная части и рабочий наконечник концентратора-волновода

Fig. 1. Proximal, distal parts and working tip of concentrator-waveguide

Статья посвящена исследованию процесса формообразования сферического наконечника концентратора-волновода на основе методов пластического деформирования: с раздачей конца дистальной части трубчатой ступенчатой заготовки в форму на длину будущего сферического наконечника и дальнейшим обжимом для придания ему сферической формы. В [6] проведен анализ существующих методов изготовления подобных концентраторов-волноводов, в том числе и формообразование методами пластического деформирования.

Предварительный расчет промежуточных диаметров при раздаче и обжиме

Раздача – формоизменяющая операция для увеличения периметра трубной заготовки рас-

тяжением изнутри в радиальном направлении пуансоном. Обжим – сужение поперечного сечения концевой части трубной заготовки в радиальном направлении в матрице путем обжатия материала снаружи и уменьшения диаметра (рис. 2).

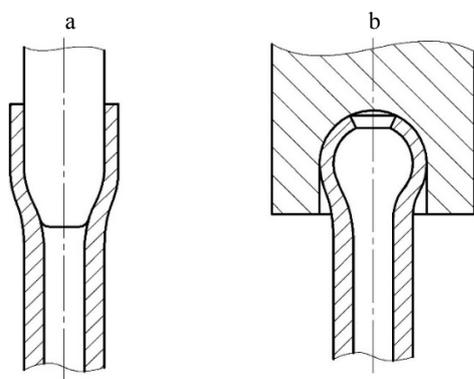


Рис. 2. Схема формообразования рабочего наконечника концентратора-волновода: а – раздача трубки на требуемые диаметр и длину; б – обжим в сферу

Fig. 2. Scheme of working tip shaping of concentrator-waveguide: a – distribution of tube to the required diameter and length; b – crimp into a sphere

Возможность деформирования заготовки за одну операцию определяется коэффициентом раздачи K_p

$$D_p = K_p D, \quad (1)$$

где D_p – наибольший диаметр после раздачи; D – исходный диаметр заготовки.

Предельный коэффициент раздачи регламентируется одним из двух видов потери устойчивости – складкообразованием в основании заготовки или появлением шейки в одном или одновременно нескольких участках кромки деформированной части заготовки, приводящей к образованию трещины [7]. Рекомендуемый коэффициент раздачи для стали составляет 1,05–1,15 [8].

Деформированное состояние при раздаче неоднородно по очагу деформации и изменяется в зависимости от соотношения радиального и окружного нормальных напряжений. Зона утолщения стенки мала по сравнению с зоной утонения. Поэтому с некоторым приближением можно считать, что в очаге деформации при раздаче стенка только утоняется. Наименьшая толщина стенки формируется на ее кромке и определяется по формуле [7]

$$s_p = s \sqrt{\frac{1}{K_p}}, \quad (2)$$

где s_p – толщина стенки после раздачи; s – толщина стенки исходной заготовки.

Для формирования сферического наконечника из трубки диаметром 1,0 мм требуется предварительная раздача заготовки до диаметра 1,35–1,37 мм (с учетом припуска под последующие операции финишной обработки). Для выполнения этой операции необходимо использование пуансонов нескольких типоразмеров. Обжим заготовки после раздачи в выпуклую сферическую форму необходимо производить в матрице с радиусом закругления 0,65–0,70 мм. При этом осевое перемещение матрицы выполняется с таким условием, чтобы в сферическом наконечнике оставалось центральное отверстие диаметром 0,5 мм.

Количество переходов, необходимых для раздачи трубчатой заготовки диаметром 1,00 мм до диаметра 1,36 мм, оценивалось с использованием коэффициента раздачи K_p по формуле (1). Для расчетов принимали значения $K_p = 1,11–1,12$. Расчет толщины стенки выполняли по (2). Диаметры пуансонов определяли как разность диаметра D_p и толщины стенки s_p . Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчета диаметров пуансонов и толщины стенки
Calculation results of punch diameters and wall thickness

Переход	Коэффициент раздачи K_p	Диаметр D_p , мм	Толщина стенки s_p , мм	Наружный диаметр $D_{нар}$, мм	Внутренний диаметр (диаметр пуансона) $d_{п}$, мм
Исходный	–	0,750	0,250	1,000	0,500
1	1,11	0,833	0,237	1,070	0,596
2	1,12	0,932	0,224	1,156	0,708
3	1,11	1,035	0,213	1,248	0,822
4	1,12	1,159	0,201	1,360	0,958

Второй этап формирования сферического наконечника заключался в обжиме с помощью сферического пуансона. Предельная деформация при обжиме труб ограничивается потерей устойчивости заготовки, что имеет место при $s_p/D_p \leq 0,025$ [8]. При $s_p = 0,201$ мм и $D_p = 1,159$ мм – $s_p/D_p = 0,173$; соответственно обжим можно проводить за один проход с использованием сферического пуансона необходимого радиуса закругления.

Моделирование процессов формообразования наконечника концентратора-волновода

Для оценки размерных параметров трубной заготовки при раздаче на разных этапах и при формировании сферической части обжимом выполнено численное моделирование процессов формообразования. Использована упруго-пластическая модель деформации материала в формулировке конечно-элементной схемы решения задачи в виде метода перемещений, где искомыми считаются упругие перемещения деформированного тела [9].

Расчет выполнен с использованием программного комплекса ABAQUS 6.14 (модуль ABAQUS/STANDARD), предназначенного для решения инженерных задач конечно-элемент-

ного анализа (статика, динамика, теплопередача) в совокупности с контактными взаимодействиями и нелинейными свойствами материалов, основанного на неявной схеме интегрирования в статической постановке для плоской осесимметричной модели (смоделировано продольное сечение концентратора-волновода). При моделировании этапов раздачи учтено, что трубная заготовка подвергается отжигу перед каждым этапом деформирования. Для каждого последующего этапа раздачи принята геометрия, полученная при расчете предыдущего этапа. Для учета обратного пружинения после этапа формообразования пуансон извлекается из трубной заготовки, затем проводится фиксация толщин и диаметров. В качестве примера на рис. 3 приведены результаты моделирования первого этапа раздачи.

Изображения продольных сечений заготовок после четырех проходов раздачи представлены на рис. 4. На сечениях указаны смоделированные численные значения толщины стенки по длине заготовки. В табл. 2 приведены величины толщины стенки и наружного диаметра возле кромки заготовки после переходов раздачи, полученные по результатам моделирования.

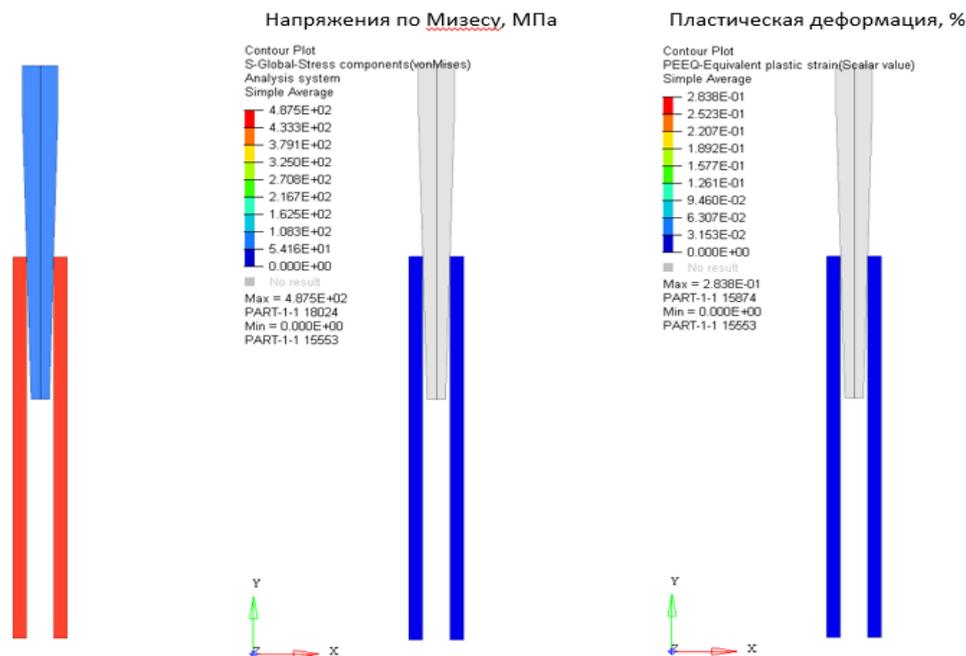


Рис. 3. Результаты моделирования первого этапа раздачи
 Fig. 3. Results of modeling the first stage of distribution

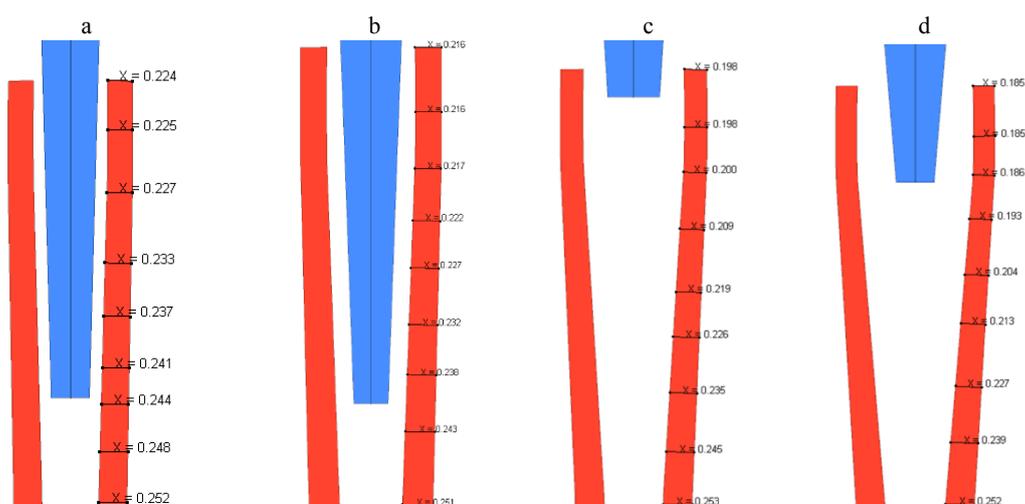


Рис. 4. Изменение размеров заготовки в процессе раздачи для переходов: а – 1; б – 2; с – 3; д – 4
 Fig. 4. Changing workpiece size in the process of distribution for the transition: a – 1; b – 2; c – 3; d – 4

Таблица 2

Толщина стенки и наружный диаметр возле кромки заготовки после переходов раздачи, полученные по результатам моделирования

Values of wall thickness and outer diameter near the edge of the workpiece after transitions of expansion, obtained from the results of modeling

Переход	Толщина стенки s , мм	Наружный диаметр $D_{\text{нар}}$, мм
Исходный	0,252	1,00
1	0,224	1,13
2	0,216	1,15
3	0,198	1,27
4	0,185	1,38

Далее представлены результаты численного моделирования процесса формирования обжимом сферического наконечника концентратора-волновода. Расчетная схема с указанием гео-

метрических параметров конструкции показана на рис. 5.

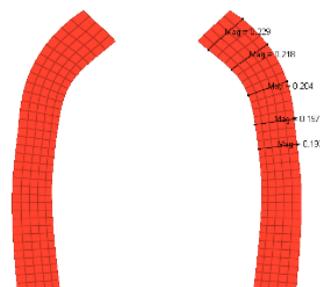


Рис. 5. Расчетная схема моделирования процесса формирования сферического наконечника концентратора-волновода с указанием толщины стенки

Fig. 5. Calculation scheme for modeling the process of forming a spherical tip of a concentrator-waveguide with an indication of wall thickness

В табл. 3 приведены основные параметры процесса формирования наконечника трубчатого волновода на различных этапах деформации.

Таблица 3

Основные параметры процесса формирования наконечника трубчатого концентратора-волновода
 Main parameters of the process for forming tip of the tubular concentrator-waveguide

Переход	Длина, мм		Изменение длины, мм	Максимальное усилие, Н	Диаметр, мм	
	исходная	конечная			исходный	конечный
1	8,000	7,872	0,128	35,8	1,00	1,13
2	7,872	7,830	0,052	40,3	1,13	1,15
3	7,830	7,676	0,154	78,2	1,15	1,27
4	7,676	7,506	0,170	98,4	1,27	1,38
Обжим	7,506	6,496	1,010	311,5	1,38	1,38

Материалы, оборудование и методы проведения экспериментальных исследований

Заготовками для изготовления экспериментальных образцов раздаточных пуансонов служили прутки из быстрорежущей стали Р6М5 ($d_{n1} = 0,63$ мм; $d_{n2} = 0,72$ мм; $d_{n3} = 0,86$ мм; $d_{n4} = 0,99$ мм).

Раздачу и обжим проводили на настольном микропрессе МР 120 Ргоххон. В качестве смазки использовали натриевое мыло. Раздача трубчатой заготовки происходила на глубину 3 мм с предварительным отжигом при температуре нагрева перед каждым переходом до 1100 °С с охлаждением на воздухе. Диаметр участка раздачи контролировали с помощью микрометра. Для получения сферического наконечника выполняли обжим трубчатой заготовки с использованием специальной матрицы с закругленным обжимным отверстием.

Для контроля формирующегося профиля после раздачи трубчатые заготовки ориентировались в горизонтальной плоскости. Затем образцы запрессовывались в термопластичную полимерную форму на электрогидравлическом прессе ЕСОРЕSS 100. Запрессованные образцы шлифовались на программируемом шлифовально-полировальном станке. Контроль размеров продольного и поперечного профилей

образцов проводили на металлографическом микроскопе «Альтами МЕТ 1Т».

Результаты экспериментальных исследований

Для измерения диаметра и толщины стенки заготовки после каждого из переходов раздачи были сделаны микрофотографии сечений исходного и деформированных образцов (рис. 6), а также продольного сечения сферического наконечника после обжима (рис. 7).

В табл. 4 представлены результаты измерения толщины стенки и диаметров полученных заготовок после каждого перехода раздачи.

По результатам измерения толщины стенки в зоне обжима установлено уменьшение ее толщины с 0,181 до 0,135 мм.

Для сопоставления данных, полученных в результате предварительного расчета, численного моделирования и экспериментальных исследований процесса раздачи, построены зависимости, характеризующие изменение толщины стенки заготовки от ее наружного диаметра (рис. 8). Представленные зависимости имеют схожий характер, что подтверждает корректность использования как метода предварительного расчета, так и численного моделирования при разработке технологии изготовления сферического наконечника концентратора-волновода методом раздачи и обжима.

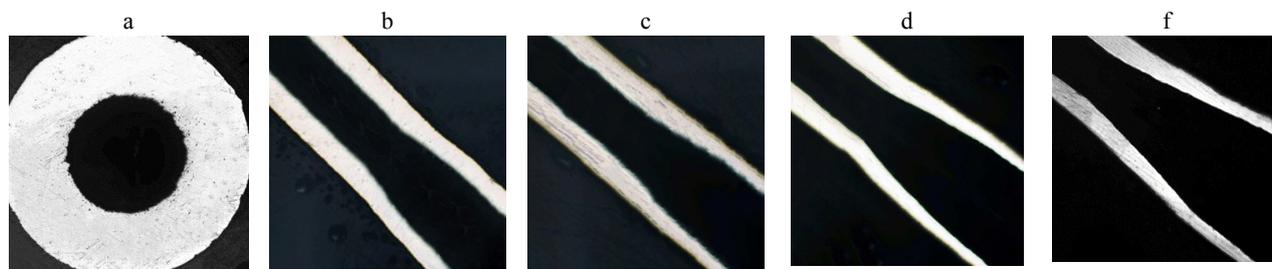


Рис. 6. Сечения исходного образца и образцов после каждого из переходов (×40): а – поперечное сечение исходного образца; б, с, d, f – переходы 1, 2, 3, 4 соответственно

Fig. 6. Sections of original sample and samples after each transition (×40): а – cross section of original sample; б, с, d, f – transitions 1, 2, 3, 4 respectively

Таблица 4

Результаты измерений профиля продольного сечения образцов
Measurements results of sample longitudinal section profile

Переход	Внутренний диаметр (диаметр пуансона) $d_{п2}$, мм	Толщина стенки $s_{п2}$, мм	Наружный диаметр $D_{нар2}$, мм	Коэффициент раздачи K_p
Исходный	0,494	0,248	0,990	–
1	0,632	0,231	1,094	1,16
2	0,722	0,224	1,170	1,10
3	0,863	0,206	1,275	1,13
4	0,989	0,181	1,351	1,09

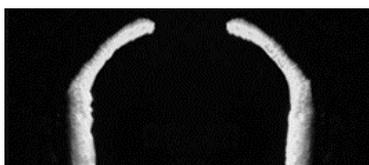


Рис. 7. Продольное сечение сферического наконечника ($\times 40$)

Fig. 7. Longitudinal section of spherical tip ($\times 40$)

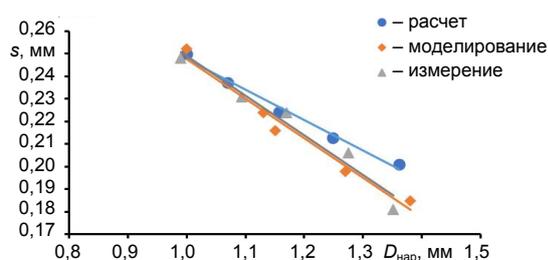


Рис. 8. Зависимости изменения толщины стенки заготовки от ее наружного диаметра в процессе раздачи, полученные в результате расчета, численного моделирования и экспериментальных исследований

Fig. 8. Dependences of change in wall thickness of workpiece on its outer diameter in the process of expansion, obtained as a result of calculation, numerical modeling and experimental research

Результаты экспериментальных исследований процессов раздачи и обжима с вращением пуансона и матрицы

В качестве альтернативного способа получения наконечника концентратора-волновода рассмотрена схема раздачи с вращением пуансона и обжима с вращением матрицы. Недостаток такой схемы – невозможность достижения требуемого класса шероховатости и точности [10]. При этом преимуществом является простота технологической оснастки для его реализации.

Исследовали силовые характеристики процесса раздачи и обжима с вращением пуансона и матрицы. Раздачу и обжим выполняли с применением настольного вертикально-сверлильного станка PROMA E-1516B/230. Трубчатую заготовку фиксировали в приспособлении, которое устанавливали на настольные весы на столике вертикально-сверлильного станка. Пуансоны для раздачи и матрицу обжима закрепляли в трехкулачковом патроне станка. Усилие раздачи оценивалось по максимальному значению показания весов в процессе раздачи и обжима. Для определения оптимальных режимов раздачи и обжима производили контроль усилия раздачи при различных значениях частоты вращения шпинделя станка ω . Частота ω регу-

лировалась с помощью коробки скоростей станка, где изменялось передаточное отношение редуктора. Результаты измерения усилий раздачи и обжима представлены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты измерения усилий раздачи и обжима
Results of measuring forces of distribution and crimping

Режим	Усилие, Н, при частоте вращения пуансона ω , об/мин				
	580	970	1280	1410	2270
Раздача, переход 1	29,02	29,31	20,69	26,72	29,02
Раздача, переход 2	27,87	28,16	22,98	31,32	27,29
Раздача, переход 3	29,31	29,31	24,13	30,45	25,28
Раздача, переход 4	29,59	31,89	28,16	36,20	31,32
Обжим	27,58	24,71	24,42	23,85	25,28

При частоте вращения пуансона менее 580 об/мин происходит потеря устойчивости трубчатой заготовки из-за превышения предельного усилия раздачи, более 2270 об/мин – интенсивный износ и нагрев трубчатой заготовки, в результате чего происходят значительное утонение стенки и разрыв при небольших усилиях раздачи.

На рис. 9 представлены зависимости изменения усилия раздачи трубчатой заготовки от частоты вращения пуансона с диаметра 1,00 мм на диаметр 1,36 мм при раздаче и дальнейшем обжиме. Как видно из зависимости, при раздаче трубчатой заготовки наиболее приемлемым является режим с частотой вращения 1280 об/мин, при котором достигаются наименьшие значения усилия раздачи на всех переходах. Оптимальный режим обжима трубчатой заготовки обеспечивается при частоте вращения матрицы 1410 об/мин.

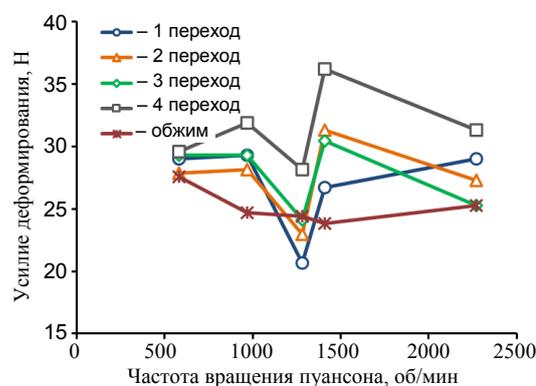


Рис. 9. Изменение усилия деформирования трубчатой заготовки при раздаче (1–4 переходы) и обжиме

Fig. 9. Change in deformation force of tubular billet during expansion (1–4 transitions) and crimping

ВЫВОДЫ

1. На основе метода конечных элементов в среде программного комплекса ABAQUS выполнено моделирование операций раздачи и обжима трубной заготовки, позволившее: оценить напряженно-деформированное состояние деформируемого конического участка заготовки, изменение толщины стенки в процессе формоизменения и рассчитать длину заготовки для оформления конического участка; установить закономерности влияния геометрических параметров на силовые режимы процесса раздачи; установить параметры режимов формообразования наконечника концентратора-волновода методом раздачи и обжима, обеспечивающие формирование требуемой геометрии.

2. Полученные результаты предварительного расчета, численного моделирования и экспериментальных исследований процессов формообразования наконечника концентратора-волновода раздачей и обжимом имеют схожие значения, что подтверждает корректность использования как метода предварительного расчета, так и численного моделирования при разработке технологии изготовления концентратора-волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Advanced Imaging in Acute and chronic Deep Vein Thrombosis / G. Y. Karande [et al.] // *Cardiovascular Diagnosis and Therapy*. 2016. Vol. 6, No 6. P. 493–507. <https://doi.org/10.21037/cdt.2016.12.06>.
2. Birchall, M. Internal Ultrasonic Pipe & Tube Inspection – IRIS [Electronic Resource] / M. Birchall, N. Sevciuc, C. Madureira // IV Conferencia Panamericana de END. Buenos Aires, Octubre 2007. Mode of access: <https://www.ndt.net/article/panndt2007/papers/149.pdf>.
3. Бокарев, И. Н. Современные проблемы тромбозов артерий и вен / И. Н. Бокарев, Л. В. Попова // *Практическая медицина*. 2014. Т. 9, № 6. С. 13–17.
4. Минченя, В. Т. Применение ультразвуковых концентраторов-волноводов трубчатого типа для устранения непроходимости кровеносных сосудов / В. Т. Минченя, И. Э. Адзерихо, А. Ю. Королёв // *Доклады БГУИР*. 2016. № 7. С. 300–303.
5. Способ разрушения венозных и артериальных тромбозов: пат. 3808 С1 Респ. Беларусь: МПК А61В17/22, А61В17/32 / А. Г. Мрочек, И. Э. Адзерихо. Опубл. 2001.03.30.
6. Пластическое деформирование и электрофизикохимическая обработка трубчатых медицинских концентраторов-волноводов / Дай Вэньци [и др.] // *Наука и техника*. 2020. Т. 19, № 6. С. 499–506. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-6-499-506>.

7. Аверкиев, Ю. А. Технология холодной штамповки: учебник для вузов по специальностям «Машины и технология обработки металлов давлением» и «Обработка металлов давлением» / Ю. А. Аверкиев, А. Ю. Аверкиев. М.: Машиностроение, 1989. 304 с.
8. Романовский, В. П. Справочник по холодной штамповке / В. П. Романовский. 6-е изд., перераб. и доп. Л.: Машиностроение, 1979. 520 с.
9. Фокин, В. Г. Метод конечных элементов в механике деформируемого твердого тела: учеб. пособие / В. Г. Фокин. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. 131 с.
10. Теория и практика изготовления элементов трубопроводов летательных аппаратов / С. И. Феоктистов [и др.]. Комсомольск-на-Амуре, КнАГТУ, 2013. 92 с.

Поступила 27.01.2021

Подписана в печать 23.03.2021

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Karande G. Y., Hedgire S. S., Sanchez Y., Baliyan V., Mishra V., Ganguli S., Prabhakar A. M. (2016) Advanced Imaging in Acute and Chronic Deep Vein Thrombosis. *Cardiovascular Diagnosis and Therapy*, 6 (6), 493–507. <https://doi.org/10.21037/cdt.2016.12.06>.
2. Birchall M., Sevciuc N., Madureira C. (2007, October) Internal Ultrasonic Pipe & Tube Inspection – IRIS. *IV Conferencia Panamericana de END*. Available at: <http://www.ndt.net/article/panndt2007/papers/149.pdf>.
3. Bokarev I. N., Popova L. V. (2014) Modern Problems of Arterial and Venous Thrombosis. *Prakticheskaya Meditsina = Practical Medicine*, 9 (6), 13–17 (in Russian).
4. Minchenya V. T., Adzerikho I. E., Korolyov A. Yu. (2016) Application of Tube-Type Ultrasonic Concentrators-Waveguides to Eliminate Obstruction of Blood Vessels. *Doklady Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta Informatiki i Radioelektroniki = Doklady BGUIR*, (7), 300–303 (in Russian).
5. Mrochek A. G., Adzerikho I. E. (2001) *Method of Destruction of Venous and Arterial Thromboemboli*. Patent No 3808 C1 Republic of Belarus (in Russian).
6. Dai Wenqi, Aliakseyeu Yu. G., Korolyov A. Yu., Budnitskiy A. S. (2020) Plastic Deformation and Electrophysicochemical Treatment of Tubular Medical Concentrator Waveguides. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, 19 (6), 499–506. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-6-499-506> (in Russian).
7. Averkiev Yu. A., Averkiev A. Yu. (1989) *Cold Stamping Technology*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 304 (in Russian).
8. Romanovskii V. P. (1979) *Handbook of Cold Stamping*. 6th ed. Leningrad, Mashinostroenie Publ. 520 (in Russian).
9. Fokin V. G. (2010) *Finite Element Method in Solid Mechanics*. Samara, Publishing House of Samara State Technical University. 131 (in Russian).
10. Feoktistov S. I., Maryin B. N., Maryin S. B., Kolykhalov D. G. (2013) *Theory and Practice of Manufacturing Elements of Aircraft Pipelines*. Komsomolsk-on-Amur, Publishing House of Komsomolsk-on-Amur State Technical University. 92 (in Russian).

Received: 27.01.2021

Accepted: 23.03.2021

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-109-120>

УДК 538.951, 53.092

Эволюция микроструктуры и механических свойств наноструктурированных пленок NiFe под действием температурной обработки

Чл.-кор. НАН Беларуси, докт. физ.-мат. наук В. М. Федосюк¹⁾

¹⁾ГНПО «Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению»

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Наноструктурированные пленки NiFe были синтезированы методом импульсного электролитического осаждения на кремнии с золотым подслоем, после чего подвергались температурной обработке при 373–673 К с целью изучения влияния термообработки на микроструктуру и механические свойства объектов исследования. Атомно-силовая микроскопия высокого разрешения позволила проследить этапы эволюции микроструктуры под действием термической обработки, включающие процесс нелинейного увеличения роста зерен и двухстадийную агломерацию. Показано, что с ростом температуры термообработки до 673 К размер зерна увеличивается с 68 до 580 нм по сравнению с исходным образцом, претерпевая процессы агломерации при температурах 100 и 300 °С. Механические свойства наноструктурированных пленок NiFe изучены методом наноиндентирования. Получены и проанализированы зависимости твердости модуля Юнга и значений сопротивления упругопластической деформации от глубины. Данный подход позволил выявить различия в поведении механических свойств поверхностного слоя и внутреннего объема пленки под действием различных температур термообработки, а также продемонстрировать противоположную реакцию разных слоев материала на повышение температуры. В результате анализа деформационных кривых наноиндентирования установлено, что гомогенизация поверхности в сочетании с активацией процессов окисления приводят к упрочнению приповерхностного слоя пленок NiFe. В то же время внутренний объем материала характеризуется нелинейным уменьшением твердости и модуля Юнга при росте температуры термообработки. Объяснение этого явления найдено в комплексном влиянии уменьшения количества межзеренных границ (вследствие увеличения среднего размера зерен с повышением температуры) и увеличения концентрации атомов золота, диффундирующих из подслоя более активно при росте температуры обработки пленок NiFe.

Ключевые слова: импульсное электроосаждение, термическая обработка, окисление, микроструктура поверхности, твердость, модуль Юнга, упругопластическая деформация

Для цитирования: Федосюк, В. М. Эволюция микроструктуры и механических свойств наноструктурированных пленок NiFe под действием температурной обработки / В. М. Федосюк // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 109–120. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-109-120>

Evolution of Microstructure and Mechanical Properties of Nanostructured NiFe Films under Influence of Heat Treatment

V. M. Fedosyuk¹⁾

¹⁾SSPA “Scientific-Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus”

Abstract. Nanostructured NiFe films were synthesized by pulsed electrolytic deposition on silicon with a gold sublayer, after which they have been subjected to temperature treatment at 373–673 K in order to study the effect of heat treatment on the microstructure and mechanical properties of the objects under study. High-resolution atomic force microscopy has made it possible to trace the stages of microstructure evolution under the influence of heat treatment, including the process of nonlinear

Адрес для переписки
Федосюк Валерий Михайлович
ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по материаловедению»
ул. П. Бровки, 19,
220072, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 322-27-91
fedosyuk@physics.by

Address for correspondence
Fedosyuk Valery M.
SSPA “Scientific-Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus”
19, P. Brovki str.,
220072, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 322-27-91
fedosyuk@physics.by

increase in grain growth and two-stage agglomeration. It is shown that with an increase in heat treatment temperature to 673 K, the grain size increases from 68 to 580 nm in comparison with the initial sample, undergoing agglomeration processes at temperatures of 100 and 300 °C. The mechanical properties of nanostructured NiFe films have been studied by the nanoindentation method. The dependences of the hardness of Young's modulus and the values of the resistance to elastoplastic deformation on depth have been obtained and analyzed in the paper. This approach has permitted to reveal differences in the behavior of the mechanical properties of the surface layer and the internal volume of the film under the action of different heat treatment temperatures, as well as to demonstrate the opposite reaction of different material layers to an increase in temperature. As a result of a thorough analysis of the deformation curves of nanoindentation, it has been found that the homogenization of the surface in combination with the activation of oxidation processes leads to the strengthening of near-surface layer of NiFe films. At the same time, the internal volume of the material is characterized by a nonlinear decrease in hardness and Young's modulus with an increase in the heat treatment temperature. The explanation for this phenomenon has been found in the complex effect of a decrease in the number of grain boundaries (due to an increase in the average grain size with increasing temperature) and an increase in the concentration of gold atoms diffusing from the sublayer more actively with an increase in the processing temperature of NiFe films.

Keywords: pulse electrodeposition, heat treatment, oxidation, surface microstructure, hardness, Young's modulus, elastoplastic deformation

For citation: Fedosyuk V. M. (2021) Evolution of Microstructure and Mechanical Properties of Nanostructured NiFe Films under Influence of Heat Treatment. *Science and Technique*. 20 (2), 109–120. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-109-120> (in Russian)

Введение

Магнитомягкие пленки сплава NiFe, или пермаллоя, находят широкое применение благодаря оптимальному балансу электрических, магнитных и механических свойств [1–3]. Пленки пермаллоя широко используются в качестве функциональных магнитных материалов в датчиках магнитного поля (эффекты гигантского и аморфного магнитосопротивления) [4, 5], устройствах магнитной записи [6], а также материала для элементов спинтроники и электромагнитных экранов для защиты функциональной электроники от постоянных магнитных полей и электромагнитных излучений [7]. Сплавы NiFe также обладают хорошей коррозионной стойкостью [8], адгезией к различным типам подложек [6, 8] и высокими механическими свойствами (твердость в макро- и наномасштабе, модуль упругости, износо- и трещиностойкость, сопротивление пластической деформации) [9]. Благодаря сказанному выше пермаллой с высоким содержанием никеля является прекрасным материалом для использования в качестве функционального покрытия, обеспечивающего как механическую защиту, так и защиту от электромагнитных и магнитных полей.

Метод электролитического осаждения считается привлекательным по ряду причин: невысокая стоимость оборудования и расходных материалов, простота управления структурой

и составом в процессе синтеза, возможность нанесения на детали сложной формы (что особенно актуально при необходимости наносить защитные покрытия на деталь без усложнения конструкции). Однако все еще не до конца решенной задачей для осажденных электролитически пленок являются высокие внутренние напряжения, которые тем больше, чем толще пленка и сложнее форма подложки. Внутренние напряжения могут ухудшить не только механические характеристики, но и магнитные и электрические свойства.

Существует ряд способов уменьшения внутренних напряжений в электроосажденных пленках. Например, уменьшение плотности тока уменьшает напряжения в системе NiFe [10], однако одновременно изменяется структура, падает скорость роста пленки и содержание железа в сплаве. Имеются специально разработанные добавки к электролиту, которые способны влиять на структуру сплава в процессе синтеза, снижая внутренние напряжения [11]. Изменение концентрации основных компонентов также используется для снятия напряжения. Например, для увеличения подвижности ионов металла во время осаждения сплава NiFe и в то же время скорости роста пленки в состав электролита может быть добавлен NiCl. Авторы [12] показали, что чрезмерная концентрация ионов хлора в растворе приводит к образованию сплава с низкой коэрцитивной силой и высокими внутренними напряжениями.

Наиболее перспективным способом уменьшения внутренних напряжений остается термическая обработка [13–15], но на воздухе она активирует поверхностное окисление металлов. Считается, что слой естественного оксида не влияет на механические свойства [16, 17]. Однако в отдельных работах показано, что специально созданный оксидный слой может не только упрочнять, но даже выполнять функцию износостойкого квазипокрывтия [18]. Анализ литературы выявил, что нет глубоких исследований в области влияния оксидного слоя, получаемого в процессе термической обработки, на механические свойства пленок NiFe. Кроме того, отсутствуют исследования, позволяющие разделить влияние термообработки на поверхностный слой и внутренний объем покрытий NiFe.

Цель исследований – изучение влияния термической обработки на микроструктуру и механические свойства пленок NiFe, нанесенных на Si с подслоем Au. Был выбран температурный диапазон от 373 до 673 К, поскольку, согласно [18, 19], в этом диапазоне происходят критические изменения механических и магнитных свойств. Термическая обработка при более высоких температурах приводит к изменениям кристаллической решетки [13–15] и полиморфным превращениям. Даже относительно низкие температуры могут положительно влиять на твердость, модуль Юнга и сопротивление упругопластической деформации. Кроме того, изучены различия в поведении поверхностного слоя и внутреннего объема материала, объяснена их противоположная реакция на температурную обработку.

Материалы и методы исследований

Пленки NiFe были получены методом электролитического осаждения. В качестве подложки для осаждения пленок NiFe использовался монокристаллический кремний кристаллографической ориентации (100). Для обеспечения проводимости подложки, требуемой для электроосаждения, на кремний магнетронным методом наносили слой золота толщиной 100 нм. Состав электролита, используемого для получе-

ния пленок, представлен в табл. 1. Уровень pH раствора поддерживался в диапазоне 2,3–2,5, а температура – в пределах (32 ± 1) °С.

Таблица 1

Состав электролита для получения пленки NiFe
Electrolyte composition for NiFe film production

Компонент	Концентрация, г/л
NiSO ₄	210
MgSO ₄	60
FeSO ₄	15
NiCl ₂	20
H ₃ BO ₃	30
C ₇ H ₅ NO ₃ S	1

Для формирования зеренной структуры пленки использовалось импульсное электроосаждение. Малая длительность импульса (10^{-3} с) приводит к образованию материала с мелким размером зерна [20, 21]. Это связано с тем, что зерна зарождаются и растут в течение времени импульса (10^{-3} с), и процесс роста останавливается после окончания подачи тока. Плотность тока при осаждении 25 мА/см², время осаждения 300 с (150 с без учета пауз). Общая толщина пленки NiFe 600 нм. Все образцы получали на одной Si-пластине за один цикл осаждения. Перед термообработкой пластину разделяли на отдельные образцы. Термообработку проводили при температурах 373, 473, 573, 673 К на воздухе. Образцы нагревали со скоростью 100 К/ч, выдерживали при максимальной температуре в течение 1 ч, и затем естественным образом они охлаждались до комнатной температуры.

Состав полученной пленки оценивали методом рентгеновского энергодисперсионного микроанализа на анализаторе AZtecLive Advanced with Ultim Max 40 (Oxford Instruments), являющемся дополнительным детектором на сканирующем электронном микроскопе. Микроструктуру исходного образца исследовали с помощью сканирующей электронной микроскопии на приборе Zeiss EVO 10 в режиме вторичных электронов при ускоряющем напряжении 20 кВ. Изменение микроструктуры пленок после температурной обработки проводили с использованием режима атомно-силовой микроскопии на наноинденторе Triboindenter TI 950 Hysitron.

Исследования кристаллической структуры выполняли методом рентгеноструктурного анализа на порошковом дифрактометре Empyrean (PANalytical) на Cu-K α -излучении в фокусировке Брэгга – Brentано в диапазоне углов $2\theta = (40^\circ - 100^\circ)$. Значения размеров областей когерентного рассеяния оценивали методом Вильямсона – Холла по всем присутствующим на рентгенограмме пикам от ГЦК твердого раствора.

Исследование механических характеристик проводили с помощью наноиндентора Triboindenter TI 950 Hysitron путем внедрения алмазной пирамиды Берковича с одновременной регистрацией кривых деформации. Глубина внедрения индентора варьировалась от 5 до 50 нм. Нагружение материалов осуществляли по схеме «10–10» (нагружение 10 с, разгрузка 10 с). Калибровку наноиндентора выполняли непосредственно перед экспериментом, для чего использовали стандартный образец полированного плавленого кварца с известными постоянными значениями твердости и модуля Юнга. Калибровку проводили в диапазоне глубин внедрения от 2 до 100 нм. Микромеханические свойства рассчитывали по методу Оливера – Фарра [22].

Результаты исследований и их обсуждение

Изображение микроструктуры поверхности исходного образца NiFe представлено на рис. 1. Поверхность пленки имеет явно выраженную зеренную структуру со склонностью к агломе-

рации. Размеры зерен варьируются в диапазоне от 50 до 80 нм. Соотношение никеля и железа в составе полученной пленки исследовали с помощью энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии. Спектр, соответствующий исходному образцу, представлен на рис. 2. Установлено, что сплав содержит 75,9 ат. % никеля и 24,1 ат. % железа.

С помощью метода рентгеновской дифракции установлено, что пленка NiFe представляет собой однофазный изоструктурный сплав, описываемый кубической пространственной группой Fm $\bar{3}m$ (№ 225); параметр элементарной ячейки a составил 3,567 Å, а размер области когерентного рассеяния рентгеновских лучей 5 нм. Оценки, проведенные методом Уильямсона – Холла, показали, что основным фактором, обуславливающим сильные уширения рентгеновских пиков, является малый размер областей когерентного рассеяния.

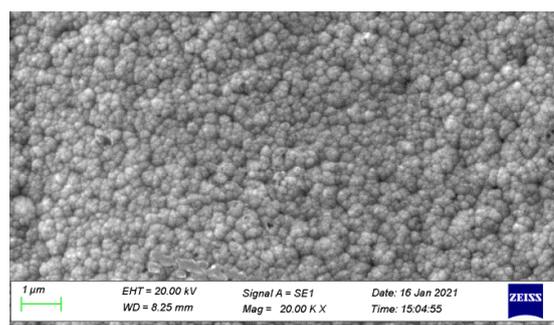


Рис. 1. Микроструктура исходной пленки NiFe, полученная с помощью сканирующей электронной микроскопии

Fig. 1. Microstructure of initial NiFe film obtained using scanning electron microscopy

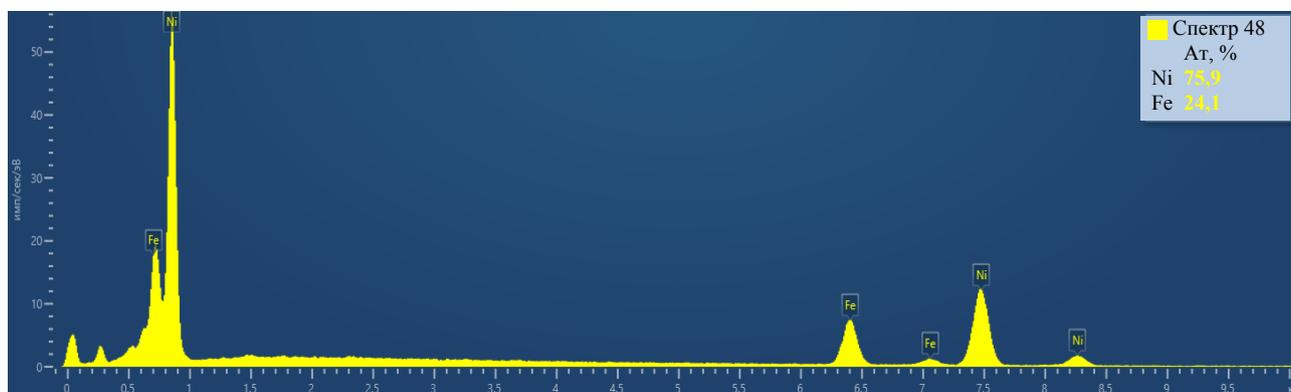


Рис. 2. Рентгеновский энергодисперсионный спектр исходной пленки NiFe

Fig. 2. X-ray energy dispersive spectrum of initial NiFe film

Соответствующая рентгенограмма представлена на рис. 3.

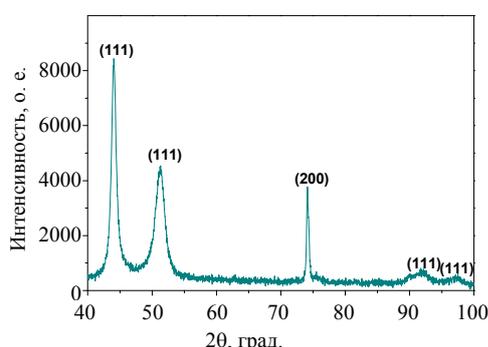


Рис. 3. Рентгенограмма исходной пленки NiFe
Fig. 3. X-ray diffraction pattern of initial NiFe film

Изображения микроструктуры поверхности исходной пленки NiFe и пленок после термообработки при различных температурах показаны на рис. 4. Размер изображений – 10×10 мкм². Для каждого образца ниже добавлено увеличенное изображение характерного участка размером 3×3 мкм². Изображения были получены сразу после синтеза или термообработки без удаления оксида. Анализ показал, что структура поверхности исходного образца наиболее однородна. Размеры зерен от 40 до 100 нм, средний – 67 нм. Следует также отметить, что

нанометровые зерна формируют агломераты с характерными латеральными размерами порядка 200–600 нм, что, вероятно, является следствием высокой поверхностной энергии наноразмерных частиц.

Агломерация становится более выраженной после температурной обработки при 373 К. Агломераты имеют размеры от 300 нм до 1 мкм; каждый из них содержит несколько десятков нанометровых зерен, что хорошо видно на верхнем увеличенном фрагменте рис. 4. На нижнем фрагменте изображен очаг гомогенизации. Кроме агломерации зерен наблюдается увеличение их размеров. Так, средний размер зерна для пленки NiFe после температурной обработки при 373 К составил 93 нм. Динамика изменения размера зерна и их агломерация схематично показаны в нижней части рис. 4.

При температуре термической обработки 473 К процесс агломерации завершился и поверхность состоит из зерен со средним размером 131 нм, не демонстрирующих склонности к объединению, т. е. они равномерно распределены по поверхности.

При дальнейшем повышении температуры до 573 К начинается вторая стадия агломерации, которая выглядит завершенной для образца после термообработки при 673 К.

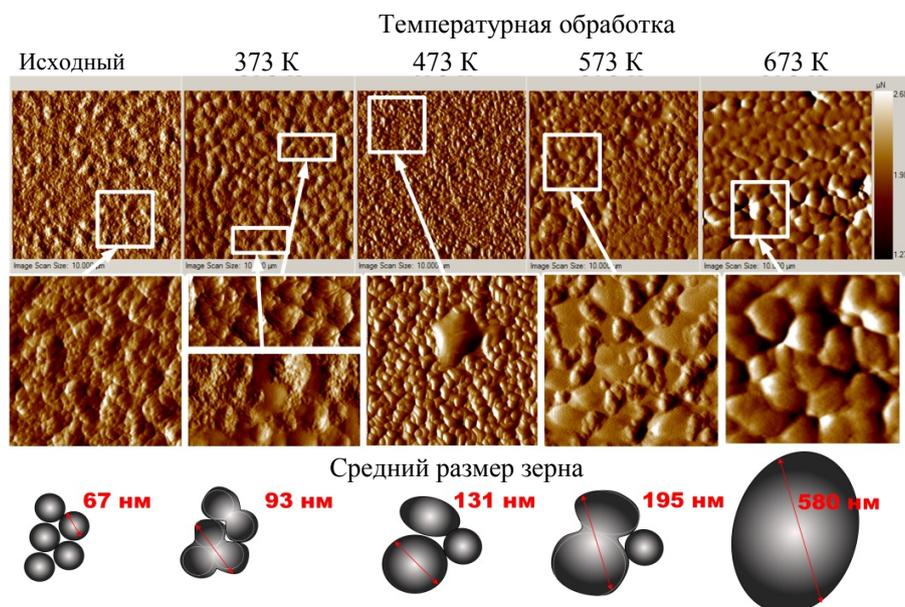


Рис. 4. Изображения микроструктуры поверхности исходной пленки NiFe и пленок после термической обработки при температурах 373, 473, 573 и 673 К

Fig. 4. Images of surface microstructure of initial NiFe film and films after heat treatment at temperatures of 373, 473, 573 and 673 K

Пленка после термической обработки при температуре 573 К характеризуется большим разбросом размеров зерен (от 100 нм до 2 мкм), при этом средний размер составил 195 нм. Повышение температуры до 673 К приводит к значительному увеличению размера зерен до 580 нм. Таким образом, эволюция микроstructures пленок NiFe в процессе повышения температуры термической обработки до 673 К приводит к увеличению среднего размера зерна от 67 до 580 нм и включает двухстадийную агломерацию.

Результаты исследования механических свойств пленок NiFe с помощью метода наноиндентирования в виде зависимостей от глубины внедрения индентора представлены на рис. 5. Каждая точка на графиках изменения твердости и модуля Юнга является усредненным значением для трех-пяти измерений. Относительно высокая погрешность измерения (в некоторых случаях около 10 %) связана со значительным различием механического отклика материала при прохождении индентора через границу и центр зерна. Твердость (рис. 5a) и модуль Юнга (рис. 5b) – два основных параметра, которые характеризуют механические свойства материалов. А улучшение этих свойств остается

актуальной задачей материаловедения. Однако следует отметить, что важно не столько увеличение отдельных показателей, сколько оптимальный баланс твердости и упругости. По этой причине широко используется соотношение твердости и модуля Юнга (H/E) (рис. 5c), которое характеризует устойчивость материала при упругопластической деформации. Максимально возможное значение сопротивления упругопластической деформации ($H/E = 0,1$) пока не было достигнуто для реальных материалов.

Результаты наноиндентирования показывают, что термическая обработка может оказывать противоположное влияние на поверхностный слой и внутренний объем материала. Анализ графиков подтверждает, что твердость и модуль Юнга исходного образца на поверхности и в объеме достаточно близки: $H = (8,64 \pm 0,63)$ ГПа и $E = (183,6 \pm 8,0)$ ГПа на глубине 10 нм и $H = (7,51 \pm 0,52)$ ГПа и $E = (196,8 \pm 74,0)$ ГПа на глубине 50 нм. Повышение температуры термообработки до 673 К приводит к нелинейному увеличению модуля Юнга до $(256,1 \pm 9,3)$ ГПа и твердости до $(11,1 \pm 0,68)$ ГПа на поверхности (10 нм) и одновременному уменьшению этих параметров в объеме пленки: на глубине 50 нм $E = (165,1 \pm 9,3)$ ГПа и $H = (5,88 \pm 0,58)$ ГПа.

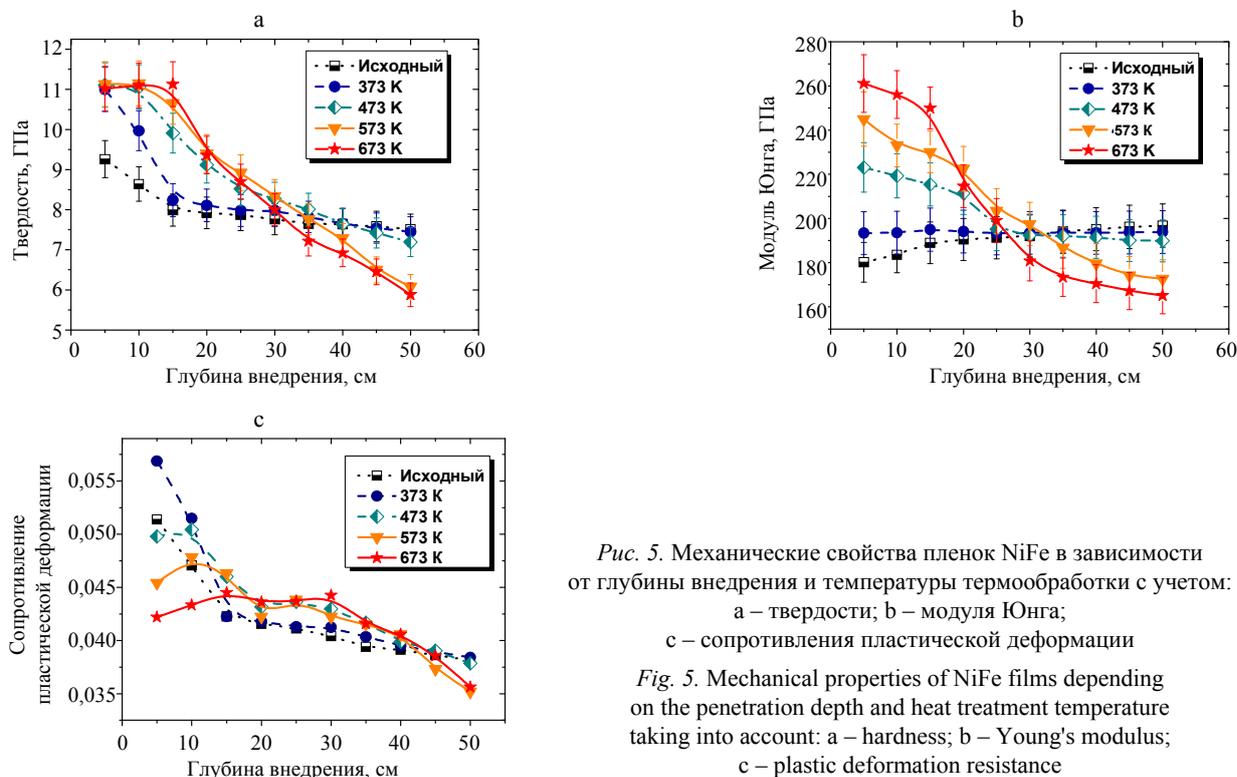


Рис. 5. Механические свойства пленок NiFe в зависимости от глубины внедрения и температуры термообработки с учетом: а – твердости; б – модуля Юнга;

с – сопротивления пластической деформации

Fig. 5. Mechanical properties of NiFe films depending on the penetration depth and heat treatment temperature taking into account: а – hardness; б – Young's modulus; с – plastic deformation resistance

Отношение H/E (рис. 5с), или сопротивление упругопластической деформации, продемонстрировало тенденцию к уменьшению для всех пленок NiFe. При этом следует отметить, что максимальное значение H/E на поверхности наблюдается для пленки, прошедшей термообработку при 373 К (0,057), а минимальное – у пленки после самой высокотемпературной термообработки (0,042). Рассматривая полученные на глубине 50 нм значения соотношения H/E , можно отметить, что температурная обработка при $T \leq 475$ К не приводит к изменению сопротивления пластической деформации в объеме материала: $H/E = 0,037–0,038$. Повышение температуры до 573 К уменьшает величину соотношения твердости и модуля Юнга до 0,035.

Описанное выше сложное поведение механических характеристик пленок NiFe может быть объяснено комплексным конкурирующим влиянием трех различных процессов, активируемых температурной обработкой как в объеме материала, так и на поверхности, а именно:

- увеличением размера зерна, сопровождающимся уменьшением количества межзеренных границ;
- формированием поверхностного оксидного слоя;
- термически активированной диффузией атомов золота из подслоя в пленку NiFe.

Традиционно считается, что границы зерен являются барьером для распространения дислокаций и препятствуют упругопластической деформации. Однако также показано, что границы могут играть альтернативную роль и быть

источниками дислокаций [23]. Следует отметить, что второй случай, когда границы – это источник дислокаций, как правило, справедлив для хорошо отожженных кристаллов с малым количеством дефектов. Для настоящей работы более применим первый случай, когда границы являются преградами на пути распространения дефектов. Таким образом, твердость и модуль упругости должны уменьшаться по мере увеличения размера зерна, т. е. с повышением температуры обработки, что наблюдается в объеме материала. На поверхности пленок отмечена противоположная тенденция – изменение размера зерен не является лимитирующим фактором на поверхности.

Очевидно, что термообработка на воздухе активирует образование оксидного слоя. Как правило, оксидный слой металлов характеризуется большей твердостью и хрупкостью по сравнению с неокисленным материалом. На рис. 6 изображены типичные кривые наноиндентирования исходной пленки NiFe, представляющие собой зависимость глубины внедрения индентора от приложенной к нему нагрузки. В первом приближении твердость зависит от угла наклона кривой нагружения. Увеличенный фрагмент нагрузочной части кривых (рис. 6с) позволяет заметить изменение наклона графика. Наклон соответствует переходу индентора из более «твердого» слоя в «мягкий». Таким образом, можно предположить, что толщина слоя оксида составляет около 6 нм для пленки NiFe, не подвергавшейся температурной обработке.

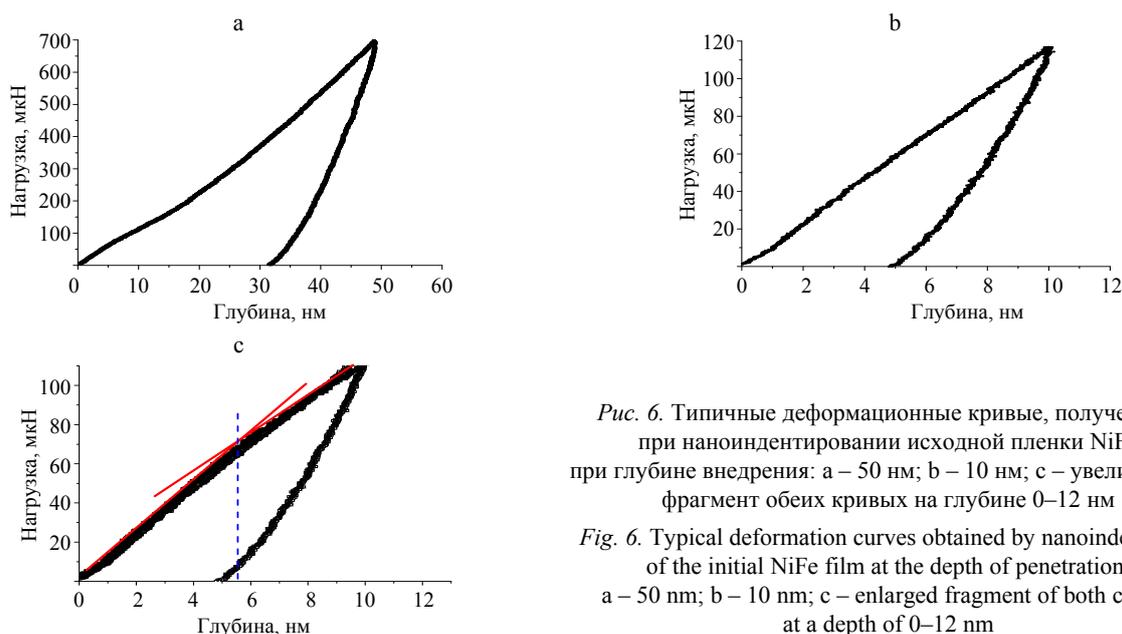


Рис. 6. Типичные деформационные кривые, полученные при наноиндентировании исходной пленки NiFe при глубине внедрения: а – 50 нм; б – 10 нм; в – увеличенный фрагмент обеих кривых на глубине 0–12 нм

Fig. 6. Typical deformation curves obtained by nanoindentation of the initial NiFe film at the depth of penetration: а – 50 nm; б – 10 nm; в – enlarged fragment of both curves at a depth of 0–12 nm

После термообработки при температуре 373 К на кривых наноиндентирования появляется «ступенька» на глубине 5–7 нм (рис. 7). Подобное поведение (разрывы в виде «ступеньки» в кривой нагружения) также характерно для процесса образования трещин при внедрении индентора. Но в данном случае кроме ступеньки наблюдается визуально различимое изменение угла наклона кривой нагружения до и после разрыва. Поэтому можно считать, что толщина оксидного слоя после термообработки при 373 К составляет 5–7 нм. Подобное явление описано в [14].

Аналогичное изменение наклона кривой после так называемой ступеньки наблюдается

на глубине примерно 8–10 нм на кривых нагружения пленки после термообработки при 473 К (рис. 8). На рис. 9 изображены типичные кривые наноиндентирования для пленки NiFe, подвергавшейся термообработке при 573 К, для которой положение «ступеньки» сместилось на глубину 14–18 нм. То есть можно считать, что при термообработке при 573 К в течение 1 ч формируется оксидный слой толщиной 14–18 нм. Таким образом, детальный анализ кривых наноиндентирования позволит косвенным методом, но с высокой точностью определить толщину образованного в результате термообработки слоя оксида.

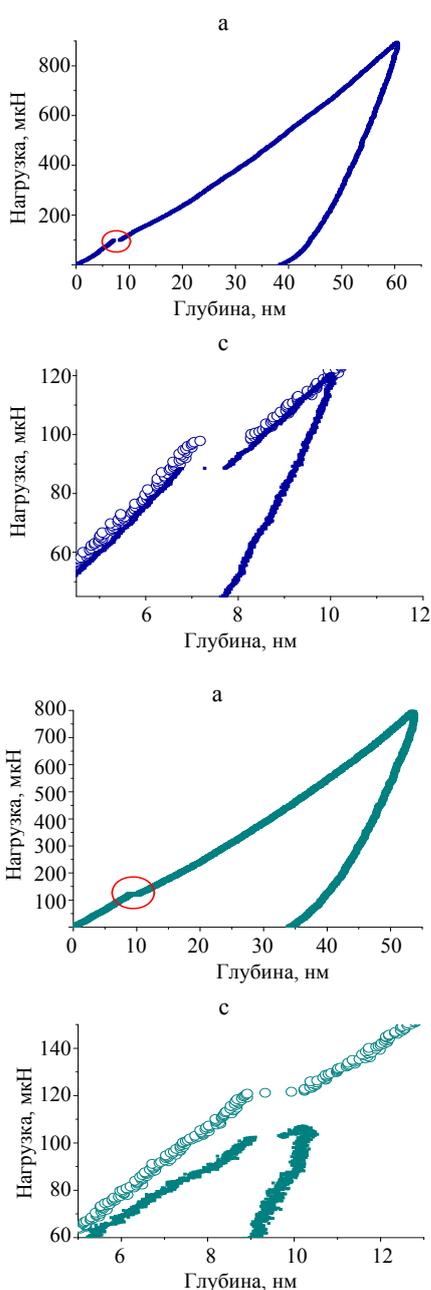


Рис. 7. Типичные деформационные кривые, полученные при наноиндентировании пленки NiFe после температурной обработки при 373 К для глубины внедрения: а – 50 нм; б – 10 нм; с – увеличенный фрагмент обеих кривых на глубине 5–12 нм

Fig. 7. Typical deformation curves obtained by nanoindentation of the NiFe film after heat treatment at 373 K for depth of implementation: а – 50 nm; б – 10 nm; с – enlarged fragment of both curves at a depth of 5–12 nm

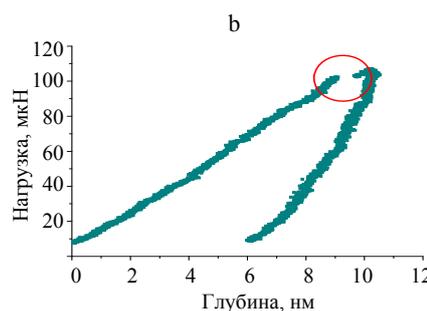


Рис. 8. Типичные деформационные кривые, полученные при наноиндентировании пленки NiFe после температурной обработки при 473 К для глубины внедрения: а – 50 нм; б – 10 нм; с – увеличенный фрагмент обеих кривых на глубине 5–12 нм

Fig. 8. Typical deformation curves obtained by nanoindentation of NiFe film after temperature treatment at 473 K for the penetration depth: а – 50 nm; б – 10 nm; с – enlarged fragment of both curves at a depth of 5–12 nm

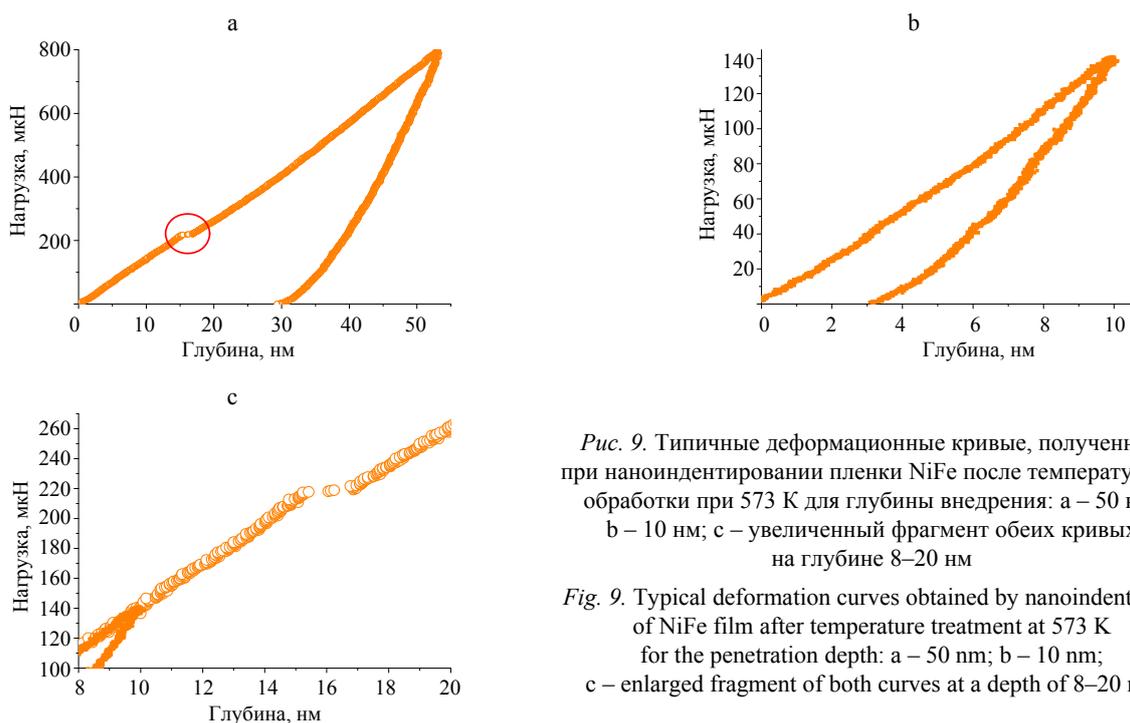


Рис. 9. Типичные деформационные кривые, полученные при наноиндентировании пленки NiFe после температурной обработки при 573 К для глубины внедрения: а – 50 нм; б – 10 нм; с – увеличенный фрагмент обеих кривых на глубине 8–20 нм

Fig. 9. Typical deformation curves obtained by nanoindentation of NiFe film after temperature treatment at 573 K for the penetration depth: a – 50 nm; b – 10 nm; c – enlarged fragment of both curves at a depth of 8–20 nm

Типичные деформационные кривые для пленки NiFe после термообработки при температуре 673 К представлены на рис. 10. На всех проанализированных графиках рис. 10 отсутствуют разрывы, хотя на рис. 10с заметно поэтапное изменение наклона. Вероятно, это указывает на отсутствие четкой границы раздела между оксидным слоем и пленкой.

По результатам анализа кривых наноиндентирования можно сделать вывод, что твердость приповерхностного слоя сильно зависит от толщины оксида. Так, на глубине 10 нм твердость исходного образца составляет 8,6 ГПа при толщине оксида около 5,0 нм, а пленка после термообработки при 373 К характеризуется твердостью 9,8 ГПа при толщине 5–7 нм.

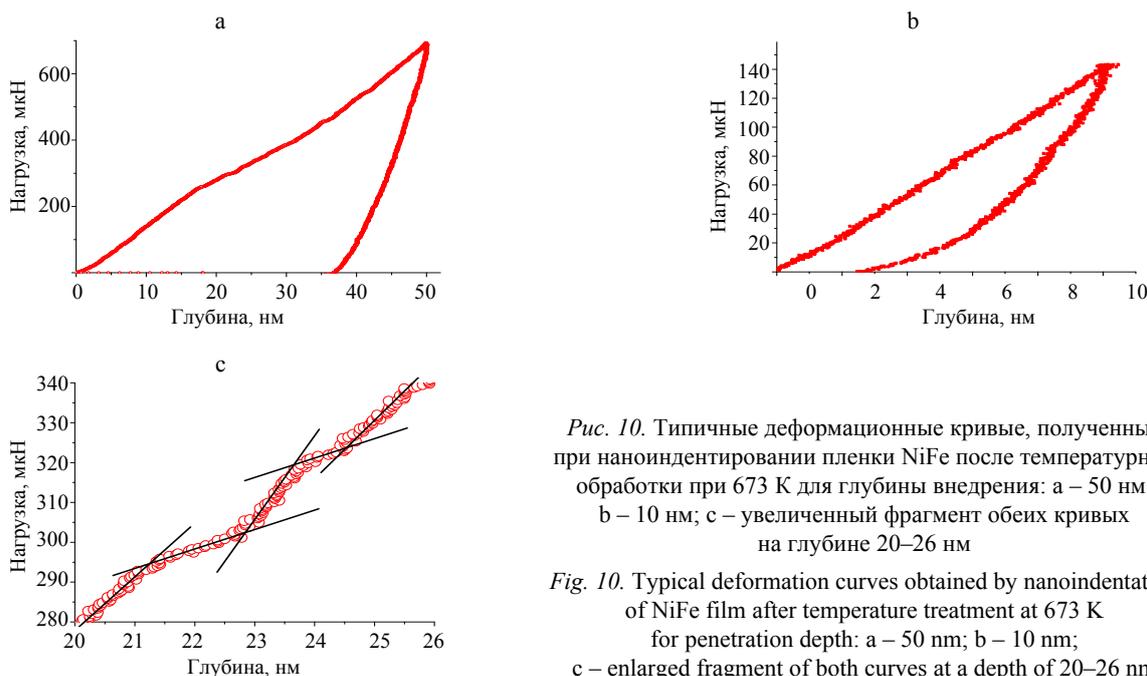


Рис. 10. Типичные деформационные кривые, полученные при наноиндентировании пленки NiFe после температурной обработки при 673 К для глубины внедрения: а – 50 нм; б – 10 нм; с – увеличенный фрагмент обеих кривых на глубине 20–26 нм

Fig. 10. Typical deformation curves obtained by nanoindentation of NiFe film after temperature treatment at 673 K for penetration depth: a – 50 nm; b – 10 nm; c – enlarged fragment of both curves at a depth of 20–26 nm

Термообработка при температуре 473 К и выше вызвала образование оксидного слоя толщиной, равной и превышающей 10 нм, поэтому при наноиндентировании на эту глубину получены очень близкие значения твердости 11,0–11,1 ГПа, поскольку внедрение ограничивается оксидным слоем. Тем не менее полученное значение твердости нельзя рассматривать как твердость оксида, поскольку рекомендуемая глубина индентирования для получения достоверного значения не должна превышать 10 % от толщины исследуемого материала для исключения влияния подслоя. Причина увеличения модуля Юнга при повышении температуры заключается в том, что оксид представляет собой сплошную тонкую пленку на мягком подслое NiFe.

Очевидно, что высокая температура увеличивает подвижность атомов и активизирует процессы диффузии внутри материала и на границе разделов слоев. Повышение температуры термообработки может приводить также к увеличению диффундирующих из подслоя атомов золота, которые будут являться дефектами и способствовать распространению дислокаций при пластической деформации. На основе оценок, сделанных в [24], можно предположить, что концентрация примесных атомов может приближаться к нескольким процентам после термообработки при $T \geq 573$ К. Высокая концентрация дефектов (или примесных атомов) в сочетании с увеличением размера зерна приводит к снижению механических свойств в объеме NiFe. Кроме того, атомы примесей могут уменьшать твердость поверхности, ограничивая упрочняющий эффект оксидного слоя. Это может служить причиной прекращения увеличения твердости пленок NiFe, подвергшихся температурной обработке при $T > 473$ К.

ВЫВОДЫ

1. Наноструктурированные пленки NiFe (75,9 ат. % Ni и 24,1 ат. % Fe) получены на монокристаллическом кремнии с подслоем золота методом импульсного электроосаждения. Ультракороткая длительность импульса (10^{-3} с) приводила к формированию пленки с составом зерна размером 58 нм. Пленки подвергались

термообработке на воздухе в диапазоне температур от 373 до 637 К.

2. Методом атомно-силовой микроскопии изучены этапы эволюции микроструктуры, включающие двухстадийную агломерацию. Установлено, что размер зерна под действием температуры нелинейно увеличивался до 580 нм.

3. Механические свойства исследовали с помощью наноиндентирования на глубине от 5 до 50 нм. Показано, что термообработка оказывает противоположное влияние на твердость и модуль Юнга поверхностного слоя и внутреннего объема пленок NiFe. Повышение температуры термообработки до 673 К приводит к увеличению твердости от 8,64 до 11,1 ГПа и модуля Юнга от 183,6 до 256,1 ГПа на глубине 10 нм. Во внутреннем объеме материала (глубина 50 нм) наблюдалось уменьшение твердости от 7,51 до 5,4 ГПа и модуля упругости от 198,0 до 160,0 ГПа.

4. Комплексный анализ деформационных кривых наноиндентирования позволил установить и разграничить влияние термоактивируемых процессов на механические свойства пленок. Показано, что увеличение размера зерен с одновременным уменьшением количества межзеренных границ приводит к уменьшению количества барьеров для распределения дислокаций при механической деформации и ухудшению механических характеристик внутреннего объема материала.

4. Косвенно определена толщина формируемого в процессе термообработки оксидного слоя и продемонстрировано его упрочняющее влияние на поверхность пленки. Экспериментально установлено, что термообработка наноструктурированных пленок NiFe при температуре 473 К приводит к увеличению сопротивления упругопластической деформации поверхностного слоя без ухудшения механических характеристик внутреннего объема материала за счет умеренного окисления поверхности и уменьшения внутренних напряжений наноразмерных зерен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Properties and Applications for Electrodeposited Nanocrystalline Fe–Ni Alloys / J. L. McCrea [et al.] // Reviews on Advanced Materials Science. 2003. Vol. 5. P. 252–258.

2. Electrodeposition of Ni–Fe Alloys, Composites, and Nano Coatings – a Review / V. Torabinejad [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds*. 2017. Vol. 691. P. 841–859. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2016.08.329>.
3. Koch, C. C. Structural Nanocrystalline Materials: an Overview / C. C. Koch // *Journal of Materials Science*. 2007. Vol. 42, No 5. P. 1403–1414. <https://doi.org/10.1007/s10853-006-0609-3>.
4. Nicolaescu, D. Modelling of a Magnetic Sensor Based on Vacuum Field Emission / D. Nicolaescu, V. Filip // *Applied Surface Science*. 1996. Vol. 94–95. P. 87–93. [https://doi.org/10.1016/0169-4332\(95\)00355-x](https://doi.org/10.1016/0169-4332(95)00355-x).
5. Highly Sensitive and Selective Toluene Sensor of Bimetallic Ni/Fe–MOFs Derived Porous NiFe₂O₄ Nanorods / Y. Zhan [et al.] // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2019. Vol. 58, No 22. P. 9450–9457. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.9b01497>.
6. Anisotropic Ni–Fe–B Films with Varying Alloy Composition for High Frequency Magnetics on Silicon Applications / R. Anthony [et al.] // *Applied Surface Science*. 2015. Vol. 357. P. 385–390. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2015.09.025>.
7. Effectiveness of the Magnetostatic Shielding by the Cylindrical Shells / S. S. Grabchikov [et al.] // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2016. Vol. 398. P. 49–53. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.08.122>.
8. Ralston, K. D. Effect of Grain Size on Corrosion: a Review / K. D. Ralston, N. Birbilis // *CORROSION*. 2010. Vol. 66, No 7. P. 075005-13. <https://doi.org/10.5006/1.3462912>.
9. Kumar, D. V. Mechanical Characteristics and Electrochemical Behaviour of Electrodeposited Nanocrystalline Iron and Iron-Nickel Alloy / D. V. Kumar, S. Ayyagari, M. J. N. V. Prasad // *Materials Chemistry and Physics*. 2017. Vol. 201. P. 26–34. <https://doi.org/10.1016/j.materchemphys.2017.08.025>.
10. Hadian, A. S. E. Residual Stresses in Electrodeposits of Nickel and Nickel-Iron Alloys / A. S. E. Hadian, D. R. Gabe // *Surface and Coatings Technology*. 1999. Vol. 122, No 2–3. P. 118–135. [https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(99\)00328-x](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(99)00328-x).
11. Koo, B. Electrodeposition of Low-Stress NiFe thin Films from a Highly Acidic Electrolyte / B. Koo, B. Yoo // *Surface and Coatings Technology*. 2010. Vol. 205, No 3. P. 740–744. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.07.076>.
12. Effect of Ammonium Chloride in Plating Baths on Soft Magnetic Properties of Electroplated Fe–Ni Films / T. Yanai [et al.] // *IEEE Transactions on Magnetics*. 2017. Vol. 53, No 11. P. 2004303. <https://doi.org/10.1109/tmag.2017.2712803>.
13. Segregation Induced Hardening in Annealed Nanocrystalline Ni–Fe Alloy / N. Zhang [et al.] // *Materials Science and Engineering: A*. 2018. Vol. 735. P. 354–360. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2018.08.061>.
14. Effect of Annealing on Microstructure, Grain Growth, and Hardness of Nanocrystalline Fe–Ni Alloys Prepared by Mechanical Alloying / H. Kotan [et al.] // *Materials Science and Engineering: A*. 2012. Vol. 552. P. 310–315. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2012.05.045>.
15. Lee, G.-Y. Annealing Effect on Microstructure and Magnetic Properties of Flake-Shaped Agglomerates of Ni–20 wt. % Fe Nanopowder / G.-Y. Lee, S.-K. Kwon, J. S. Lee // *Journal of Alloys and Compounds*. 2014. Vol. 613. P. 164–169. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2014.06.019>.
16. Kramer, D. E. Surface Constrained Plasticity: Oxide Rupture and the Yield Point Process / D. E. Kramer, K. B. Yoder, W. W. Gerberich // *Philosophical Magazine: A*. 2001. Vol. 81, No 8. P. 2033–2058. <https://doi.org/10.1080/01418610108216651>.
17. Anomalous Plastic Deformation at Surfaces: Nanoindentation of Gold Single Crystals / S. G. Corcoran [et al.] // *Physical Review: B*. 1997. Vol. 55, No 24. P. R16057–R16060. <https://doi.org/10.1103/physrevb.55.r16057>.
18. Characterizing Deformation Behaviour of an Oxidized High Speed Steel: Effects of Nanoindentation Depth, Friction and Oxide Scale Porosity / G. Y. Deng [et al.] // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2019. Vol. 155. P. 267–285. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.02.043>.
19. Thermal Annealing and Magnetic Anisotropy of NiFe thin Films on n-Si for Spintronic Device Applications / Q. H. Lu [et al.] // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2015. Vol. 394. P. 253–259. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.06.066>.
20. Nano-Grain Ni/ZrO₂ Functional Gradient Coating Fabricated by Double Pulses Electrodeposition with Enhanced High Temperature Corrosion Performance / W. Ge [et al.] // *Coatings*. 2020. Vol. 10, No 4. P. 332. <https://doi.org/10.3390/coatings10040332>.
21. Magnetic Characterization of Nickel-Rich NiFe Nanowires Grown by Pulsed Electrodeposition / M. S. Salem [et al.] // *Journal of Materials Chemistry*. 2012. Vol. 22, No 17. P. 8549–8557. <https://doi.org/10.1039/c2jm16339j>.
22. Oliver, W. C. Measurement of Hardness and Elastic Modulus by Instrumented Indentation: Advances in Understanding and Refinements to Metrology / W. C. Oliver // *Journal of Materials Research*. 2004. Vol. 19, No 1. P. 3–20. <https://doi.org/10.1557/jmr.2004.19.1.3>.
23. Головин, Ю. И. Наноиндентирование и его возможности / Ю. И. Головин. М.: Машиностроение, 2009. 313 с.
24. Федосюк, В. М. Влияние параметров электролитического осаждения на структуру и микромеханические свойства пленок Ni–Fe / В. М. Федосюк, Т. И. Зубарь, А. В. Труханов // *Вести Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук*. 2020. Т. 65, № 2. С. 135–144. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2020-65-2-135-144>.

Поступила 29.12.2020

Подписана в печать 25.02.2021

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. McCrea J. L., Palumbo G., Hibbard G. D., Erb U. (2003) Properties and Applications for Electrodeposited Nanocrystalline Fe–Ni Alloys. *Reviews on Advanced Materials Science*, (5), 252–258.

2. Torabinejad V., Aliofkhaezai M., Assareh S., Allahyarzadeh M. H., Sabour A. (2017) Rouhaghdam Electrodeposition of Ni-Fe Alloys, Composites, and Nano Coatings – a Review. *Journal of Alloys and Compounds*, 691, 841–859. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2016.08.329>.
3. Koch C. C. (2007) Structural Nanocrystalline Materials: an Overview. *Journal of Materials Science*, 42 (5), 1403–1414. <https://doi.org/10.1007/s10853-006-0609-3>.
4. Nicolaescu D., Filip V. (1996) Modelling of a Magnetic Sensor Based on Vacuum Field Emission. *Applied Surface Science*, 94–95, 87–93. [https://doi.org/10.1016/0169-4332\(95\)00355-x](https://doi.org/10.1016/0169-4332(95)00355-x).
5. Zhang Y., Jia C., Wang Q., Kong Q., Chen G., Guan H., Dong C. (2019) Highly Sensitive and Selective Toluene Sensor of Bimetallic Ni/Fe–MOFs Derived Porous NiFe₂O₄ Nanorods. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 58 (22), 9450–9457. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.9b01497>.
6. Anthony R., Shanahan B. J., Waldron F., Mathúna C. O., Rohan J. F. Anisotropic Ni-Fe–B Films with Varying Alloy Composition for High Frequency Magnetics on Silicon Applications. *Applied Surface Science*, 357. P. 385–390. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2015.09.025>.
7. Grabchikov S. S., Trukhanov A. V., Trukhanov S. V., Kazakevich I. S., Solobay A. A., Erofeenko V. T., Vasilenkov N. A., Volkova O. S., Shakin A. (2016) Effectiveness of the Magnetostatic Shielding by the Cylindrical Shells. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 398, 49–53. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.08.122>.
8. Ralston K. D., Birbilis N. (2010) Effect of Grain Size on Corrosion: a Review. *CORROSION*, 66 (7), 075005-13. <https://doi.org/10.5006/1.3462912>.
9. Kumar D. V., Ayyagari S., Prasad M. J. N. V. (2017) Mechanical Characteristics and Electrochemical Behaviour of Electrodeposited Nanocrystalline Iron and Iron-Nickel Alloy. *Materials Chemistry and Physics*, 201, 26–34. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2017.08.025>.
10. Hadian A. S. E., Gabe D. R. (1999) Residual Stresses in Electrodeposits of Nickel and Nickel-Iron Alloys. *Surface and Coatings Technology*, 122 (2–3), 118–135. [https://doi.org/10.1016/S0257-8972\(99\)00328-x](https://doi.org/10.1016/S0257-8972(99)00328-x).
11. Koo B., Yoo B. (2010) Electrodeposition of Low-Stress NiFe thin Films from a Highly Acidic Electrolyte. *Surface and Coatings Technology*, 205 (3), 740–744. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.07.076>.
12. Yanai T., Koda K., Eguchi K., Takashima K., Morimura T., Nakano M., Fukunaga H. (2017) Effect of Ammonium Chloride in Plating Baths on Soft Magnetic Properties of Electroplated Fe–Ni Films. *IEEE Transactions on Magnetics*, 53 (11), 2004303. <https://doi.org/10.1109/tmag.2017.2712803>.
13. Zhang N., Jin S. B., Sha G., Yu J. K., Cai X. C., Du C. C., Shen T. D. (2018) Segregation Induced Hardening in Annealed Nanocrystalline Ni–Fe Alloy. *Materials Science and Engineering: A*, 735, 354–360 <https://doi.org/10.1016/j.msea.2018.08.061>.
14. Kotan H., Saber M., Koch C. C., Scattergood R. O. (2012) Effect of Annealing on Microstructure, Grain Growth, and Hardness of Nanocrystalline Fe–Ni Alloys Prepared by Mechanical Alloying. *Materials Science and Engineering: A*, 552, 310–315. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2012.05.045>.
15. Lee G.-Y., Kwon S.-K., Lee J. S. (2014) Annealing Effect on Microstructure and Magnetic Properties of Flake-Shaped Agglomerates of Ni–20 wt. % Fe Nanopowder. *Journal of Alloys and Compounds*, 613, 164–169. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2014.06.019>.
16. Kramer D. E., Yoder K. B., Gerberich W. W. (2001) Surface Constrained Plasticity: Oxide Rupture and the Yield Point Process. *Philosophical Magazine: A*, 81 (8), 2033–2058. <https://doi.org/10.1080/01418610108216651>.
17. Corcoran S. G., Colton R. J., Lilleodden E. T., Gerberich W. W. (1997) Anomalous Plastic Deformation at Surfaces: Nanoindentation of Gold Single Crystals. *Physical Review: B*, 55 (24), R16057–R16060. <https://doi.org/10.1103/physrevb.55.r16057>.
18. Deng G. Y., Tieu A. K., Su L. H., Zhu H. T., Zhu Q., Zamri W. F. H., Kong C. (2019) Characterizing Deformation Behaviour of an Oxidized High Speed Steel: Effects of Nanoindentation Depth, Friction and Oxide Scale Porosity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 155, 267–285. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.02.043>.
19. Lu Q. H., Huang R., Wang L. S., Wu Z. G., Li C., Luo Q., Zuo S. Y., Li J., Peng D. L., Han G. L., Yan P. X. (2015) Thermal Annealing and Magnetic Anisotropy of NiFe thin Films on n-Si for Spintronic Device Applications. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 394, 253–259. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.06.066>.
20. Ge W., He T., Wang M., Li J. (2020) Nano-Grain Ni/ZrO₂ Functional Gradient Coating Fabricated by Double Pulses Electrodeposition with Enhanced High Temperature Corrosion Performance. *Coatings*, 10 (4), 332. <https://doi.org/10.3390/coatings10040332>.
21. Salem M. S., Sergelius P., Zierold R., Montero Moreno J. M., Görlitz D., Nielsch K. (2012) Magnetic Characterization of Nickel-Rich NiFe Nanowires Grown by Pulsed Electrodeposition. *Journal of Materials Chemistry*, 22 (17), 8549–8557. <https://doi.org/10.1039/c2jm16339j>.
22. Oliver W. C. (2004) Measurement of Hardness and Elastic Modulus by Instrumented Indentation: Advances in Understanding and Refinements to Metrology. *Journal of Materials Research*, 19 (1), 3–20. <https://doi.org/10.1557/jmr.2004.19.1.3>.
23. Golovin Yu. I. (2009) *Nanoindentation and its Capabilities*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 313 (in Russian).
24. Fedosyuk V. M., Zubar T. I., Trukhanov A. V. (2020) Influence of Electrolytic Deposition Parameters on the Structure and Micromechanical Properties of Ni–Fe Films. *Vesti Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi. Seriya Fiziko-Tekhnicheskikh Nauk = Proceedings of National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*, 65 (2), 135–144. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2020-65-2-135-144> (in Russian).

Received: 29.12.2020

Accepted: 25.02.2021

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-121-126>

УДК 621.79 (075.8)

Сравнительный анализ колебаний ультразвуковых концентраторов кольцевой формы

Канд. техн. наук, доц. В. П. Луговой¹⁾, инж. В. В. Луговой²⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь),

²⁾ОАО «Минский часовой завод» (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Приведен сравнительный анализ влияния формы кольцевых концентраторов ультразвуковых систем на их амплитудно-частотные характеристики. Известны устройства, в которых упругие элементы используются либо в качестве резонаторов, либо как рабочие инструменты ультразвуковых технологических систем. Однако использование упругих элементов в качестве концентраторов ультразвуковых колебаний недостаточно изучено и требует проведения комплексных исследований и разработки рекомендаций для их практического применения. С этой целью в статье с помощью компьютерной программы ANSYS проведен теоретический анализ, позволивший выполнить модальный и гармонический анализ моделей кольца с различной формой. Кольцо круглой формы имеет номинальный наружный диаметр 50 мм и переменное сечение. Анализировались три модели колец: одно круглое и два овальной формы. Для осуществления сравнения и выявления частот, при которых возникает резонанс, характеристики колебаний колец рассматривались в диапазоне частот от 1 до 26 кГц. Результаты анализа показывают, что в зависимости от частоты вынужденных колебаний в кольцах образуются изгибные колебания, которые действуют в различных координатных плоскостях. При этом изменение формы колец сопровождается изменением амплитуды изгибных колебаний. Наиболее интенсивные колебания вдоль вертикальной оси были достигнуты в кольцах круглой формы. Установлено, что с повышением частоты вынужденных колебаний наблюдается увеличение числа периодов колебаний. Если в области низких частот колебаний в кольце образуется только однопериодная мода колебаний, то в области ультразвуковых колебаний число периодов колебаний увеличивается до двух и трех. Все рассматриваемые модели колец имеют несколько собственных частот колебаний с определенной периодичностью в разных координатных плоскостях в зависимости от формы колец. Интенсивность колебаний различна в разных направлениях и зависит от формы и частоты вынужденных колебаний. Демонстрируются примеры разновидностей моды колебаний для всяких форм колец.

Ключевые слова: геометрическая форма колец, концентратор колебаний, ультразвуковые системы, модальный и гармонический анализ, колебание колец

Для цитирования: Луговой, В. П. Сравнительный анализ колебаний ультразвуковых концентраторов кольцевой формы / В. П. Луговой, В. В. Луговой // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 121–126. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-121-126>

Comparative Analysis of Vibrations of Ring-Shaped Ultrasonic Concentrators

V. P. Lugovoi¹⁾, V. V. Lugovoi²⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus),

²⁾Open Joint Stock Company “Minsk Watch Plant” (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper provides a comparative analysis of the influence of ring concentrator shape in ultrasonic systems on their amplitude-frequency characteristics. Devices are known in which elastic elements are used either as resonators or as working tools of ultrasonic technological systems. However, the use of elastic elements as concentrators of ultrasonic vibrations is insufficiently studied and requires comprehensive research and development of recommendations for their practical application. For this purpose, a theoretical analysis has been carried out in the paper while using the ANSYS computer program, which made it possible to perform modal and harmonic analysis of ring models with various shapes. The round ring has a nominal outer diameter of 50 mm and a variable cross-section. Three ring models have been analyzed: one round model

Адрес для переписки

Луговой Вячеслав Петрович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-91-01
Vlugovoj@bntu.by

Address for correspondence

Lugovoi Vjacheslav P.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-91-01
Vlugovoj@bntu.by

and two models of oval shape. To conduct a comparative analysis and identify frequencies at which resonance occurs, the vibration characteristics of the rings have been considered in the frequency range from 1 to 26 kHz. Results of the analysis show that, depending on the frequency of forced vibrations, bending vibrations are formed in the rings, which act in different coordinate planes. In this case, a change in the shape of the rings is accompanied by a change in the amplitude of the bending vibrations. The most intense ring vibrations along the vertical axis have been achieved in circular rings. It has been found that with an increase in the frequency of forced oscillations, an increase in the number of oscillation periods is observed. If in the region of low vibration frequencies only a one-period vibration mode is formed in the ring, then in the region of ultrasonic vibrations the number of vibration periods increases to two and three. All the considered ring models have several natural vibration frequencies with a certain periodicity in different coordinate planes depending on the shape of the rings. The intensity of the vibrations is different in different directions and depends on the shape and frequency of the forced vibrations. Examples of vibration mode variations for various ring shapes are demonstrated in the paper.

Keywords: geometric shape of rings, vibration concentrator, ultrasonic systems, modal and harmonic analysis, rings vibrations

For citation: Lugovoi V. P., Lugovoi V. V. (2021) Comparative Analysis of Vibrations of Ring-Shaped Ultrasonic Concentrators. *Science and Technique*. 20 (2), 121–126. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-121-126> (in Russian)

Введение

Упругие элементы обладают рядом механических свойств, которые позволяют эффективно применять их в различных устройствах, механизмах и приборах [1, 2]. К числу таких свойств относится способность усиливать или, наоборот, демпфировать колебания. В области ультразвуковой технологии их применяют в качестве резонаторов, рабочих инструментов или концентраторов колебаний для осуществления всевозможных технологических операций: для обработки резанием и пластического деформирования материалов, в качестве чувствительных элементов в измерительных приборах и т. д. Теоретическое обоснование применения упругих элементов дано в [1, 3]. Однако их практическое использование в ультразвуковой технике ограничено из-за недостаточности сведений о влиянии колебаний разных частот на их акустические характеристики, влиянии геометрической формы и размеров, что требует дальнейшего изучения с целью выработки практических рекомендаций.

Важнейшее свойство упругих элементов – способность накопления потенциальной энергии и передачи ее рабочему инструменту, выполняющему механическую работу. Эти возможности использованы, например, в акустических системах, содержащих упругие элементы в виде кольца с переменной жесткостью [4–8]. Показано, что упругое кольцо является при этом и резонатором ультразвуковой системы, согласовывая частоты колебаний источника с элементами акустической системы. Можно привести другие технические решения по совершенствованию ультразвуковых систем, в которых использованы упругие свойства таких элементов, как проволока, металлическая

лента, пружина и пр. Более полные исследования по кольцам переменного сечения представлены в [9, 10], где их применяли в качестве концентраторов ультразвуковых систем для прошивания отверстий в хрупких материалах, что дало положительный результат.

Очевидно, дальнейшее исследование данного вопроса открывает новые возможности и в области ультразвуковой технологии. В связи с этим авторами выполнены теоретические обоснования геометрической формы упругих колец с переменным сечением, которые позволят повысить эффективность работы ультразвуковых систем.

Анализ влияния формы кольцевых волноводов на их частотные характеристики

Для сравнения результатов исследований за основу были приняты модели колец круглой и овальной форм, имеющих переменную и равную для всех форм толщину сечения (рис. 1).

Номинальный наружный диаметр кольца, принятого в качестве основной модели (рис. 1а), 50 мм, толщина в поперечном сечении 10 мм. Геометрическая форма профиля двух остальных моделей колец представляла собой овалы, образованные из основной модели путем изменения соотношения размеров полуосей овала. При этом соблюдалась обратная пропорциональность в соотношении размеров полуосей вдоль осей координат. Их соотношение составляло соответственно 75/37 и 37/75 мм.

В качестве материала для моделей колец была принята сталь 45. Переменная жесткость колец достигалась изменением толщины сечения в плоскости чертежа в самой верхней и самой нижней точках в направлении вертикальной оси.

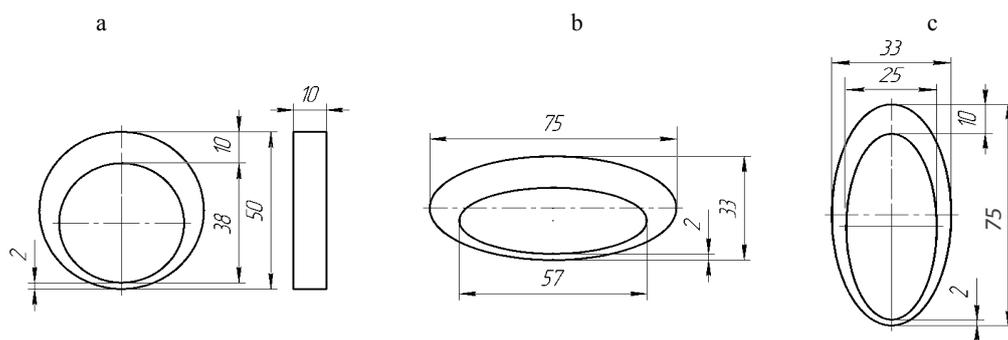


Рис. 1. Варианты геометрической формы и размеры моделей колец

Fig. 1. Options for geometric shapes and sizes of ring models

Все модели колец имели одинаковое соотношение толщин в этих точках, определяемое коэффициентом

$$K_T = \frac{h_1}{h_2} = \frac{10}{2} = 5,$$

где h_1 , h_2 – толщина сечения в верхней и нижней частях кольца.

Полученные результаты численных расчетов для всех трех вариантов колец, выполненных с использованием компьютерной программы ANSYS, представлены на рис. 2. Результаты расчетов показали, что при изменении частоты вынужденных колебаний в кольцах попеременно возбуждаются резонансные колебания в одном из координатных направлений: Y , X , Z (Y – вертикальная ось симметрии кольца; X – горизонтальная ось кольца; Z – горизонтальная ось, направленная перпендикулярно плоскости кольца).

Гармонический анализ исследуемых моделей колец показал, что существуют несколько повторяющихся пиков частот собственных колебаний, при которых возникают резонансные явления по направлению одной из осей координат. При этом в условиях резонанса возбуждается наибольшая амплитуда колебаний в направлении одной из осей координат. В промежутках между пиковыми значениями в кольце образуются сложные колебания, действующие по двум или трем координатам, представляющие изгибные или крутильные колебания.

При совпадении частот вынужденных колебаний с частотами собственных колебаний в кольце образуется резонанс всей системы, который на графиках выражен характерным пиком, отображенным на рисунках цветными линиями. Анализ полученных результатов, представленных в диаграмме, позволил сделать следующие выводы:

– наибольшие значения амплитуды колебаний возникают в кольцах всех форм в области низких частот в пределах 2–4 кГц;

– в кольцах первой и третьей форм (круглом и удлиненного овала) наблюдается закономерная периодичность пиков резонансных колебаний по всем координатным направлениям. Кольцо второго типа не имеет явной выраженной закономерности периодичности образования резонансных колебаний;

– интенсивность колебаний в моделях первой и третьей форм понижается по мере повышения частоты вынужденных колебаний. Вторая модель кольца позволяет получить существенное возрастание амплитуды боковых колебаний в направлении оси X на частоте 13 кГц. При этом боковые колебания по направлению оси X в диапазоне частот 8–16 кГц убывают до минимума, а затем образуются вновь в области ультразвуковых частот (16,8 кГц);

– у модели третьей формы наблюдается нарастающий характер амплитуды продольных колебаний вдоль оси Y до частоты 11 кГц, при которой достигаются наибольшие значения, после чего происходит постепенное уменьшение интенсивности колебаний;

– в области ультразвуковых колебаний (с частотой более 16 кГц) наиболее интенсивные колебания достигаются: в кольце круглой формы – в продольном направлении вдоль оси Y ; в кольце второй формы – поперечные колебания вдоль оси Z ; в кольце третьей формы – боковые колебания в направлении X .

Анализ колебаний исследуемых колец дополняет модальный анализ, который позволяет качественно оценить вид моды колебаний и визуально рассмотреть и представить характер колебаний в каждом интервале частот. При проведении гармонического и модального анализа цветовая окраска модели помогает выявить и рассмотреть области с различной интенсивностью колебаний.

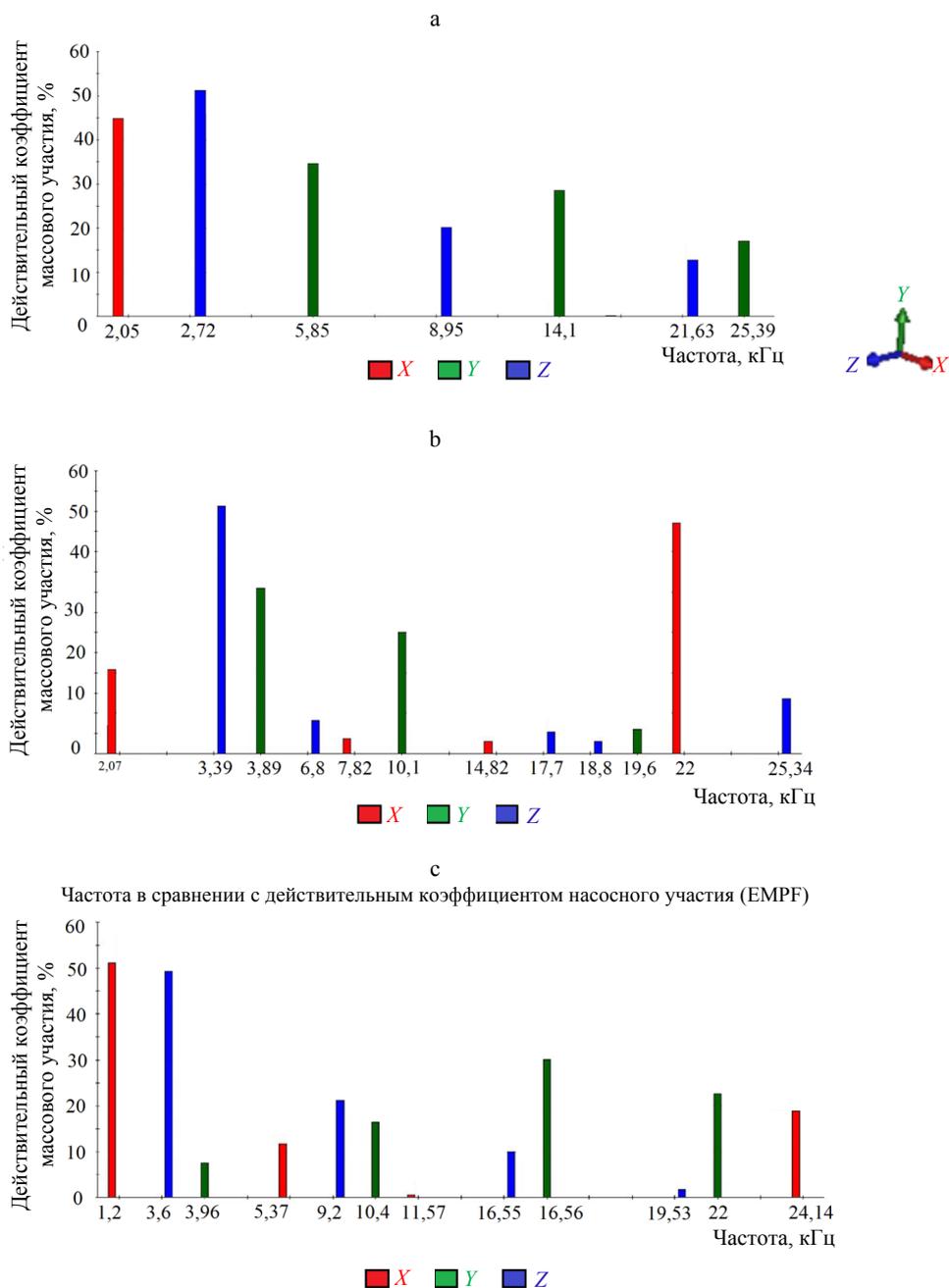


Рис. 2. Диаграммы частотных характеристик упругих колец

Fig. 2. Frequency response diagrams of elastic rings

**Модальный анализ
кольцевых волноводов
ультразвуковых колебательных систем**

Результаты численных расчетов частот и амплитуды колебаний, а также моды колебаний при различных значениях частоты вынужденных колебаний, полученных для разных вариантов моделей кольцевых концентраторов, представлены на рис. 3.

Сравнение результатов модального анализа показывает, что общим свойством колец независимо от геометрической формы является изменение в сторону увеличения числа узловых линий при повышении частоты вынужденных колебаний и изменение формы колебаний. В области низкочастотных колебаний все кольца имеют один полупериод колебаний и визуально идентифицируются как упруго сжатые кольца при действии статической силы.

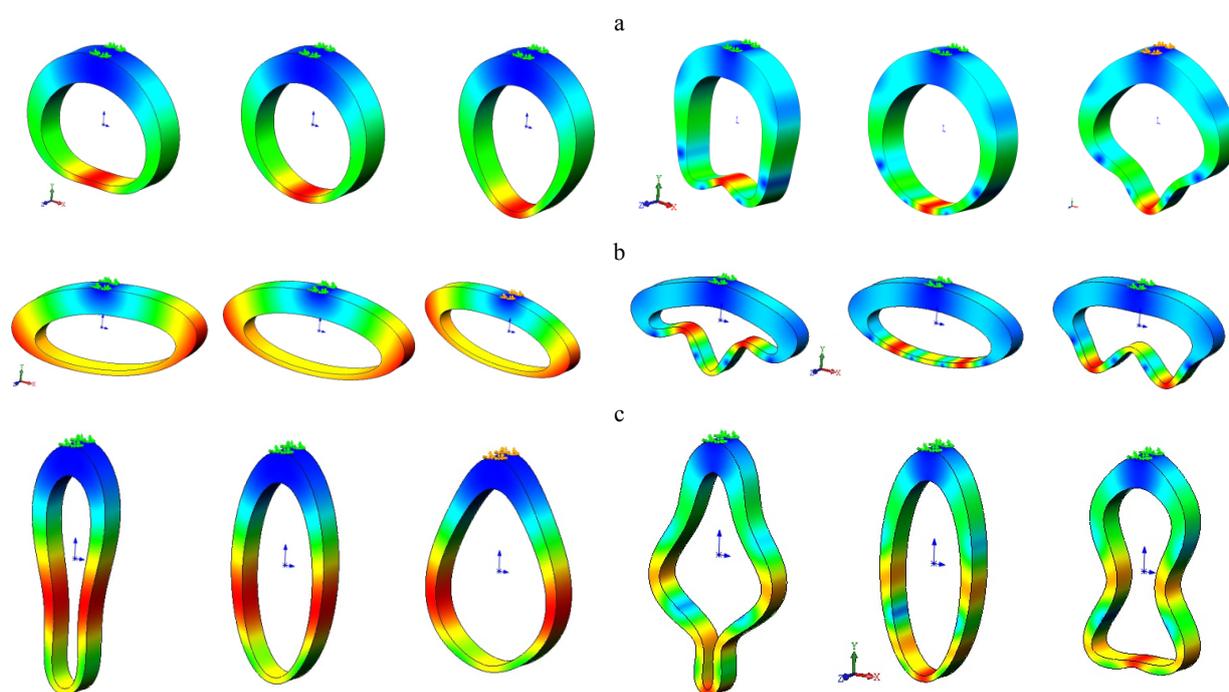


Рис. 3. Форма колебаний различных моделей колец

Fig. 3. Vibration form of various ring models

Колебания в области высоких частот, в том числе в области ультразвуковых колебаний, сопровождаются образованием в кольцах двух и более узловых линий, что характеризует появление в кольцах изгибных колебаний, направленных по образующей линии. Участок с наибольшей амплитудой колебаний в этих случаях может располагаться в различных зонах в зависимости от формы колец. В кольцах круглой формы (первый тип модели) наиболее интенсивные колебания возникают в самой узкой части переменного профиля. При этом в условиях резонанса образуется симметричная форма колебаний относительно продольной оси Y (рис. 3). В промежуточных областях между пиками резонансов возникают комбини-

рованные колебания или колебания с модой асимметричной формы (рис. 4) относительно других осей координат.

На рис. 4а показана мода асимметричных колебаний кольца круглой формы, при которой зона наиболее интенсивных колебаний смещается попеременно, в результате чего одна половина кольца находится в области сжатия, а вторая – в области растяжения. На рис. 4б демонстрируется другой пример периодических колебаний, когда кольцо колеблется вокруг вертикальной оси.

Дальнейший анализ для моделей второго и третьего типов показал, что наиболее интенсивные колебания в этих случаях возникают у боковых стенок.

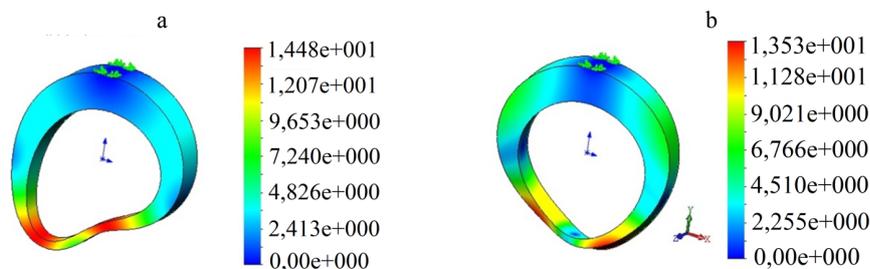


Рис. 4. Примеры действия асимметричных и комбинированных колебаний кольца круглой формы

Fig. 4. Examples of the action of asymmetric and combined oscillations of a ring having a round shape

ВЫВОДЫ

1. Сравнительный анализ полученных теоретических расчетов дает возможность установить моды колебаний кольцевых волноводов, определить направления их действия, количественно оценить их величину и обосновать оптимальную форму для ультразвуковых систем.

2. Проведен сравнительный гармонический и модальный анализ кольцевых волноводов круглых и овальных форм в диапазоне колебаний частотой от 1 до 16 кГц, позволивший установить области образования резонансов в направлении трех осей координат.

3. Кольцевые волноводы обладают периодичностью образования резонансных колебаний в широком диапазоне частот колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева, Л. Е. Упругие элементы приборов / Л. Е. Андреева. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
2. Ананьев, И. В. Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование / И. В. Ананьев, П. Г. Тимофеев. М.: Машиностроение, 1965. 240 с.
3. Пфейффер, П. Колебания упругих тел / П. Пфейффер, пер. с нем. А. И. Лурье. Л.: ОНТИ, Гос. техн.-теор. изд-во, 1934. 154 с.
4. Компьютерное моделирование и анализ колебаний кольцевого концентратора ультразвуковой системы / В. П. Луговой [и др.] // Наука и техника. 2018. Т. 17, № 3. С. 220–227. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-3-220-227>.
5. Степаненко, Д. А. Влияние формы кольцевого концентратора ультразвуковой системы на коэффициент усиления амплитуды колебаний / Д. А. Степаненко, И. В. Луговой, В. П. Луговой // Наука и техника. 2016. Т. 15, № 3. С. 209–215. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2016-15-3-209-215>.
6. Босаков, С. В. К определению перемещений в упругом эллиптическом кольце / С. В. Босаков, И. В. Луговой // Наука и техника. 2013. № 3. С. 59–62.
7. Разработка и исследование нового типа концентраторов ультразвуковых колебаний на основе кольцевых упругих элементов / Д. А. Степаненко [и др.] // Материалы, технологии, инструменты. 2013. Т. 18, № 2. С. 90–94.
8. Increase of Productivity in Brittle Material Processing by the Application of Intermediate Elastic Elements in Tool Structure / I. Lugovoi [et al.] // *Vibroengineering PROCEDIA*. 2014. Vol. 3. P. 175–179.
9. Ультразвуковой инструмент для обработки отверстий: пат. Респ. Беларусь № 8169, МПК В24 В1/04 / И. В. Луговой, В. Т. Минченя, В. П. Луговой. Опубл. 30.04.2012.

10. Ультразвуковой инструмент для обработки или измерения детали: пат. Респ. Беларусь № 19219, МПК В 06В 1/00 / И. В. Луговой, В. Т. Минченя, В. П. Луговой. Опубл. 30.06.2015.

Поступила 15.06.2020

Подписана в печать 24.08.2020

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Andreeva L. E. (1981) *Elastic Elements of Devices*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 392 (in Russian).
2. Ananiev I. V., Timofeev P. G. (1965) *Oscillations of Elastic Systems in Aircraft Structures and their Damping*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 240 (in Russian).
3. Pfeiffer F. (1928) *Handbuch der Physik. Band VI. Mechanik der Elastischen Körper* [Vibrations of Elastic Bodies]. Berlin, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-48543-5> (in German).
4. Lugovoi V. P., Pronkevich S. A., Lugovoi I. V., Dovernar S. S. (2018) Computer Modeling and Analysis of Vibrations in Annular Concentrator of Ultrasonic System. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, 17 (3), 220–227. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-3-220-227> (in Russian).
5. Stepanenko D. A., Lugovoi I. V., Lugovoi V. P. (2016) Shape Effect of Annular Concentrator in Ultrasonic System on Amplification Factor of Vibrations Amplitude. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, 15 (3), 209–215. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2016-15-3-209-215> (in Russian).
6. Bosakov S. V., Lugovoi I. V. (2013) To Determination of Movements in Elastic Elliptical Ring. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, (3), 59–62 (in Russian).
7. Stepanenko D. A., Minchenya V. T., Lugovoy V. P., Lugovoy I. V. (2013) Development and Study of Novel Type of Ultrasonic Concentrators Based on Ring-Shaped Elastic Element. *Materialy, Tekhnologii, Instrumenty* [Materials, Technologies, Tools], 18 (2), 90–94 (in Russian).
8. Lugovoj I., Minchenya V., Baurienė G., Bubulis A., Pilkauskas K. (2014) Increase of Productivity in Brittle Material Processing by the Application of Intermediate Elastic Elements in Tool Structure. *Vibroengineering PROCEDIA*, 3, 175–179.
9. Lugovoi I. V., Minchenya V. T., Lugovoi V. P. (2012) *Ultrasonic Tool for Hole Processing*. Patent of the Republic of Belarus No 8169 (in Russian).
10. Lugovoi I. V., Minchenya V. T., Lugovoi V. P. (2015) *Ultrasonic Tool for Processing or Measuring Parts*. Patent of the Republic of Belarus No 19219 (in Russian).

Received: 15.06.2020

Accepted: 24.08.2020

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-127-131>

UDC 621.914.1

Influence of the Cut Axial Depth on Surface Roughness at High-Speed Milling of Thin-Walled Workpieces

A. I. Germashev¹⁾, V. A. Logominov¹⁾, S. I. Dyadya¹⁾, Y. B. Kozlova¹⁾, V. A. Krishtal²⁾

¹⁾National University “Zaporizhzhya Polytechnic” (Zaporozhye, Ukraine),

²⁾SE “Ivchenko-Progress” (Zaporozhye, Ukraine)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Abstract. The paper presents the results of research on the dynamics of end milling of thin-walled work-pieces having complex geometric shapes. Since the milling process with shallow depths of cut is characterized by high intermittent cutting, the proportion of regenerative vibrations decreases, and the effect of forced vibrations on the dynamics of the process, on the contrary, increases. The influence of axial depth of cut on the vibrations arising during processing, and roughness of the processed surface have been studied in paper. The experiments have been carried out in a wide range of changes in the spindle speed at different axial cutting depths. Vibrations of a thin-walled work-piece have been recorded with an inductive sensor and recorded in digital form. Then an oscillogram has been used to estimate the amplitude and frequency of oscillations. The profilograms of the machined surface have been analysed. Roughness has been evaluated by the parameter Ra. The results have shown similar relationships for each of the investigated axial cutting depths. The worst cutting conditions have been observed when the natural vibration frequency coincided with the tooth frequency or its harmonics. It is shown that the main cause of vibrations in high-speed milling is forced rather than regenerative vibrations. Increasing the axial depth of cut at the same spindle speed increases the vibration amplitude. However, this does not significantly affect the roughness of the processed surface in cases when it comes to vibration-resistant processing.

Keywords: milling, thin-walled work-piece, high-speed milling, forced vibrations, vibrations, self-excited oscillations, spindle speed

For citation: Germashev A. I., Logominov V. A., Dyadya S. I., Kozlova Y. B., Krishtal V. A. (2021) Influence of the Cut Axial Depth on Surface Roughness at High-Speed Milling of Thin-Walled Workpieces. *Science and Technique*. 20 (2), 127–131. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-127-131>

Влияние осевой глубины резания на шероховатость поверхности при высокоскоростном фрезеровании тонкостенных деталей

Канд. техн. наук А. И. Гермашев¹⁾,
кандидаты техн. наук, доценты В. А. Логоминов¹⁾, С. И. Дядя¹⁾, Е. Б. Козлова¹⁾,
В. А. Кришталь²⁾

¹⁾Национальный университет «Запорожская политехника» (Запорожье, Украина),

²⁾ГП «Ивченко-Прогресс» (Запорожье, Украина)

Реферат. В статье представлены результаты исследований динамики концевое фрезерование тонкостенных деталей сложной геометрической формы. Поскольку процесс фрезерования с малыми глубинами резания характеризуется высокой прерывистостью резания, доля регенеративных колебаний уменьшается, а влияние вынужденных колебаний на динамику процесса, напротив, увеличивается. Изучено влияние осевой глубины резания на колебания, возникающие

Адрес для переписки

Козлова Елена Борисовна
Национальный университет «Запорожская политехника»
ул. Жуковского, 64,
69063, г. Запорожье, Украина
Тел.: +380 61 769-83-16
kozlova@zntu.edu.ua

Address for correspondence

Kozlova Yelena B.
National University “Zaporizhzhya Polytechnic”
64, Zhukovsky str.,
69063, Zaporozhye, Ukraine
Tel.: +380 61 769-83-16
kozlova@zntu.edu.ua

при обработке, и шероховатость обработанной поверхности. Опыты проводили на специально сконструированном стенде, позволяющем отдельно исследовать влияние режимов резания и динамических характеристик тонкостенной детали на динамику фрезерования. Эксперименты выполнены в широком диапазоне изменений скорости вращения шпинделя при различных осевых глубинах резания. Колебания тонкостенной детали регистрировали индуктивным датчиком и записывали в цифровом виде. Затем по осциллограмме оценивали амплитуду и частоту колебаний. Проанализированы профилограммы обработанной поверхности. Шероховатость оценивали по параметру Ra. Результаты показали схожие зависимости для каждой из исследованных осевых глубин резания. Наихудшие условия резания наблюдались в случаях, когда собственная частота колебаний совпадала с зубцовой частотой или ее гармониками. Показано, что основной причиной вибраций при высокоскоростном фрезеровании являются вынужденные, а не регенеративные колебания. Увеличение осевой глубины резания при одинаковых частотах вращения шпинделя повышает амплитуду колебаний. Однако это несущественно влияет на шероховатость обработанной поверхности в случаях, когда речь идет о виброустойчивой обработке.

Ключевые слова: фрезерование, тонкостенная деталь, высокоскоростное фрезерование, вынужденные колебания, вибрации, автоколебания, частота вращения шпинделя

Для цитирования: Влияние осевой глубины резания на шероховатость поверхности при высокоскоростном фрезеровании тонкостенных деталей / А. И. Гермашев [и др.] // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 127–131. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-127-131>

Introduction

The key factor in thin wall machining is the dynamic behaviour of the work-piece. Thin-walled milling case covers many parts of the aerospace sector, including structural and engine parts. Thus, operating conducted under 5 axes milling which is widely used in manufacturing blisk or impellers [1]. Biermann et al. [2] presented a general approach to simulate work-piece vibrations during 5 axes milling of turbine blades. Budak et al. [3] included the effect of work-piece dynamics on chatter stability in milling of turbine blades, taking into account constant changes of the part characteristic. Thin-walled parts behavior is highly dependent from tool position due to continuously changeable structural dynamics. Path dependent 3D stability diagrams was developed to determine dynamic of the part along tool path and reaching free of chatter machining of thin-walled work-pieces [4], [5]. Munoa at al. [6] concluded that the main tendency in chatter avoidance during thin-walled machining is the use FEM models to predict the modal parameters and vibration modes, considering the variations due to material removal. One of the first study of thin-walled milling with FEM model was carried out by Kline et al. [7]. Further improving of this model was made by Budak and Altintas [8] considering the plate surface finish.

One of the important specifics of thin-walled milling of engine parts is highly interrupted nature and high spindle speed, where influence of chatter becomes lower due to low fraction of the wave [9].

In such case the surface location error regularities take place, that was noticed by Kline et al. [10], [11], Tlustý [12], Montgomery and Altintas [13, 14], Smith et al. [15], Tarng et al. [16], Schmitz et al. [17–21], and others. Therefore, even under seemingly stable cutting conditions, the thin-walled structures experience forced vibrations, which depend on the work-piece / tool natural frequency and excitation frequency (or tooth passing frequency), causing big fluctuations of the flexible workpiece.

As at highly interrupted machining chatter has low influence on the state of milling process while poliresonance cause high oscillation at certain spindle speed ranges, primary goal of the paper showing that generally accepted parameter of axial depth of cut has low influence on the state of machining if good spindle speed range is reached. For validation of proposed assumption experimental study is proposed.

Experimental setup

Data acquisition for thin-walled end milling process has some features related to the specifics of this process. Due to the high intermittency of thin-walled end milling process it consists of consecutive alternation of cutting and free movement of the part. Part behaviour during milling process affects quality of surface finish, dimensional accuracy, manufacturing tool wear, etc. By the time free movement of the part is not so important, because of tool-work-piece system break. Moreover, free oscillations of the part might have bigger amplitude than part deflection during milling. However, data acquisition records all machining

process. So, to evaluate thin-walled milling process accurately, it becomes significantly important to separate cutting process from the entire processing signal. Such procedure is carried out by measuring contact system of experimental setup, which allows recording a contact signal simultaneously with the displacement sensor that measures oscillation of thin plate during processing (Fig 1).

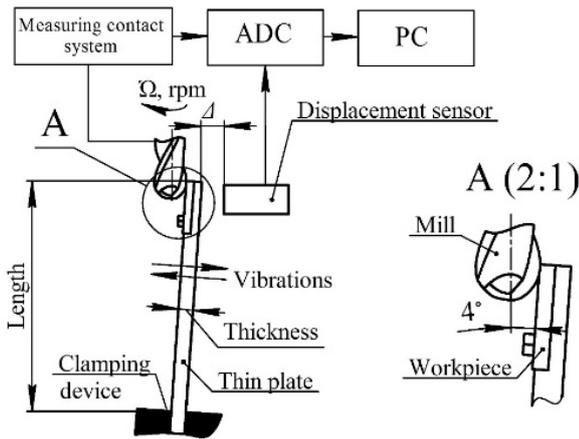


Fig. 1. Experiment setup

Results

For investigating the axial depth of cut influence on the state of machining at milling of thin-walled components, two series of experimental tests were conducted with parameter $a_e = 0.5$ mm and $a_e = 1.5$ mm. Maximal amplitude of the part oscillation was measured during the tests.

In Fig. 2 it is shown part's amplitude oscillation changes at different spindle speeds. For both series of experimental tests it was observed the same regularities and spindle speed ranges with low and high amplitudes. The biggest amplitude was observed at spindle speed $n = 2700-3000$ rpm, $n = 3500-4500$ rpm, $n = 7700-8500$ rpm, while low amplitude was noticed at $n = 3100-3500$ rpm, $n = 5300-6900$ rpm, $n = 9500-10000$ rpm.

As poliresonance has a dominant influence at highly interrupted machining of thin-walled components it is proposed to observe this chart in terms of tooth passing and natural frequency ratio (Fig. 3). From this chart it is easy to notice that maximum amplitude was observed at the ratio 1.0, 0.5, 0.33 and close to them regions. The lowest amplitude was seen at 0.75, 0.44 and lower than 0.3. It should be noticed that if time of cutting becomes more than period of chatter conditions are

conductive to appearance of chatter. For this and other reasons, the polyresonance does not have a dominant influence on the cutting process at low passing and natural frequency ratio.

The surface quality is presented in the Fig. 4. Curves have similar trends as in the figure of the part oscillation (Fig. 2). Such regularities are described in authors' work [9]. This chart shows sensitivity of thin-walled components to cutting conditions. Taking into account observed spindle speed range the surface roughness changes more than in 20 times for certain spindle speeds (for example at $n = 3700$ rpm). In some cases spindle speed difference is less than 5 % (for example at $n = 3500$ rpm).

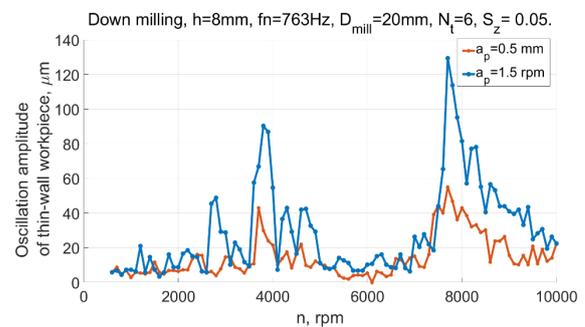


Fig. 2. Dependence of oscillation amplitude on spindle speed chart

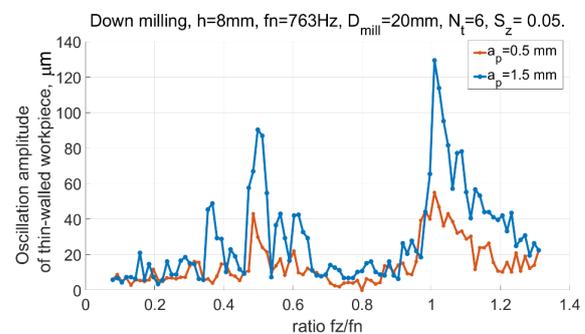


Fig. 3. Dependence of oscillation amplitude on tooth passing and natural frequency ratio

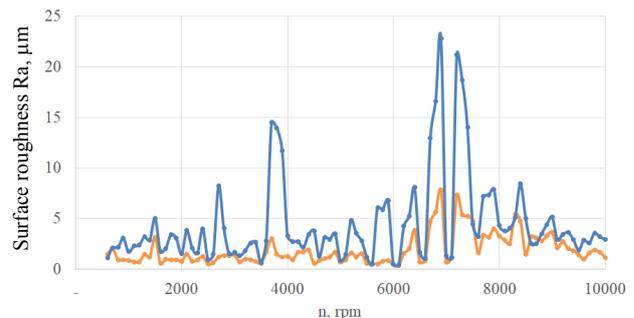


Fig. 4. Dependence of surface roughness on spindle speed chart: — 0.5; — 1.5

In the Fig. 5 profilograms of machined surface after experimental tests is shown. For the comparison milling condition with the max and min part oscillation level is chosen. These profiles shows that in case of small oscillation increasing of axial depth of cut does not significantly influence on the cutting process. Amplitude of the work-piece oscillation and surface roughness rise less than 30 %.

In the same time in case of bad state of machining bigger axial depth of cut causes much more higher oscillation level (more than in 2 times) and damage of the surface. Such results allows to notice that at highly interrupted milling poliresonance regularities usage allows to increase axial depth of cut and save good quality of the machining.

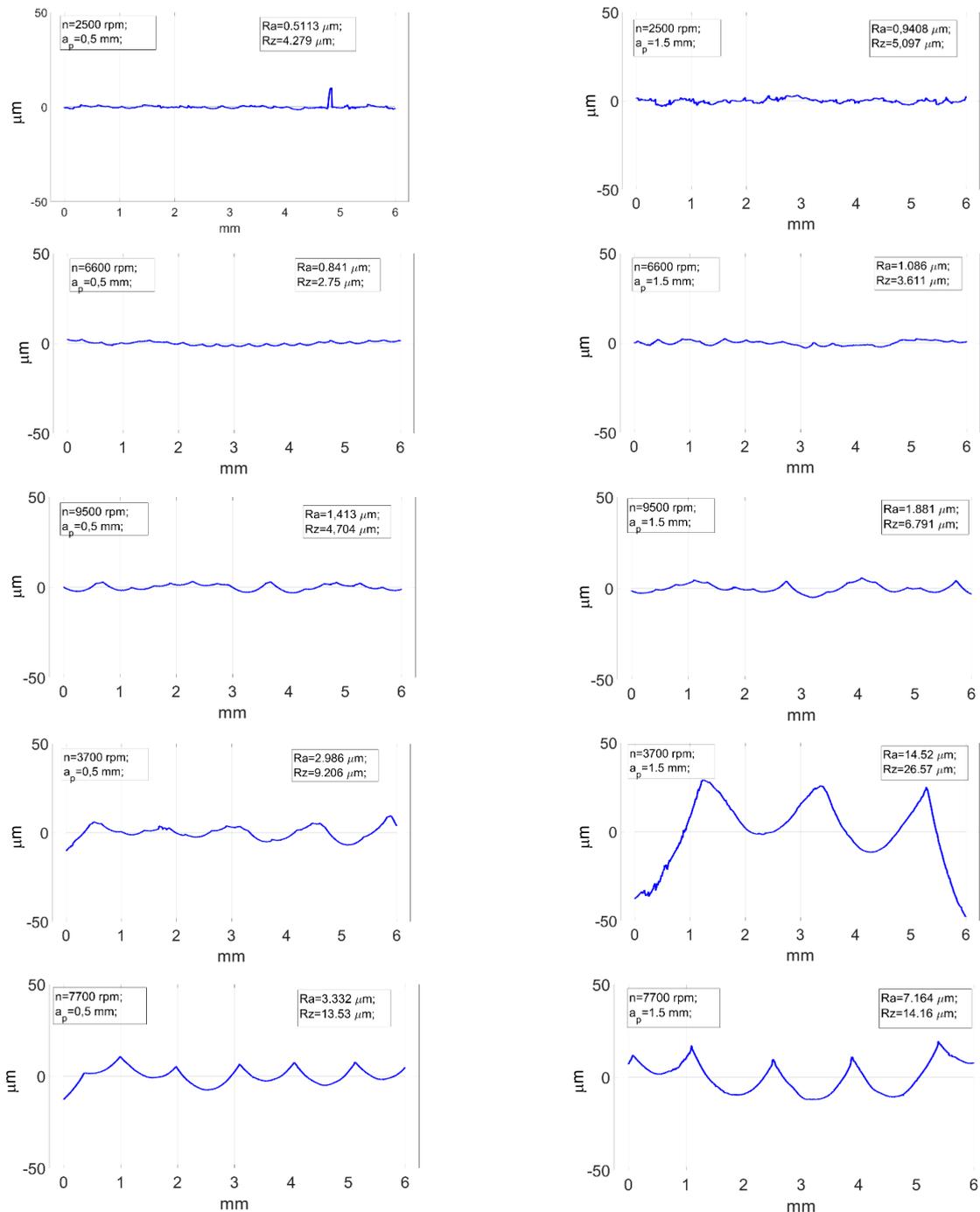


Fig. 5. Profile of the machined surface at max and min oscillation level of the workpiece

CONCLUSION

Paper proposes experimental investigations of the influence axial depth of cut on the state of thin-walled milling and quality of surface finish. Based on the results it should be concluded, that thin-walled parts are extremely sensitive to spindle speed variation as their behavior during processing depends on excitation frequency. Analyses of the part oscillation and surface roughness show that spindle speed determines the influence of the axial depth of cut. If spindle speed range with good state of cut is reached, increasing of axial depth of cut does not provide significant changes in the cutting process and machining quality. In either case, if oscillation with high amplitude is observed, an axial depth of cut plays an essential role in increasing vibration level. And furthermore, a high vibration level may lead to damage surface and tool breaking.

REFERENCES

- Budak E., Ozturk E., Tunc L. T. (2009) Modeling & Simulation of 5-Axis Milling Processes. *CIRP Annals*, 58 (1), 347–350. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2009.03.044>.
- Biermann D., Kersting P., Surmann T. (2010) A General Approach to Simulating Workpiece Vibrations During Five-Axis Milling of Turbine Blades. *CIRP Annals*, 59 (1), 125–128. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2010.03.057>.
- Budak E., Tunc L. T., Alan S., Özgüven H. N. (2012) Prediction of Workpiece Dynamics & its Effects on Chatter Stability in Milling. *CIRP Annals*, 61 (1), 339–342. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2012.03.144>.
- Bravo U., Altuzarra O., Lopez Lacalle L. N., Sanchez J. A., Campa F. J. (2005) Stability Limits of Milling Considering the Flexibility of the Workpiece & the Machine. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 45 (15), 1669–1680. <https://doi.org/10.1016/j.ijmactools.2005.03.004>.
- Thevenot V., Arnaud L., Desein G., Cazenave-Larroche G. (2006) Integration of Dynamic Behavior Variations in the Stability Lobes Method: 3D Lobes Construction & Application to Thin-Walled Structure Milling. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 27 (7–8), 638–644. <https://doi.org/10.1007/s00170-004-2241-1>.
- Munoa J., Beudaert X., Dombovari Z., Altintas Y., Budak E., Brecher C. Stepan G. (2016) Chatter Suppression Techniques in Metal Cutting. *CIRP Annals*, 65 (2), 785–808. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2016.06.004>.
- Budak E., Altintas Y. (1995) Modeling & Avoidance of Static Form Errors in Peripheral Milling of Plates. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 35 (3), 459–476. [https://doi.org/10.1016/0890-6955\(94\)p2628-s](https://doi.org/10.1016/0890-6955(94)p2628-s).
- Kline W. A., DeVor R. E., Shareef I. A. (1982) The Prediction of Surface Accuracy in Milling. *Journal Engineering for Industry*, 104 (3), 272–278. <https://doi.org/10.1115/1.3185830>.
- Germashev A., Logominov V., Anpilogov D., Vnukov Y., Khristal V. (2018) Optimal Cutting Condition Determination for Milling Thin-Walled Details. *Advances in Manufacturing*, 6 (3), 280–290. <https://doi.org/10.1007/s40436-018-0224-y>.
- Kline W., DeVor R., Shareef I. (1982) The Prediction of Surface Accuracy in End Milling. *Journal of Engineering for Industry*, 104, 272–278. <https://doi.org/10.1115/1.3185830>.
- Kline W., DeVor R., Lindberg J. (1982) The Prediction of Cutting Forces in End Milling with Application to Cornering Cuts. *International Journal of Machine Tool Design Research*, 22, 7–22. [https://doi.org/10.1016/0020-7357\(82\)90016-6](https://doi.org/10.1016/0020-7357(82)90016-6).
- Stusty J. (1985) Effect of end Milling Deflections on Accuracy. *Handbook of High-Speed Machining Technology*, 140–153.
- Altintas Y., Montgomery D., Budak E. (1992) Dynamic Peripheral Milling of Flexible Structures. *Journal of Engineering for Industry*, 114 (2), 137–145. <https://doi.org/10.1115/1.2899766>.
- Montgomery D., Altintas Y. (1991) Mechanism of Cutting Force and Surface Generation in Dynamic Milling. *Journal of Engineering for Industry*, 113 (2), 160–168. <https://doi.org/10.1115/1.2899673>.
- Smith S., Stusty J. (1991) An Overview of Modeling and Simulation of the Milling Process. *Journal of Engineering for Industry*, 113 (2), 169–175. <https://doi.org/10.1115/1.2899674>.
- Tarng Y., Liao C., Li H. (1994) A Mechanistic Model for Prediction of the Dynamics of Cutting Forces in Helical End Milling. *International Journal of Modeling and Simulation*, 14 (2), 92–97. <https://doi.org/10.1080/02286203.1994.11760220>.
- Schmitz T., Ziegert J. (1999) Examination of Surface Location Error due to Phasing of Cutter Vibrations. *Precision Engineering*, 23, 51–62. [https://doi.org/10.1016/s0141-6359\(98\)00025-7](https://doi.org/10.1016/s0141-6359(98)00025-7).
- Schmitz T. L., Couey J., Marsh E., Mauntler N., Hughes D. (2007) Runout Effects in Milling: Surface Finish, Surface Location Error, and Stability. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 47 (5), 841–851. <https://doi.org/10.1016/j.ijmactools.2006.06.014>.
- Schmitz T. L., Ziegert J. C., Canning J. S., Zapata R. (2008) Case Study: a Comparison of Error Sources in High-Speed Milling. *Precision Engineering*, 32, 126–133.
- Schmitz T. L., Mann B. P. (2006) Closed-Form Solutions for Surface Location Error in Milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 46 (12–13), 1369–1377. <https://doi.org/10.1016/j.ijmactools.2005.10.007>.
- Schmitz T. L., Smith K. S. (2009) *Machining Dynamics: Frequency Response to Improved Productivity*. Springer-Verlag US. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09645-2>.

Received: 21.05.2020

Accepted: 28.07.2020

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-132-141>

UDC 629.114.3-592

Blending Control of Trolleybus Traction and Brake Drives to Enhance Braking Efficiency of Vehicle

A. I. Safonau¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Abstract. The widespread use of green public transport is a priority strategy to reduce a congestion and pollution from road traffic in many cities. The trolleybus is a type of urban public electric transport, which is considered as a promising tool for increasing the efficiency of public transport and achieving the goals of sustainable development and quality of life in the city. The operation control of service brake system and secondary brake system (braking torque of traction electric motor) is realized with the help of one pedal in the trolleybus. Thus, there are modes of joint operation for these systems during the braking process. The author has focused his main attention on the development of an algorithm for blending control of the traction electric motor and the anti-lock braking system to enhance the overall braking efficiency of a vehicle. For this purpose, a mathematical model of the trolleybus braking dynamics has been developed. Bench and road tests have been carried out on various road surfaces to determine parameters of vehicle braking efficiency and to validate the developed mathematical model. The corresponding experimental data were used to analyse the efficiency of the proposed strategy for combining the blending control of traction electric motor and anti-lock braking system of the trolleybus. As a result, the efficiency of the proposed control algorithm has been confirmed, which provides the required braking efficiency and high braking stability of the vehicle.

Keywords: trolleybus, anti-lock braking system, traction control system

For citation: Safonau A. I. (2021) Blending Control of Trolleybus Traction and Brake Drives to Enhance Braking Efficiency of Vehicle. *Science and Technique*. 20 (2), 132–141. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-132-141>

Совместное управление тяговым и тормозным приводами троллейбуса для повышения эффективности торможения транспортного средства

Канд. техн. наук, доц. А. И. Сафонов¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Широкое использование экологического общественного транспорта является приоритетной стратегией по уменьшению заторов и загрязнений от дорожного движения во многих городах. Троллейбус – вид городского общественного электрического транспорта, который рассматривается как перспективный инструмент для повышения эффективности общественного транспорта и достижения целей устойчивого развития и качества жизни в городе. Управление в троллейбусе работой тормозной системы – рабочей и вспомогательной (тормозным моментом тягового электродвигателя) – осуществляется с помощью одной педали. Таким образом, имеются режимы совместной работы этих систем в процессе торможения. Основное внимание автор сосредоточил на разработке алгоритма для совместного

Адрес для переписки

Сафонов Андрей Иванович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-41-01
deanmef@bntu.by

Address for correspondence

Safonau Andrei I.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-41-01
deanmef@bntu.by

управления тяговым электродвигателем и антиблокировочной тормозной системой для повышения общей эффективности торможения транспортного средства. С этой целью разработана математическая модель динамики торможения троллейбуса. Для определения параметров эффективности торможения автомобиля и проверки математической модели проведены стендовые и дорожные испытания на различных дорожных покрытиях. Соответствующие экспериментальные данные использовались для анализа эффективности предложенной стратегии совмещения управления тяговым электродвигателем и антиблокировочной тормозной системой троллейбуса. В результате подтверждена дееспособность предложенного алгоритма управления, обеспечивающего требуемую эффективность торможения и высокую тормозную устойчивость автомобиля.

Ключевые слова: троллейбус, антиблокировочная тормозная система, противобуксовочная система

Для цитирования: Сафонов, А. И. Совместное управление тяговым и тормозным приводами троллейбуса для повышения эффективности торможения транспортного средства / А. И. Сафонов // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 132–141. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-132-141>

Introduction

Due to the present politics caused by alarming reports all over the world, environmentally friendly transport systems are called for in order to reduce emissions in urban areas partly caused by heavy-duty traffic. The heavy-duty traffic is not only causing long term damages to the global eco system but is also polluting an air in cities with smog and causing noise which is affecting citizens negatively [1]. Environmental conditions in densely populated cities and also operating costs for vehicles with internal combustion engine demand a development of new conception of urban public transport as evidenced by European Commission activity which supports financially scientific projects in this area [2, 3].

The main strategy of EU cities related to reaching goals of sustainable development and quality of life with respect to transport systems is implemented by pursuing the policy based on population mobility realization principle in addition to limited use of passenger cars. A state-of-the-art trolleybus, as kind of the urban public transport, is an efficient tool for attaining goals of sustainable development and quality of life, especially in areas of small and mid-sized cities. The trolleybus subsystem has a set of technical and technological, ecological, and economical advantages over other passenger transport subsystems [4–8].

Public transport as a whole should correspond to requirements of normative regulating documents [9–12] and should secure:

- high reliability and traffic safety;
- provision of maximum comfort for passengers on retention of minimal freight charges;
- demanded rate, traffic interval and passenger turnover;

- high manoeuvrability, towing performance and dynamic characteristics during operating in urban road traffic;

- minimal noise and maintenance of ecological demands.

It is obvious that the adequacy to such requirements is closely associated with the efficiency of traction and brake drives, which in turn depend on the correct scheme and design of these vehicle systems and the corresponding control algorithms.

As is well known, the operation control of a service brake system and secondary brake system (motor braking) is realized in trolleybus with the help of one pedal. Consequently, there are modes of their joint operation during the braking of a vehicle.

The results of road tests of low-floor trolleybus produced at OJSC “BELKOMMUNMASH”, Belarus, confirm that the control algorithm is demanded for the blending control of these vehicle systems during a braking to achieve the high braking efficiency of a vehicle (Fig. 1).

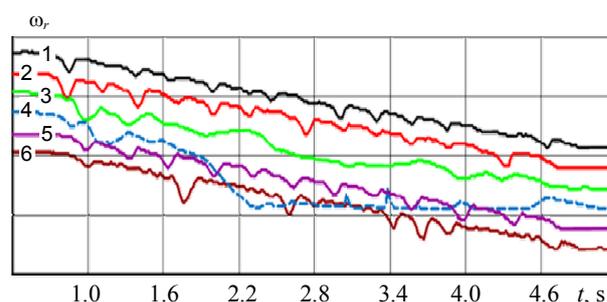


Fig. 1. Relative angular velocities of the driving wheels during emergency braking of articulated trolleybus on a wet asphalt surface using common algorithm to control the traction and brake drives: 1, 2 – wheels of front driven axle; 3, 4 – wheels of driving axle; 5, 6 – wheels of trolleybus semitrailer

Referring to Fig. 1, the sharp decrease in angular velocity of one driving wheel of trolleybus is

evident after 2.1 s from the beginning of braking on a wet asphalt surface in case of joint operation of service and secondary brake systems. There is such process in spite of the operation of common anti-lock braking system (ABS) until the complete stop of a trolleybus.

The literature survey confirms the advisability and urgency of the research activity aimed to develop the control algorithm for a blending control of the traction and brake drives to achieve high braking efficiency of the trolleybus. The corresponding information analysis also shows that the blending control of vehicle traction and brake drives will provide a possibility for the regenerative braking function and unloading wheel brakes [13].

The paper is organized as follows. The first section of the paper is devoted to developed mathematical model of trolleybus braking dynamics. This model is used to create the control algorithm for the blending control of the trolleybus traction and brake drives. The scheme and detailed description of the proposed control algorithm is presented further.

Third issue of the paper contains description of the test procedure and results of experimental tests aimed to analyse the trolleybus braking dynamics in case of usage of the developed control algorithm for the blending control of trolleybus traction and brake drives.

Mathematical model of trolleybus braking dynamics

The mathematical model of the braking dynamics of articulated trolleybus is used to develop the control algorithm for the blending control of trolleybus traction and brake drives (Fig. 2).

The developed model is based on following hypotheses:

- tractor and trailer have symmetrical weight distribution and don't accomplish lateral oscillations;
- vehicle axles are considered as point masses which have one degree of freedom and move around the vertical axle;
- tractor and trailer move in straight lines;
- stiffness characteristics of tires and suspensions are linear.

In accordance with the scheme shown in Fig. 2 the tractor moving is described by following differential equations:

$$m_t \ddot{x}_t = F_{t2} - F_1 - F_2 - F_A - Q_{ht}; \tag{1}$$

$$m_t^s \ddot{z}_t = N_{ht} - c_{s1}(z_t - l_1 \sin \alpha - y_1) - c_{s2}(z_t + l_2 \sin \alpha - y_2) - k_{s1}(\dot{z}_t - l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{y}_1) - k_{s2}(\dot{z}_t + l_2 \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{y}_2); \tag{2}$$

$$J_t \ddot{\alpha} = N_{ht} l_{ht} - (F_1 + F_2 - F_{t2}) h_t - F_A (h_A - h_t) + Q_{ht} (h_t - h_h) + c_{s1} l_1 \cos \alpha (z_t - l_1 \sin \alpha - y_1) - c_{s2} l_2 \cos \alpha (z_t + l_2 \sin \alpha - y_2) + k_{s1} l_1 \cos \alpha (\dot{z}_t - l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{y}_1) - k_{s2} l_2 \cos \alpha (\dot{z}_t + l_2 \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{y}_2); \tag{3}$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -c_{t1}(y_1 - h_1) + c_{s1}(z_t - l_1 \sin \alpha - y_1) - k_{t1}(\dot{y}_1 - \dot{h}_1) + k_{s1}(\dot{z}_t - l_1 \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{y}_1); \tag{4}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -c_{t2}(y_2 - h_2) + c_{s2}(z_t + l_2 \sin \alpha - y_2) - k_{t2}(\dot{y}_2 - \dot{h}_2) + k_{s2}(\dot{z}_t + l_2 \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{y}_2). \tag{5}$$

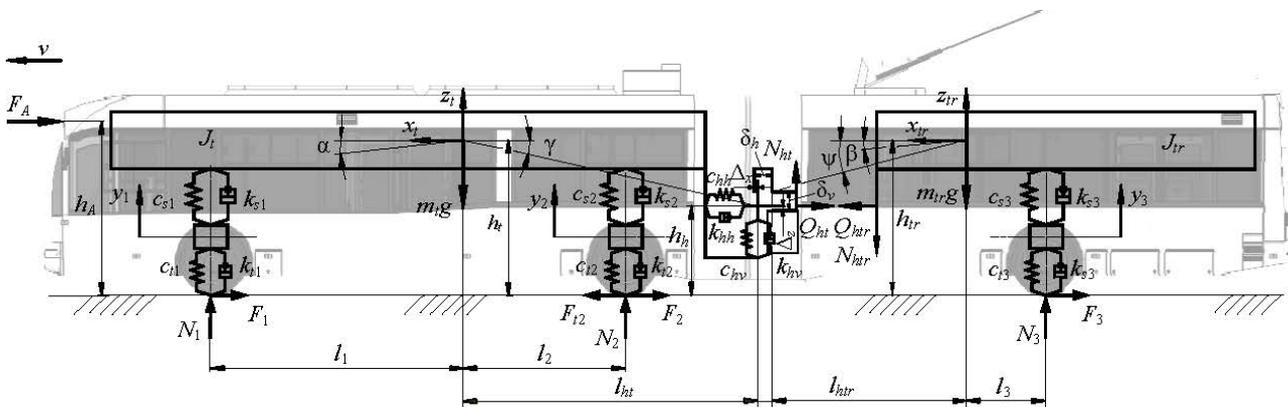


Fig. 2. Scheme of vehicle model

The trailer motion is described by corresponding simultaneous equations:

$$m_{tr}\ddot{x}_{tr} = Q_{htr} - F_3; \quad (6)$$

$$m_{tr}^s\ddot{z}_{tr} = -N_{htr} - c_{s3}(z_{tr} + l_3 \sin \beta - y_3) - k_{s3}(\dot{z}_{tr} + l_3\dot{\beta} \cos \beta - \dot{y}_3); \quad (7)$$

$$J_{tr}\ddot{\beta} = N_{htr}l_{htr} - Q_{htr}(h_{tr} - h_h) + F_3h_t - c_{s3}l_3 \cos \beta(z_{tr} + l_3 \sin \beta - y_3) - k_{s3}l_3 \cos \beta(\dot{z}_{tr} + l_3\dot{\beta} \cos \beta - \dot{y}_3); \quad (8)$$

$$m_3\ddot{y}_3 = -c_{t3}(y_3 - h_3) + c_{s3}(z_{tr} + l_3 \sin \beta - y_3) - k_{t3}(\dot{y}_3 - \dot{h}_3) + k_{s3}(\dot{z}_{tr} + l_3\dot{\beta} \cos \beta - \dot{y}_3). \quad (9)$$

The correlation between simultaneous equations is realized by means of N_{ht} , N_{htr} and Q_{ht} , Q_{htr} . These parameters are calculated:

$$Q_{ht} = Q_{htr} = \begin{cases} -\Delta_x c_{hh} - \Delta_{\dot{x}} k_{hh}, & \Delta_x < 0; \\ 0, & 0 \leq \Delta_x \leq \delta_h; \\ -c_{hh}(\Delta_x - \delta_h) - \Delta_{\dot{x}} k_{hh}, & \Delta_x > \delta_h; \end{cases} \quad (10)$$

$$N_{ht} = N_{htr} = \begin{cases} -\Delta_z c_{hv} - \Delta_{\dot{z}} k_{hv}, & \Delta_z < 0; \\ 0, & 0 \leq \Delta_z \leq \delta_v; \\ -c_{hv}(\Delta_z - \delta_v) - \Delta_{\dot{z}} k_{hv}, & \Delta_z > \delta_v. \end{cases} \quad (11)$$

Parameters Δ_x , Δ_z are defined as:

$$\Delta_x = -x_t + (b_t \cos(\gamma - \alpha) - l_{ht}) + x_{tr} - (l_{htr} - b_{tr} \cos(\psi + \beta)); \quad (12)$$

$$\Delta_z = z_t + (b_t \sin \gamma - b_t \sin(\gamma - \alpha)) - z_{tr} + (b_{tr} \sin(\psi + \beta) - b_{tr} \sin \psi). \quad (13)$$

Accordingly, the rate of deformation is calculated as:

$$\Delta_{\dot{x}} = -\dot{x}_t + b_t \dot{\alpha} \sin(\gamma - \alpha) + \dot{x}_{tr} - b_{tr} \dot{\beta} \sin(\psi + \beta); \quad (14)$$

$$\Delta_{\dot{z}} = \dot{z}_t + b_t \dot{\alpha} \cos(\gamma - \alpha) - \dot{z}_{tr} + b_{tr} \dot{\beta} \cos(\psi + \beta). \quad (15)$$

The developed model allows to investigate the dynamics of the straight line moving of a road train in case of tractor and semitrailer under different road conditions taking into account the distribution of vertical loads acting on vehicle axles. The model

is usable also for the investigation of braking dynamics of the ordinary vehicle.

Control algorithm for blending control of trolleybus traction and brake drives

One of the possible ways for a blending control of trolleybus traction and brake drives can be either complete switch-off of the electric motor (motor braking) in case of instant emergency braking. Another way is the creation of the corresponding braking torque by the electric traction motor of trolleybus, which can be completely compensated by the steadying effect from the electric motor and transmission units.

In the former case the torque input from the electric motor to driving wheels is close to zero, and the service brake system will fulfil the corresponding demands for the effective braking together with ABS. Passing of the emergency braking of the trolleybus with switched-off electric motor and characteristics of this process are shown in Fig. 3. These data have been resulted from the road tests of low-floor trolleybus.

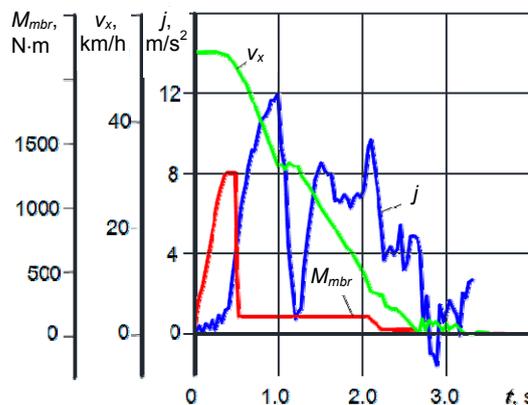


Fig. 3. Characteristics of trolleybus emergency braking with switched-off electric motor

The braking process in such situation is attended with the sharp drop of the braking torque of electric motor to 120 N·m (8.1 % of maximal value) when the deceleration of driving wheels becomes more than a set threshold which is equal to 3 m/s². Further ABS operation is accompanied by the typical control using corresponding pneumatic modulators of the service brake system. The slippage of driving wheels does not exceed 20 % on asphalt

surface in this case. Evidently, such control algorithm is not adaptive while the deceleration value depends on a road surface which is used as a set threshold. In case of low friction coefficient in the contact zone between road surface and wheels, wheel deceleration will be less than 3 m/s^2 and a system will not reduce the braking torque of electric motor during the period of critical slippage. If a set threshold is lowered, the electric motor operation would be poorer on the roads with high friction coefficient.

In the latter case, keeping the electric motor in action during the emergency braking of a trolleybus will definitely enable the unloading wheel brakes and will also guarantee the possibility of regenerative braking in modern trolleybuses.

Thus, the limit value of the braking torque is bounded by the brake characteristic of electric motor and depends on the brake pedal displacement $stup$ and the current angular velocity of electric motor shaft ω_m . Hence, the braking torque of the electric traction motor is described as follow

$$M_{mbr}^* = f(stup, \omega_m). \quad (16)$$

The slippage value S of driving wheels is used as the control parameter in proposed control algorithm for the blending control of trolleybus traction and brake drives. This algorithm secures the maximal using of the braking torque of the electric traction motor during the braking process of trolleybus. It should be underscored, that the choice of optimal method for the estimation of real vehicle longitudinal velocity is not in the scope of the current research activity. The main aim is to develop the control algorithm for the blending control of trolleybus traction and brake drives. The scheme of algorithm is depicted in Fig. 4.

Values of S_{al} and ΔS are determined in dependence of the maximal and minimal value of driving wheels slippage:

$$S_{al} = (S_{max} + S_{min})/2; \quad (17)$$

$$\Delta S = (S_{max} - S_{min})/2. \quad (18)$$

During the blending control of the trolleybus traction and brake drives a current value of driving

wheels slippage is also determined. The braking torque of the electric motor and the pressure value at brake chambers of the driving wheels p_{brc} is reduced, increased or stabilized in dependence of the slippage value.

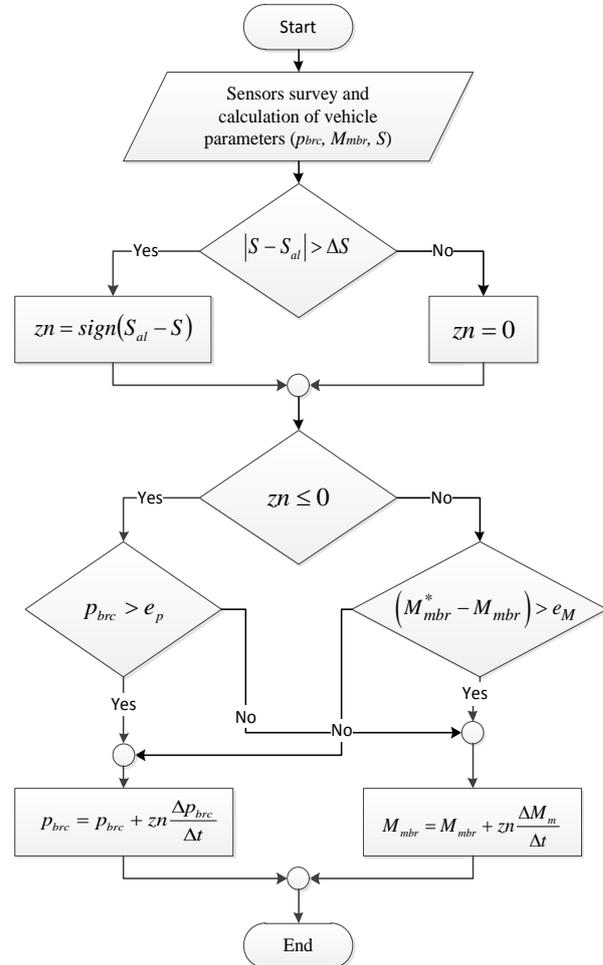


Fig. 4. Control algorithm for joint operation of trolleybus traction and brake drives

The next order is retained in doing so:

1) p_{brc} is reduced primarily when S is more than S_{max} . Pressure release phase proceeds as long as S is set to a range of allowed values. If p_{brc} becomes atmospheric and S isn't set to a range of allowed values then the second phase comes and the braking torque of electric motor is reduced at that;

2) if S is insignificant the operating order is inverse. M_{mbr} is increased firstly. If it is not enough, i. e. slippage value is still not recover the demanded level, then p_{brc} is increased further;

3) if S is in a range of allowed values so values of M_{mbr} and p_{brc} are stabilized.

Consequently, the control algorithm should supply next interconnected characteristics during the blending control of trolleybus traction and brake drives as:

$$\begin{aligned} M_{mbr} &= f(stup, \omega_m, S, p_{brc}); \\ p_{brc} &= f(stup, S, M_{mbr}). \end{aligned} \quad (19)$$

The control of braking forces values for driven wheels is realized based on the common principles and algorithms.

Fig. 5 shows the simulation results of trolleybus braking on different road surfaces using the developed mathematical model of braking dynamics of trolleybus and the control algorithm for blending control of its traction and brake drives.

According to [9] one of the main parameters of a vehicle brake system efficiency as well as ABS operation is the mean value of limiting deceleration j which is determined during the braking on road surfaces with a high friction coefficient. The next main parameter is the coefficient of realized friction k_φ on different road surfaces. Authors mean that this parameter is determined as

$$k_\varphi = \frac{j}{g\varphi}. \quad (20)$$

It follows from the Fig. 5a that the deceleration value j is equal to 6.4 m/s^2 during the braking on the asphalt road surface. It should be mentioned, that the deceleration value should be no less

than 4 m/s^2 for such vehicle type in this case [9]. And the required value of the coefficient of realized friction k_φ should be no less than 0.75 [9]. Accordingly, k_φ equals 0.77 on the asphalt road surface and is equal to 0.8 on a rolled snow road.

Consequently, the correspondent results of computer simulation show:

- availability of the proposed control algorithm for blending control of the trolleybus traction and brake drives. It secures the required efficiency of the trolleybus brake system;
- high braking efficiency of the trolleybus is retained on different road surfaces;
- good operation consistency of the traction and brake drives and the possibility for integration of these systems in uniform one for the trolleybus braking control.

Experimental investigation of trolleybus braking dynamics

Road tests of low-floor trolleybus have been aimed to determine the parameters of braking efficiency during the blending control of trolleybus traction and brake drives using proposed control algorithm. Validation of developed mathematical model of the trolleybus braking dynamics also was evaluated during these tests. The scheme of the trolleybus brake system is presented in Fig. 6.

The arrangement of measuring equipment on trolleybus during the carrying out of road tests and its scheme is depicted in Fig. 7.

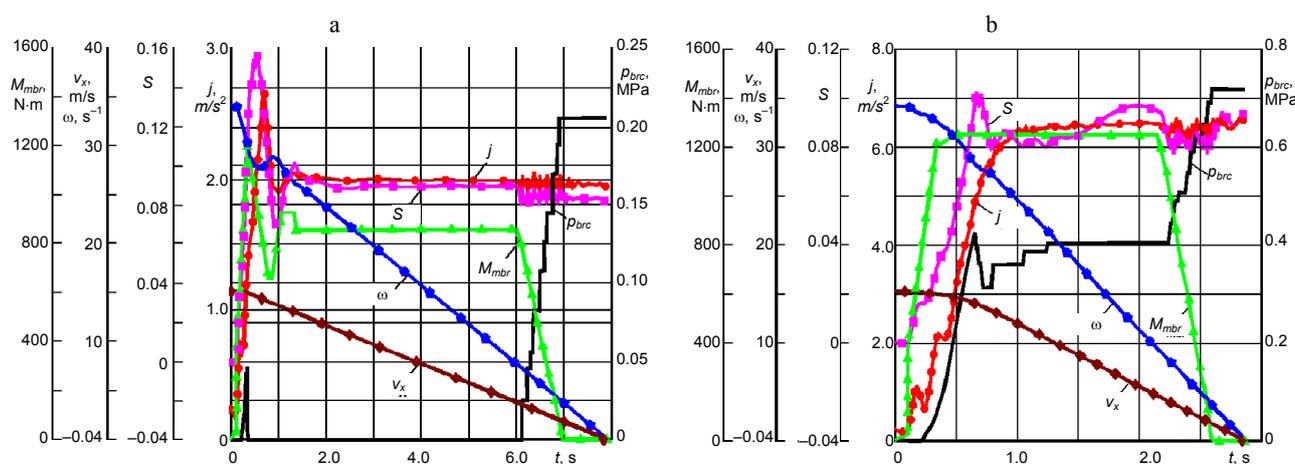


Fig. 5. Results of trolleybus braking process on different road surfaces using developed mathematical model and control algorithm: a – snow-covered road; b – asphalt road surface

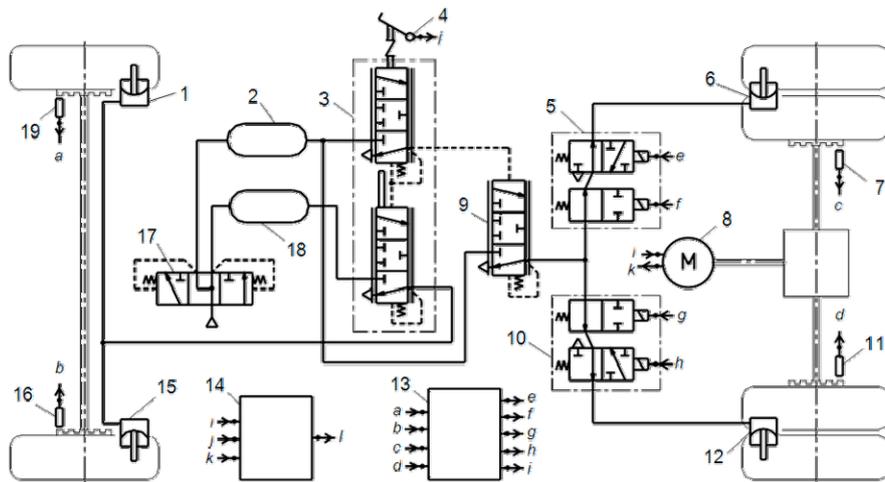


Fig. 6. Scheme of trolleybus brake system: *a-l* – input and output signals; 1, 6, 12, 15 – brake chambers; 2, 18 – reservoirs; 3 – two-sectional brake valve; 4 – sensor of brake pedal displacement; 5, 10 – ABS modulators; 7, 11, 16, 19 – wheel speed sensors; 8 – traction electric motor; 9 – acceleration valve; 13 – ECU of ABS; 14 – ECU of electric motor; 17 – two-circuit protective valve

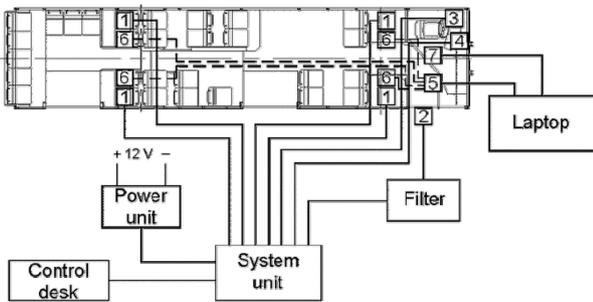


Fig. 7. Scheme and arrangement of measuring equipment: 1 – air pressure sensor at brake chamber; 2 – optical sensor of trolleybus displacement, velocity and deceleration; 3 – brake pedal sensor; 4 – digital display showing current values of measurable quantities; 5 – ECU of the trolleybus ABS; 6 – wheel speed sensor; 7 – ECU of the trolleybus electric motor

The measuring complex contained the set of Datron EEP-3 measuring equipment, inbuilt diagnostics and control system of the trolleybus, which is connected with on-board computer and ABS units, and allows measuring a travelled distance, velocity, deceleration, time of process acquisition, air pressure at brake chambers of driving wheels (Fig. 8).



Fig. 8. Measuring tooling Datron and its arrangement on trolleybus

The process of the trolleybus emergency braking on the roads with a different value of friction coefficient was investigated during the carried out road tests.

As a result it was found out that the trolleybus driving and driven wheels are locked after 0.5 s since the braking start without ABS operation on a wet asphalt road surface. Driven wheels of the trolleybus are not locked in case of common ABS operation during the emergency braking on a snow-covered road surface (Fig. 9a). As this takes place, the driving wheels are locked after 0.5 s since the braking start for a long periods while the braking torque of electric motor is out of control.

As shown in Fig. 9b, the proposed control algorithm for the blending control of trolleybus traction and brake drives provides ABS operation in a cyclic mode without locking the wheels even during the emergency braking on a snow road surface until the reaching of the minimal trolleybus velocity (approx. 6 km/h) when ABS stops operating.

Fig. 10 illustrates some characteristics of the trolleybus acceleration dynamics and allows estimate the efficiency of the proposed control algorithm during the operation of vehicle anti-slip regulation system (ASR). The efficiency is estimated using values of the driving wheels slippage of trolleybus equipped with ASR and without it. Referring to Fig. 10, the slippage value of each driving wheel reaches 65 % without ASR. And this value does not exceed 15 % during ASR operation.

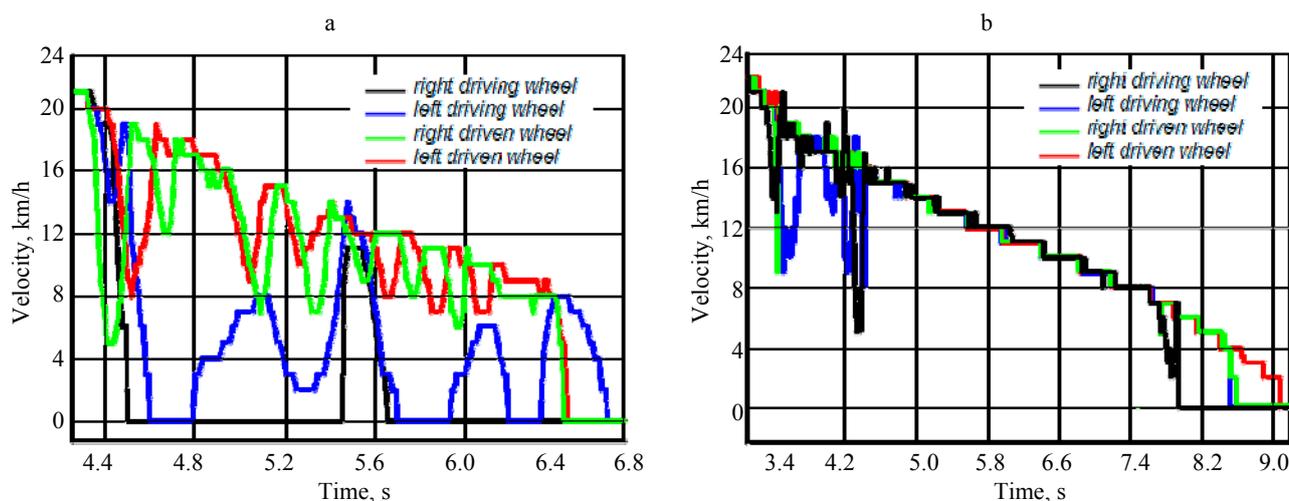


Fig. 9. Velocities of trolleybus driving and driven wheels during emergency braking on a snow-covered road with conventional ABS control algorithm (a) and developed algorithm for joint operation of trolleybus traction and brake drives (b)

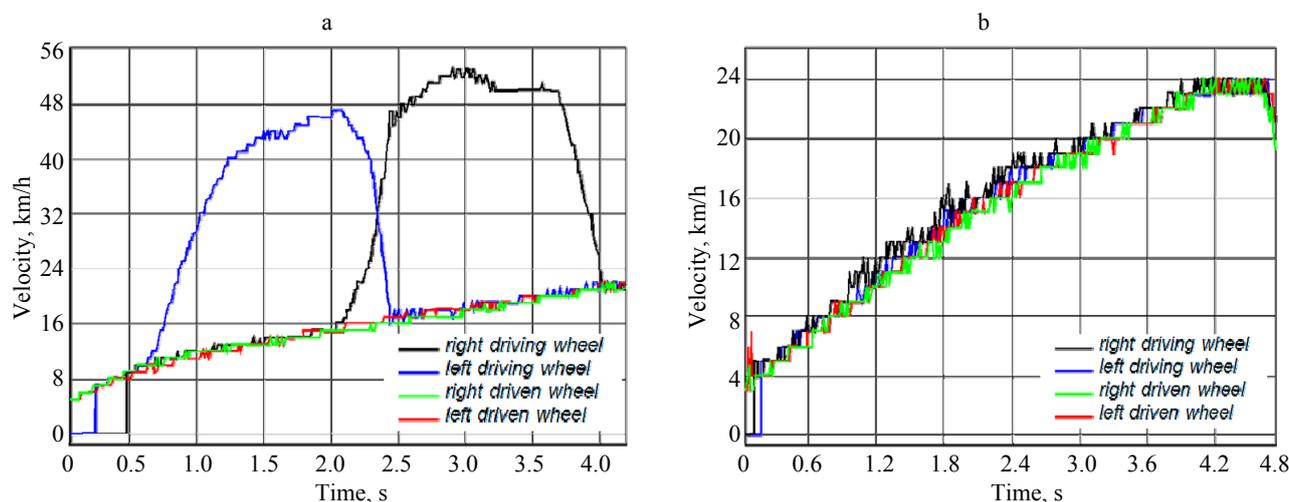


Fig. 10. Velocities of trolleybus driving and driven wheels during acceleration mode without ASR operation (a) and during ASR operation using developed control algorithm (b)

CONCLUSIONS

1. The developed mathematical model of the braking dynamics of articulated trolleybus described in the first section of the paper is usable for the investigation of braking and traction dynamics as well as of articulated trolleybus and ordinary vehicle.

2. The second problem investigated in the paper (section “Control algorithm for the blending control of trolleybus traction and brake drives”) is concerned with the development of the control algorithm for the blending control of trolleybus traction and brake drives to achieve high braking efficiency of a vehicle.

3. Computer simulation of the trolleybus braking were carried out on an asphalt surface and snow-covered road. It was estimated that the deceleration value is equal to 6.4 m/s^2 during the braking on an asphalt road surface. And the value of coefficient of realized friction equals 0.77 on an asphalt road surface and is equal to 0.8 on a rolled snow road.

4. The parameters of the trolleybus braking efficiency were estimated during the blending control of its traction and brake drives using the developed control algorithm during the carrying out road tests of low-floor trolleybus. Validation of the developed mathematical model of trolleybus bra-

king dynamics was evaluated during these tests. The efficiency of trolleybus brake system was analysed in accordance to [9]. It was indicated, that the proposed control algorithm provides ABS operation in a cyclic mode without locking the wheels even during the emergency braking on a snow road surface.

5. As a consequence, the availability of the proposed control algorithm was confirmed for the blending control of trolleybus traction and brake

drives. It secures the required efficiency of the trolleybus brake system. Enhancement of braking process quality was shown, which is passed under optimal values of wheel slippage – 8–10 %. As a result, high braking stability is retained on different road surfaces. Good operation consistency of the traction and brake drives and the possibility for integration of these systems in uniform one was demonstrated for the trolleybus braking and traction control.

Notation:

- ABS – anti-lock braking system;
 ASR – anti-slip regulation system;
 b_t, b_{tr} – distance between hitch point and the tractor and trailer centre of gravity respectively;
 c_{hh}, c_{hv} – hitch stiffness in horizontal and vertical direction respectively;
 c_{ti}, c_{si} – longitudinal tire and suspension stiffness respectively of trolleybus axle;
 e_M – deadband for the braking torque of the electric motor;
 e_p – deadband for the pressure in a brake chamber;
 F_A – longitudinal aerodynamic resistance force;
 F_i – tire rolling resistance force;
 F_{12} – traction force of trolleybus driving axle;
 g – free-fall acceleration;
 h_A – height of aerodynamic centre;
 h_h – height of trailer hitch;
 h_i, \dot{h}_i – height of road roughness's and a rate of its change respectively;
 h_t, h_{tr} – height of tractor and trailer centre of gravity respectively;
 k – coefficient depending on trolleybus capacity rate;
 I_{mr} – inertia moment of rotating parts of electric motor and transmission units;
 j – vehicle deceleration;
 J_t, J_{tr} – inertia moment of tractor and trailer body respectively;
 k_{hh}, k_{hv} – hitch damping in horizontal and vertical direction respectively;
 k_{ti}, k_{si} – longitudinal tire damping and suspension damping of trolleybus axle respectively;
 k_φ – coefficient of realized friction;
 l_{ht}, l_{htr}, l_i – geometrical parameters of trolleybus;
 M_m – traction torque of electric motor;
 M_{mbr} – braking torque of electric motor;
 M_{mbr}^* – limit braking torque of electric motor depending on displacement of brake pedal and angular velocity of electric motor shaft;
 m_i – unsprung mass of trolleybus axle;
 m_t, m_t^s – total and sprung tractor mass respectively;
 m_{tr}, m_{tr}^s – total and sprung trailer mass respectively;
 N_{ht}, N_{htr} – the component of vertical force acting on tractor and trailer respectively from hitch;
 p_{brc} – current value of pressure at brake chambers of driving wheels;
 p_a – atmospheric pressure at brake chambers of driving wheels;
 Q_{ht}, Q_{htr} – the component of horizontal force acting on tractor and trailer respectively from hitch;
 S – current value of driving wheels slippage;
 S_{al} – allowed mean value of driving wheels slippage;
 S_{max} – maximal value of driving wheels slippage;
 S_{min} – minimal value of driving wheels slippage;
 $stup$ – displacement of brake pedal;

t	– time;
v_x	– trolleybus longitudinal velocity;
x_t, x_{tr}	– horizontal displacement of tractor and trailer centre of gravity respectively;
y_i	– vertical displacement of trolleybus axle;
zn	– sign in dependence on slippage level ($zn = 1$ at high slippage value, $zn = -1$ at low slippage value and $zn = 0$ – slippage value is normal);
z_t, z_{tr}	– vertical displacement of tractor and trailer centre of gravity respectively;
α, γ	– rotation angles of tractor body around an axis passing through its centre of gravity;
β, ψ	– rotation angles of trailer body around an axis passing through its centre of gravity;
δ_h, δ_v	– horizontal and vertical component respectively of hitch gap;
ε_m	– angular deceleration of electric motor shaft;
μ	– friction coefficient in a contact between road surface and tire;
ω	– angular velocity of driving wheel;
ω_r	– relative angular velocity of driving wheel;
ω_m	– angular velocity of electric motor shaft;
Δ_x, Δ_z	– horizontal and vertical component respectively of hitch compressive deformation;
ΔS	– range of allowed values of driving wheels slippage.

REFERENCES

1. Environmental Protection UK. Car pollution. Available at: <http://www.environmental-protection.org.uk/transport/car-pollution/> (Accessed 16 February 2011).
2. European Commission (2010) *TROLLEY Project: European Know-How & Cooperation*. INTERREG IVB CENTRAL EUROPE Programme.
3. European Commission, EGCI Ad-Hoc Industrial Advisory Group (2011) *European Green Cars Initiative, Multi-annual Roadmap and Long-Term Strategy*. Luxembourg: Publications Office of the European Union. 84.
4. Tica S., Filipović S., Živanović P., Bajčetić S. (2011) Development of Trolleybus Passenger Transport Subsystems in Terms of Sustainable Development and Quality of Life in Cities. *International Journal for Traffic and Transport Engineering*, 1 (4), 196–205.
5. Swedish Transport Communications Research Board (2000) *New Concepts for Trolley Buses in Sweden*. ScanTech Development AB. 40.
6. *The Benefits of Clean, Quiet, Emission-Free Transit Service: Promoting the Trolleybus in Vancouver, Information and Materials Package*. The TBus Group, 2001. 39.
7. *Trolleybus and Gas Bus Technology. Trends, Developments and Comparisons*. NORCONSULT AS, 2010. 119.
8. Romana L. (2010) *Potential Solutions for Electric Vehicles in Bus and Delivery Traffic: MSc Thesis*. Aalto University School of Science and Technology. 95.
9. Regulations No 13(10) EEC UNO, Geneva, Release 6.
10. Regulations No 36(03) EEC UNO, Geneva, Release 3.
11. Regulations No 51(02) EEC UNO, Geneva, Release 1.
12. Regulations No 107(02) EEC UNO, Geneva, Release 1.
13. Toth-Antal B. (2011) *Brake Resize Investigation Tool for Regenerative Braking*. LCVTP Event.

Received: 08.10.2019

Accepted: 29.11.2019

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-142-149>

УДК 628.4

Вакуумный пневмотранспорт для производственных и коммунально-бытовых компонентов

Канд. техн. наук А. Н. Пехота¹⁾,
акад. НАН Беларуси, докт. техн. наук, проф. Б. М. Хрусталеv²⁾,
докт. техн. наук В. Д. Акельев²⁾, магистрант А. А. Михальченко¹⁾

¹⁾Белорусский государственный университет транспорта (Гомель, Республика Беларусь),

²⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Образование коммунально-бытовых компонентов жизнедеятельности человека и производственных предприятий неизбежно, уровень их использования в Беларуси в среднем увеличился до 23 %. В статье дана оценка существующих систем сбора и удаления отработанных твердых бытовых элементов исходя из технологических этапов (подготовка компонентов к погрузке в мусороуборочный транспорт; организация их временного хранения в домовладениях, на предприятиях; сбор и вывоз с территорий домовладений, организаций и предприятий; обезвреживание, переработка, утилизация). Рассмотрены последствия несвоевременного сбора твердых бытовых и производственных отходов. Приведены факторы, оказывающие негативное влияние на среду обитания человека и экологию территорий населенных пунктов, предприятий. Представлен анализ эффективности своевременного удаления таких компонентов в системах коммунального хозяйства городов и предприятий как важной составляющей, обеспечивающей социальную, экономическую и экологическую значимость. На современном этапе развития техники и доступных технологий один из наиболее рациональных и экономически оправданных способов доставки отработанных элементов к участкам их сортировки и переработки – вакуумная транспортировка с помощью трубопроводного транспорта. Его применение обосновано в промышленных зонах, населенных пунктах с высокой и средней плотностью заселения, причем прокладывать такой трубопровод можно рядом с существующими трубопроводными и иными транспортными коммуникациями.

Ключевые слова: элементы, транспортировка, экология, технология, баланс, вакуум, плотность, параметры, утилизация

Для цитирования: Вакуумный пневмотранспорт при использовании производственных и коммунальных отходов / А. Н. Пехота [и др.] // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 142–149. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-142-149>

Vacuum Pneumatic Transport for Industrial and Utility Components

A. N. Pekhota¹⁾, B. M. Khroustalev²⁾, V. D. Akeliev²⁾, A. A. Mikhalchenko¹⁾

¹⁾Belarusian State University of Transport (Gomel, Republic of Belarus),

²⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Waste generation in the life of people and enterprises is an inevitable process today. The level of utilization of municipal waste has increased on average to 23 % in Belarus. The paper provides an assessment of the existing

Адрес для переписки

Хрусталеv Борис Михайлович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-52
tg_v_fes@bntu.by

Address for correspondence

Khroustalev Boris M.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-52
tg_v_fes@bntu.by

systems for the collection and disposal of waste solid household items based on technological stages (preparation of waste for loading into a garbage collection vehicle; organization of temporary storage of waste in households, at enterprises; collection and removal of waste from the territories of households, organizations and enterprises; neutralization, processing and recycling of waste). The consequences of untimely collection of solid household and industrial waste are considered in the paper. The paper presents the factors that have a harmful effect on the human environment and the ecology of the territories of settlements and enterprises. An analysis of the effectiveness of the timely removal of such components in the systems of municipal services of cities and enterprises as an important component providing social, economic and environmental significance is given in the paper. At the present stage of the development of technology and available technologies, one of the most rational and economically justified ways of delivering waste to the areas for their sorting and processing is vacuum transportation using pipeline transport. Its application is justified for industrial zones and settlements with high and medium population density. Moreover, such a pipeline can be laid next to existing pipeline and other transport communications.

Keywords: elements, transportation, ecology, technology, balance, vacuum, density, parameters, disposal

For citation: Pekhota A. N., Khroustalev B. M., Akeliev V. D., Mikhailchenko A. A. (2021) Vacuum Pneumatic Transport for Industrial and Utility Components. *Science and Technique*. 20 (2), 142–149. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-142-149> (in Russian)

Введение

Особенностью процесса сбора отработанных коммунально-бытовых компонентов является то, что в работе транспортных средств значительное время (25–40 % и более) занимает продолжительность погрузо-разгрузочных операций, в связи с чем актуальными остаются проблемы безопасности их движения и экологической обстановки в различных районах, расхода топливно-энергетических ресурсов.

Один из способов решения перечисленных проблем – внедрение вакуумных систем с применением трубопроводного пневмотранспорта. Пневматический сбор и транспортировка вторичных компонентов реализуются во многих странах. Это эффективный метод транспортировки и обработки коммунально-бытовых отходов. Трубопроводы для их перемещения можно использовать независимо от расстояния. При этом автоматизированная система сбора и удаления компонентов обладает широким потенциалом технических возможностей для сбора и перемещения компонентов различных фракций [1].

Среди проблем в системах сбора компонентов можно выделить:

- антисанитарное состояние территории (особенно в теплое время года);
- наличие диффузионных потоков от транспортных объектов до пунктов приема (сортировки);
- выделение вредных веществ в окружающую среду при движении мусоровозов от мест их сбора до пункта приема (сортировки).

Основная часть

Пневматические системы транспортирования многообразных компонентов с использованием трубопроводов могут способствовать решению перечисленных задач. Для их функционирования необходимо создать групповые системы сортировки, представленные в виде технических элементов:

- селитебные территории, группы населенных территорий с крупными сооружениями для сортировки многофазных материалов к месту переработки;

- районы с установками малой производительности для сортировки и подготовки к доставке к узлам переработки отходов;

- группы объектов, коммунальных сооружений, производственных предприятий с элементами для сортировки и подготовки к доставке к участкам реабилитации вторичных компонентов;

- группы объектов, коммунальных сооружений, производственных предприятий с установками для транспортировки специальных видов отходов.

Технология вакуумной транспортировки отходов появилась еще в середине прошлого века и используется для транспортирования различных, в первую очередь сыпучих, материалов. Ее применение обосновано для промышленных зон, населенных пунктов с высокой и средней плотностью заселения, поскольку у пневматической установки закрытая система трубопроводов. Кроме того, есть и такие преимущества, как, например, отсутствие запахов, поступаю-

щих из нее в атмосферу. Благодаря постоянно поддерживаемому отрицательному давлению в системе не возникают утечки жидких компонентов. Высокая скорость (3,5–5,0 м/с) транспортирования смеси «твердые частицы – воздух – жидкость» в трубах предотвращает образование отложений [2]. Внедрение этой технологии в масштабах Республики Беларусь несложно осуществить, учитывая наличие пластиковых трубопроводов, производимых белорусскими предприятиями, а также промышленных вакуумных установок компаний Roediger, Airvac, ISEKI и их российских аналогов.

Пневматические системы транспортировки компонентов к участкам сортировки и переработки наиболее рациональны и экономически оправданы. Технологическую схему работы установки отходаотведения можно представить следующим образом. На поверхности в участках сбора коммунальных компонентов устанавливаются приемные контейнеры, возвышающиеся над землей на высоту до 1 м. Приемная часть маркируется расцветками с дополнительным размещением надписей, символов (рис. 1).

Система может функционировать следующим образом. На участке сбора расположены три люка – для сбора бумаги, картона и смешанных компонентов. Жители опускают туда

рассортированные коммунально-бытовые отходы в полиэтиленовых или бумажных пакетах объемом до 30 л. Опыт эксплуатации показывает, что наилучшее качество транспортировки – при заполнении пакета на 2/3. Под контейнерами располагается сеть подземных трубопроводов, оборудованная централизованной управляемой системой клапанов с автоматизированным открытием.

Работа системы осуществляется по определенным алгоритмам – согласно времени, степени наполнения и др. При открытии клапанов посредством поступления в магистраль воздушной фазы за счет работающей вакуумной установки в магистрали создается разрежение, и компоненты поступают в основной трубопровод, а затем – к участкам сбора, переработки, складирования. Отходы, доставленные к месту их сбора, сортируются и поступают либо непосредственно на переработку, либо на оборудование, обеспечивающее их уплотнение, для осуществления дальнейшего перемещения с применением наземных видов транспорта. По мере накопления они транспортируются на специализированные перерабатывающие предприятия [3]. На рис. 2 представлена упрощенная схема транспортировки компонентов из жилого микрорайона к месту их переработки.

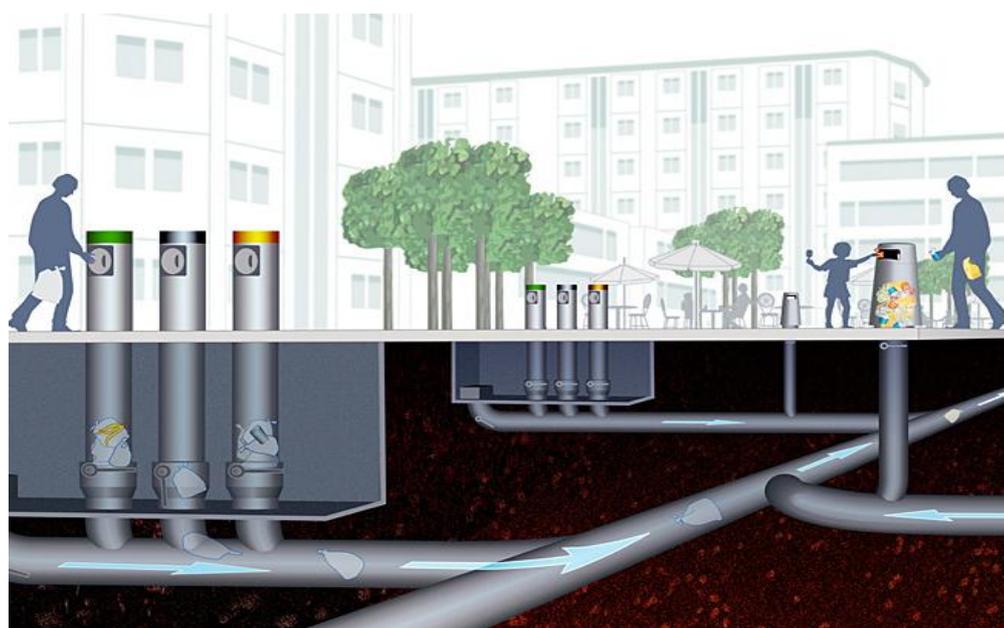


Рис. 1. Схема пневматической системы транспортировки неоднородных элементов в городском районе

Fig. 1. Diagram of pneumatic system for transporting heterogeneous elements in urban area

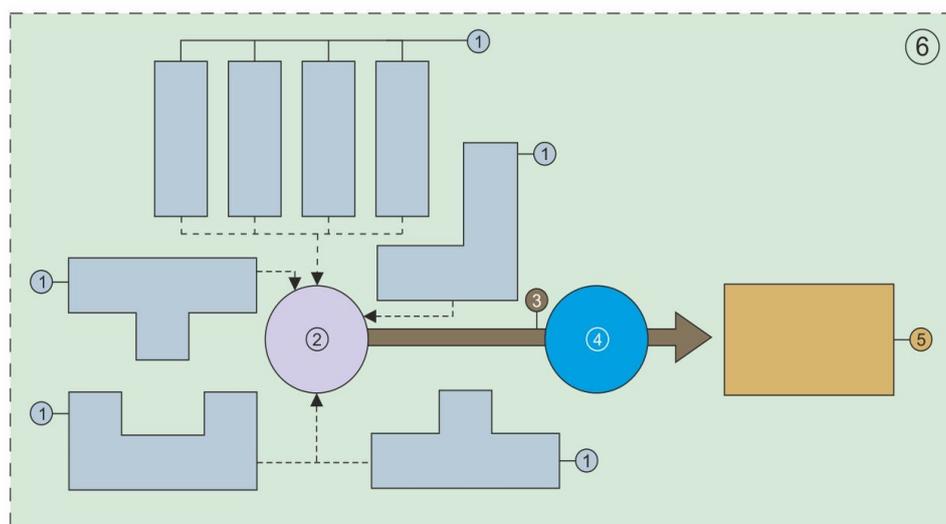


Рис. 2. Схема транспортировки компонентов из жилого микрорайона к месту их переработки:
 1 – здания и сооружения микрорайона города; 2 – место сбора отходов; 3 – пневматический трубопровод;
 4 – место приема отходов, подготовка материала (сырья, отходов) к многокомпонентному брикетированию;
 5 – цех переработки отходов (дробление, измельчение) и изготовления брикетов; 6 – микрорайон города

Fig. 2. Schematic diagram of component transportation from residential area to the place of their processing:
 1 – buildings and structures of city micro-district; 2 – waste collection point; 3 – pneumatic pipeline;
 4 – waste collection point, preparation of material (raw materials, waste) for multicomponent briquetting;
 5 – waste processing shop (crushing, grinding) and production of briquettes; 6 – micro-district of the city

В период эксплуатации протяженность сети транспортных трубопроводов может значительно увеличиться за счет подключения новых объектов. При этом также изменяется масса транспортируемых отходов, что, конечно, вызовет определенную нагрузку на работающую вакуумную установку. С целью бесперебойной работы системы на определенных участках существует сверхвысокое техническое разрежение. Ступенчатое разрежение можно создавать за счет включения в систему резервного вакуумного насоса, автоматически подключаемого в последовательную схему работы двух насосов. Один из них создает форвакуум (предварительное разрежение), а второй – из низкого более высокий вакуум. Минимальное давление, которого можно достичь с помощью современных вакуумных установок, достигает 10^{-16} мм рт. ст. Таким образом, применение комбинированных систем создания различных уровней разрежения позволяет транспортировать компоненты в широком диапазоне морфологического состава, разной плотности и с наличием жидких фаз.

На промышленных предприятиях всевозможных компонентов образуется достаточно много. Например, в ОАО «Белшина» их только

в одном цеху может быть до 23 видов. Они складываются и накапливаются в отдельных контейнерах, где находятся до соответствующих технологических операций. Чаще всего при вывозе с территории предприятия отходов мусоровозами невозможно укомплектовать их только однородными компонентами. Поэтому они сгружаются совместно, что в дальнейшем увеличивает объем работ по их сортировке для применения в доступных технологиях переработки. При трубопроводной транспортировке компонентов, как правило, исключается возможность их смешивания или засорения ими трубопровода. Отходы транспортируются к местам утилизации или вторичной обработки по мере их накопления в соответствии с принятым алгоритмом.

Упрощенная схема утилизации различных видов отходов промышленного предприятия представлена на рис. 3 [4–9]. Данная система позволяет с наименьшими затратами транспортировать компоненты к участкам их переработки, что актуально при создании производств по переработке смесей, например в многокомпонентное твердое топливо (RDF- и MSF-топливо). Эта система уже получила широкое распространение благодаря ряду преимуществ.

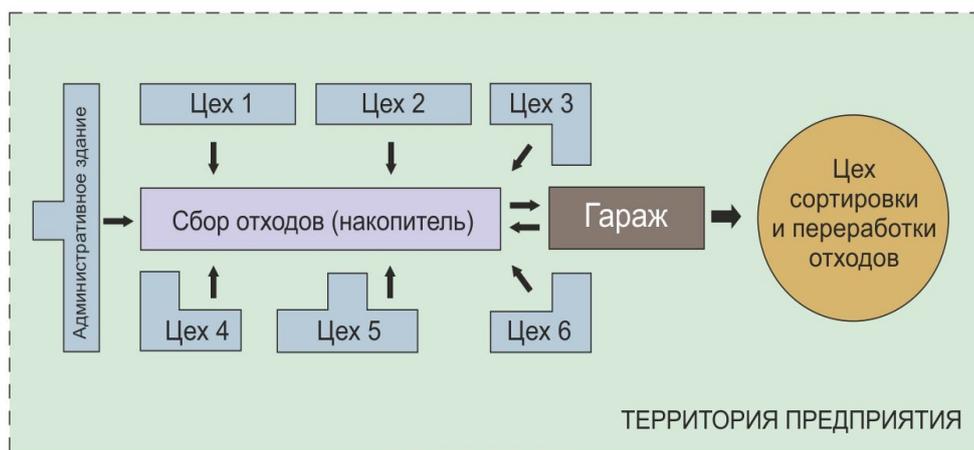


Рис. 3. Схема утилизации различных видов отходов промышленного предприятия

Fig. 3. Schematic diagram for disposal of various types of industrial waste

Сдерживающим фактором широкого распространения такой системы является отсутствие теоретически обоснованного алгоритма расчета. Недостаток существующей теоретической базы обусловил тот факт, что для определения диаметра труб вакуумной сети служат фиксированные решения в таблицах с ориентировочными значениями [10]. Сложность создания расчетных формул заключается в особенностях транспортирования отходов под действием вакуума, а именно – транспортировки многофазной среды «жидкость – воздух – твердые частицы» в трубопроводах с уклоном к горизонту. Пренебрегать расчетами, учитывающими поправки к характеристикам в зависимости от изменения уклона, нельзя, так как уклон неизбежно образуется при строительно-монтажных работах на застроенных территориях и прокладке трубопроводных вакуумных систем вблизи существующих инженерных коммуникаций. Однако на примере математического описания движения водовоздушной смеси [11–13] можно создать алгоритм расчета вакуумной трубопроводной системы транспортировки компонентов, учитывая верифицированную теоретическую базу расчета пневматического движения твердых фракций частиц, применяемых в системах трубопроводного транспорта сыпучих материалов.

Исследование и его результаты

С целью решения задачи создания и применения на практике алгоритма расчета вакуумных систем транспортировки отходов, а также

сравнения полученных результатов с уже имеющимися проведен ряд исследований с использованием экспериментальной установки, обеспечивающей транспортировку отходов под вакуумметрическим давлением в трубопроводах наружной канализации (диаметр 110 мм, толщина 3,2 мм, вакуумметрическое давление 20–40 кПа) производства УП «СТС-Беллопластик» НПВХ SN4. В результате исследований определено, что максимальная скорость транспортирования отходов v_s достигается при объемном расходе воздуха $\varepsilon = 0,71–0,74$, при котором соотношение «твердые частицы – воздух – жидкость» $Q_G/Q_L = 0,3–0,4$ [13].

На плотность смеси отходов также влияет распределение фаз по длине трубопровода, что, в свою очередь, зависит от структуры потока. Для определения режима движения газожидкостной смеси под действием вакуума выполнен ряд экспериментов на лабораторной установке. Определено, что режим движения в системе изменяется по длине трубопровода, что, скорее всего, связано с особенностью устройства системы вакуумной транспортировки отходов. Поэтому расчет системы необходимо выполнять для каждого участка, на котором происходит изменение структуры движения.

Общие потери давления в системе Δp определяются для каждого участка отдельно с учетом гидропневматических параметров, влияющих на величину градиента давления именно на нем в зависимости от длины участка l [13]

$$\Delta p = \int_0^l \left(\frac{dp}{dx} \right) dx = \left(\frac{dp}{dx} \right)_{1-2} l_{1-2} + \left(\frac{dp}{dx} \right)_{2-3} l_{2-3} + \left(\frac{dp}{dx} \right)_{3-4} l_{3-4} + \left(\frac{dp}{dx} \right)_{4-5} l_{4-5}. \quad (1)$$

При анализе результатов экспериментальных исследований с использованием теории подобия известны соотношения отдельных геометрических и технологических параметров функционирования реальных, экспериментальных вакуумных систем. В общем виде зависимость потерь давления в системе при вакуумном транспортировании можно представить следующим образом:

$$\Delta p = f(\rho_s, v_s, d, l, \mu_s), \quad (2)$$

где Δp – потеря давления, Па; ρ_s – плотность компонентов, кг/м³; v_s – скорость транспортирования смеси коммунальных компонентов, м/с; d – диаметр канала, м; l – длина коммуникаций, м; μ_s – коэффициент динамической вязкости системы, Па·с.

При решении системы уравнений, составленной с использованием матрицы степени размерности величин представленной зависимости, получен критерий подобия, включающий аэро- и гидродинамические, а также геометрические параметры движения компонентов в цилиндрических коммуникациях

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p d}{v_s^2 \rho_s l}. \quad (3)$$

Аэродинамический расчет системы должен быть представлен таким образом, чтобы в то время, когда в ней отсутствует транспортировка, обеспечивался минимальный уровень вакуума, а время на его восстановление в системе не превышало требуемого значения. При нахождении диаметра не следует увеличивать скорость потока более чем на 5 м/с, поскольку это значение оптимальное для его функционирования, а большая скорость вызывает избыточное трение и потери при ускорении. Установлено, что:

– увеличение соотношения воздуха в системе «твердые частицы – воздух – жидкость» с использованием вакуумного воздуховпускного клапана, интегрированного в систему автоматического поддержания давления и загрузки,

может повысить производительность вакуумной системы;

– благодаря увеличению притока воздуха в систему подается больше энергии, что позволяет повысить скорость движения смеси, но это неприемлемо для некоторых видов производственных отходов и многокомпонентных смесей, поскольку приводит к снижению скорости и производительности вследствие увеличения потерь давления на трение и адгезию. Поэтому в аэро- и гидродинамических расчетах необходимо учитывать как статические, так и динамические факторы трубопроводной системы.

Основным параметром, характеризующим эффективную работу системы и выбор оборудования при транспортировании, является величина создаваемого в трубопроводной сети вакуума, который зависит от аэро- и гидродинамических потерь энергии на трение и местные сопротивления на участках трубопровода. Это значит, что расчет системы в первую очередь должен быть направлен на учет всех потерь энергии в системе, в результате чего можно определить расчетную величину вакуумметрического давления. При расчете технологических многокомпонентных систем для транспортировки многофазных смесей необходимо корректно определить их плотность. Отдельно с помощью (1) следует вычислить потери давления на участке Δp . Алгоритм расчета вакуумных систем показан на рис. 4.

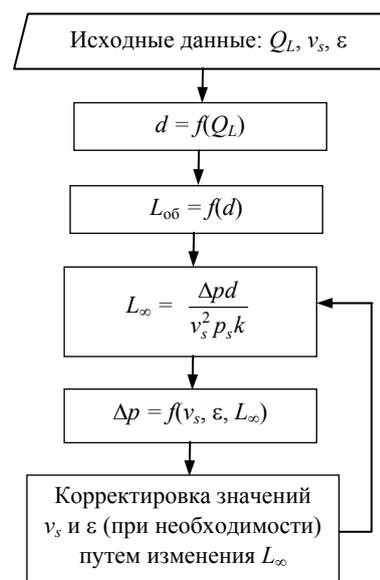


Рис. 4. Алгоритм расчета вакуумных систем
Fig. 4. Algorithm for vacuum systems calculating

Представленный метод расчета систем вакуумного транспортирования позволит подобрать диаметр трубопровода, определить объем транспортирования твердых бытовых отходов (ТБО) и воздуха, вакуумметрическое давление, необходимое для транспортировки отходов, длины расчетных участков, вычислить скорость воздушной смеси на расчетном участке вакуумной системы. Согласно полученным данным, при одинаковых диаметрах трубопровода с увеличением длины расчетного участка потери давления возрастают. Из этого можно сделать вывод, что для соблюдения заданных параметров работы системы вакуумного транспортирования ТБО (скорость транспортировки отходов, воздухо содержание, потери давления) при подобранном диаметре трубопровода главный регулируемый фактор – длина расчетного участка.

Средняя плотность транспортируемых компонентов

$$\bar{\rho}_s = \frac{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \dots + \rho_i}{x_1 + x_2 + \dots + x_i}, \quad (4)$$

где $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i$ – плотность $1^{20}, 2^{20}, \dots, i^{20}$ компонентов, кг/м³ (неорганических, полимерных, древесных, стеклянных); $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$; $\rho_2 = \frac{m_2}{V_2}$;

$\rho_i = \frac{m_i}{V_i}$; m_1, m_2, \dots, m_i – масса $1^{20}, 2^{20}, \dots, i^{20}$ компонентов, кг; V_1, V_2, \dots, V_i – объем $1^{20}, 2^{20}, \dots, i^{20}$ компонентов, м³.

Линейную плотность теплопередачи q_e от транспортируемых компонентов в однослойной цилиндрической коммуникации к атмосферному воздуху в зимний и переходные периоды года, к пограничному воздушному слою у внешней поверхности трубопровода при стационарных теплоаэродинамических расчетах можно найти из уравнения

$$q_e = \frac{\pi(\bar{t}_{\infty,1} - \bar{t}_{\infty,2})}{\frac{1}{\bar{\alpha}_{0,1} d_{0,1}} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\bar{\alpha}_{0,2} d_{0,2}}}, \quad (5)$$

где $\bar{t}_{\infty,1}$ – средняя температура воздуха внутри цилиндрической коммуникации, °С; $\bar{t}_{\infty,2}$ – средняя температура наружного воздуха, °С;

$\bar{\alpha}_{0,1}, \bar{\alpha}_{0,2}$ – средний коэффициент теплоотдачи у внутренней и внешней поверхностей цилиндрической коммуникации, Вт/(м²·К); d_1, d_2 – внутренний и внешний диаметры цилиндрической коммуникации, м; λ – коэффициент теплопроводности цилиндрической стенки трубопровода, Вт/(м·К).

ВЫВОДЫ

1. Введение при строительстве и модернизации предприятий современной технологической системы сбора и транспортировки отходов позволит в два и более раз сократить расстояние их транспортирования по сравнению с вывозом автотранспортом. Дополнительно снижается транспортная нагрузка дорог общего пользования и обеспечивается безопасность дорожного движения.

2. Работа вакуумной установки обеспечивается электроэнергией, использование которой сегодня – приоритетная задача. Постепенный отказ от мусоровозов при увеличении уровня использования трубопроводного способа сбора отработанных коммунально-бытовых компонентов сократит расходы на топливо для предприятий. А это в свою очередь улучшит состояние окружающей среды городов и промышленных зон.

3. Установки вакуумной транспортировки отходов компактны, просты в наладке, легко вписываются в архитектурно-строительный ландшафт и технологический процесс предприятия, соответствуют высоким санитарно-гигиеническим требованиям по условиям перемещения отходов, могут быть полностью автоматизированы. К достоинствам установок также можно отнести возможность совмещения процесса транспортирования отдельных отходов или их смеси с различными массообменными и технологическими операциями, например с сушкой и охлаждением отдельных компонентов, разломом и сепарацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mohany, A. A Review of Pipeline Monitoring and Periodic Inspection Methods / A. Mohany, K. Sachedina // Pipeline Science and Technology. 2018. Vol. 2, No 3. P. 187–201.

2. Pavlou, D. G. Design Aspects for Connections, Supports, and Expansion Loops in Pipelines Made from Composite Materials / D. G. Pavlou // *Pipeline Science and Technology*. 2018. Vol. 2, No 2. P. 147–158.
 3. Бельдеева, Л. Н. Экологически безопасное обращение с отходами / Л. Н. Бельдеева, Ю. С. Лазуткина, Л. Ф. Комарова. Барнаул: Азбука, 2006. 179 с.
 4. Дабаева, М. Д. Эколого-безопасная утилизация отходов / М. Д. Дабаева, И. И. Федоров, А. И. Куликов. Улан-Удэ: Изд-во БГСХА, 2001. 94 с.
 5. Пульповая переработка пищевых отходов / А. М. Гонопольский [и др.]. М.: Изд-во «Перо», 2016. 126 с.
 6. Утилизация отходов производства и потребления / Э. М. Соколов [и др.]. Ярославль: ЯГТУ, 2006. 388 с.
 7. Трофименко, Ю. В. Модель управления транспортирования ТБО / Ю. В. Трофименко, С. Н. Просов, В. И. Комков // *ЭкоReal*. 2007. № 2. С. 25–32.
 8. Утилизация отходов в Круунувуоренранта [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.metrotaifun.com/automatic_solid_waste_collection_system/ru/. Дата доступа: 03.10.2020.
 9. Цыганков, А. П. Утилизация твердых отходов / А. П. Цыганков. М.: Стройиздат, 1985. 336 с.
 10. Экологически безопасные методы использования отходов / Р. П. Воробьева [и др.]; под общ. ред. Г. Е. Мерзлой, Р. П. Воробьевой; Департамент мелиор. земель и сельскохоз. водоснаб., НИИ по сельскохоз. использ. сточных вод (НИИССВ) «Прогресс», Алт. фил. НИИССВ «Прогресс» и др. Барнаул: Изд-во АГУ, 2000. 554 с.
 11. Raclavský, J. Problematika Navrhování Venkovních Podtlakových Systémů Stokových Sítí / J. Raclavský. Brno: VITIUM, 2011. P. 35.
 12. Хрусталева, Б. М. Пневматический транспорт / Б. М. Хрусталева, Н. В. Кислов. Минск: ООО «Информационная служба недвижимости», 1998. 452 с.
 13. Математическое описание газожидкостной структуры потока в системе транспортирования жидкости под вакуумом / В. И. Нездойминов [и др.] // *Motrol. Commission of Motorization and Energeticsin Agriculture*. Lublin. 2013. Vol. 15, No 6. P. 125–132.
- Поступила 24.12.2020
Подписана в печать 25.02.2021
Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Mohany A., Sachedina K. (2018) A Review of Pipeline Monitoring and Periodic Inspection Methods. *Pipeline*

Received: 24.12.2020
Accepted: 25.02.2021
Published online: 30.03.2021

Исследование теплообмена в продуваемых непроходных каналах теплотрасс

Часть 1

Докт. техн. наук, проф. В. А. Седнин¹⁾, магистр техн. наук Т. В. Бубырь¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Для повышения эффективности эксплуатации тепловых сетей, размещенных в непроходных каналах, ранее предложено схемно-структурное решение регенеративно-утилизационного теплоиспользования и одновременно показана проблематичность создания приемлемой натурной экспериментальной установки или сложность проведения пассивного эксперимента на существующих теплотрассах в непроходных каналах. В качестве альтернативного решения для выполнения исследований предлагается создать и использовать виртуальную экспериментальную установку, разработанную на базе программного комплекса ANSYS, получившего широкое признание в мире. Начальные результаты верификации модели показали перспективность изучения теплообмена и аэродинамики в продуваемых непроходных каналах теплотрасс с использованием такого решения. Выполнено исследование с помощью виртуальной экспериментальной установки на базе шестифакторного ротатбельного плана второго порядка, содержащего 46 точек на гипершаре с шестью звездными точками. Показано отсутствие необходимости рандомизации порядка проведения и повторения исследования в точках плана проведения вычислительного эксперимента. Получены уравнения регрессии второго порядка для расчета комплекса целевых функций: требуемого напора воздуха для достижения заданной скорости потока, интенсивности теплоотдачи непосредственно от труб теплотрассы, а также от стенок канала к продуваемому воздуху. В качестве влияющих факторов при вычислениях приняты: геометрия каналов типовых размеров теплотрасс, длина участков, температуры наружного воздуха и грунта, скорость потока воздуха в канале. Для полученных уравнений регрессии установлены значимые коэффициенты и осуществлен переход от безразмерных факторов к натуральным. С использованием стандартных статистических методов оценок на базе рассчитанных значений критериев Фишера, Стьюдента и других определена адекватность полученных уравнений регрессии.

Ключевые слова: теплоснабжение, непроходные каналы, теплотрасса, теплообмен, аэродинамическое сопротивление канала, ANSYS, математическое моделирование, верификация, использование теплоты грунта, виртуальная модель, уравнение регрессии, шестифакторный эксперимент

Для цитирования: Седнин, В. А. Исследование теплообмена в продуваемых непроходных каналах теплотрасс. Часть 1 / В. А. Седнин, Т. В. Бубырь // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 150–160. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-150-160>

Heat Transfer Research in Blown-Through Non-Passable Heating Mains Channels

Part 1

V. A. Sednin¹⁾, T. V. Bubyr¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. To increase the efficiency of operation of heating networks located in non-passable channels, a schematic and structural solution of regenerative-utilization heat use was previously proposed and at the same time it is shown that it is

Адрес для переписки

Седнин Владимир Александрович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65/2,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-92-16
pte@bntu.by

Address for correspondence

Sednin Vladimir A.
Belarusian National Technical University
65/2, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-92-16
pte@bntu.by

difficult to create an acceptable full-scale experimental installation or the difficulty of conducting a passive experiment on existing heating mains in non-passable channels. As an alternative solution for performing research, it is proposed to create and use a virtual experimental setup developed on the basis of the ANSYS software package, which has received wide recognition in the world. The initial results of model verification showed that the study of heat transfer and aerodynamics in blown-through non-passable heating mains using such a solution is promising. A study has been carried out using a virtual experimental setup based on a six-factor second-order rotatable plan containing 46 points on a hypersphere with six star points. It is shown that there is no need to randomize the order of conducting and repeating the study at the points of computational experiment plan. Second-order regression equations have obtained for calculating a complex of objective functions: the required air pressure to achieve a given flow rate, the intensity of heat transfer directly from the pipes of the heating main, as well as from the walls of the channel to the blown air. The geometry of the channels of typical standard sizes of heating mains, the length of the sections, the temperature of the outside air and soil, and the air flow rate in the channel have been taken as the influencing factors in the calculations. For the obtained regression equations, significant coefficients have been established and the transition from dimensionless to natural factors has been carried out. The adequacy of the obtained regression equations has been determined using standard statistical estimation methods based on the calculated values of the Fisher's, Student's and other criteria.

Keywords: heat supply, nonpassable channels, heating main, heat exchange, aerodynamic channel drag, ANSYS, math modeling, verification, utilization of soil heat, virtual model, regression equation, six factor experiment

For citation: Sednin V. A., Bubyр T. V. (2021) Heat Transfer Research in Blown-Through Non-Passable Heating Mains Channels. Part 1. *Science and Technique*. 20 (2), 150–160. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-150-160> (in Russian)

Введение

Ранее в [1, 2] для повышения эффективности эксплуатации тепловых сетей, размещенных в непроходных каналах, предложено схемно-структурное решение регенеративно-утилизационного теплоиспользования, что позволило определить актуальность соответствующих экспериментальных исследований. Определена проблематичность создания приемлемой натурной экспериментальной установки или сложность проведения пассивного эксперимента на существующих теплотрассах в непроходных каналах. В качестве альтернативного решения для выполнения исследований предложено создать и использовать виртуальную экспериментальную установку, разработанную на базе программного комплекса ANSYS, широко признанного в мире. Начальные результаты верификации полученной с помощью ANSYS виртуальной модели показали перспективность предложенного решения по исследованию теплообмена и аэродинамики в продуваемых непроходных каналах теплотрасс.

Экспериментальные исследования в большинстве случаев удобно осуществлять с привлечением методов математического планирования и обработки получаемых данных. К сожалению, методик выбора плана проведения

эксперимента для реализации метода математического планирования нет. Определение числа факторов, их ранжирование, обоснование диапазонов изменения факторов для выбранных исследуемых функций цели проводятся на основании:

- экспертных оценок самих участников, связанных с проведением эксперимента;
- сторонних исследователей;
- имеющихся литературных данных в конкретной области знаний [3–6].

Такой подход необходим для лучшего понимания роли тех или иных физических величин в протекании рассматриваемых процессов и особенностей их осуществления под воздействием каждого фактора. Наконец, факторы, принятые для проведения исследования, не должны зависеть друг от друга. Выбор факторов, обоснование диапазона их изменения и ранжирование отражены в [1, 2].

Выбор плана проведения эксперимента и влияющих факторов

Используя таблицы планов проведения активного эксперимента [3, 4], рекомендации по выбору определенного плана [5–7], к реализации принят шестифакторный, ротatableльный план второго порядка (табл. 1).

План проведения эксперимента
Experiment plan

№ точки плана	Фактор						№ точки плана	Фактор						№ точки плана	Фактор						
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	
1	-	-	-	-	-	-	17	+	-	-	-	-	+	33	-*	0	0	0	0	0	0
2	-	-	-	-	-	+	18	+	-	-	-	-	+	34	*	0	0	0	0	0	0
3	-	-	-	+	-	+	19	+	-	-	+	-	-	35	0	-*	0	0	0	0	0
4	-	-	-	+	+	-	20	+	-	-	+	+	+	36	0	*	0	0	0	0	0
5	-	-	+	-	-	+	21	+	-	+	-	-	-	37	0	0	-*	0	0	0	0
6	-	-	+	-	+	-	22	+	-	+	-	+	+	38	0	0	*	0	0	0	0
7	-	-	+	+	-	-	23	+	-	+	+	-	+	39	0	0	0	-*	0	0	0
8	-	-	+	+	+	+	24	+	-	+	+	+	-	40	0	0	0	*	0	0	0
9	-	+	-	-	-	+	25	+	+	-	-	-	-	41	0	0	0	0	-*	0	0
10	-	+	-	-	+	-	26	+	+	-	-	+	+	42	0	0	0	0	*	0	0
11	-	+	-	+	-	-	27	+	+	-	+	-	+	43	0	0	0	0	0	-*	0
12	-	+	-	+	+	+	28	+	+	-	+	+	-	44	0	0	0	0	0	0	*
13	-	+	+	-	-	-	29	+	+	+	-	-	+	45	0	0	0	0	0	0	0
14	-	+	+	-	+	+	30	+	+	+	-	+	-	46	0	0	0	0	0	0	0
15	-	+	+	+	-	+	31	+	+	+	+	-	-								
16	-	+	+	+	+	-	32	+	+	+	+	+	+								

Функции отклика исследовались в зависимости от следующих факторов:

- характерного размера, определяющего геометрию канала в поперечном сечении, $X_{\text{поп}} (X_1)$, м;
- характерного размера, определяющего геометрию канала в продольном сечении, $X_{\text{прод}} (X_2)$, м;
- скорости потока воздуха в канале $\omega (X_3)$, м/с;
- температуры сетевой воды: прямой $t_{\text{ПСВ}}$ и обратной $t_{\text{ОСВ}} (X_4)$, °С;
- температуры наружного воздуха $t_{\text{н.вз}} (X_5)$, °С;
- температуры грунта на глубине залегания канала $t_{\text{гр}} (X_6)$, °С.

В вычислительных экспериментах опыты выполнены в соответствии с матрицей плана. Кроме того, в рассматриваемом варианте исследований предполагается отсутствие систематических ошибок, что исключает необходимость в рандомизации последовательности проведения опытов [7].

В расчетах поток воздуха движется в одном направлении с прямой сетевой водой (ПСВ) от начала участка, где задаются температуры потоков воздуха и ПСВ, к окончанию участка, где указанные температуры рассчитываются в программном комплексе ANSYS. Для обратной сетевой воды (ОСВ) имеет место противоток потоку воздуха, и температура ОСВ задается в выходном сечении участка и рассчитывается во входном. Температуры потоков сетевой во-

ды задаются предельными для конкретного графика с учетом парного соответствия соотношения температур прямой и обратной воды. В практических расчетах, естественно, температуры сетевой воды могут отличаться за счет теплопотерь в канале и отвода теплоты у потребителя. Но поскольку они будут находиться внутри диапазона предельных значений температур потоков, уравнения регрессии дадут результат, учитывающий отклонения температур от предельных.

Этапы работы с программным комплексом ANSYS

Построение расчетной сетки конечных элементов. Первый, и весьма важный, этап связан с построением расчетной сетки для выполнения вычислений в ANSYS. Для построения сетки предлагаются различные сеточные модули в составе ANSYS: ANSYS Meshing, ANSYS ICEM CFD, ANSYS Fluent Meshing. Модуль ICEM CFD применим для сложных геометрий, позволяет строить сетку по плохо связанному набору геометрических данных, что невозможно сделать при помощи других инструментов [8]. ANSYS Fluent Meshing применяется для построения больших неструктурированных тетраэдрических, ортогональных, полиэдрических и сеток с преобладанием гексаэдров для очень сложных геометрических моделей, широко используется в аэрокосмической и автомобильной

отраслях, например при моделировании подкапотного пространства карьерных самосвалов или для конструирования болидов F1 [9]. ANSYS Meshing является универсальным, многофункциональным, автоматизированным и высокопроизводительным продуктом, создающим сеточную модель для точных эффективных многодисциплинарных расчетов [10, 11]. Данный модуль генерирует сетку с учетом области физики, к которой относится задача, и типа решателя, используемого в работе ANSYS. В своем исследовании авторы для генерации сетки применяли модуль ANSYS Meshing.

Важный фактор построения сетки – соответствие канонической формы элементов разбиения сложности конструкции канала. При построении сетки использовались элементы в форме тетраэдра, пирамиды, призмы. Однако для получения структурированной сетки большая часть элементов была построена шестигранниками. Определяющий максимальный размер элемента разбиения и его каноническая форма – следующие по важности факторы при выборе сетки, от которых в том числе зависит выполнение сходимости процесса численного решения. Другое условие выбора сетки – обеспечение требуемой точности решения. Общее число элементов в расчетах рассматриваемой экспериментальной модели колебалось от 5 до 15 млн единиц – это связано как с максимальной длиной участка (100 м), так и с максимальным поперечным сечением канала (1,7×2,5 м). Кроме того, расчетное сечение включало грунт вокруг канала на толщину до 0,5 м. При этом минимальная длина канала сечением 1,5×2,0 м составляла 20 м. Вблизи поверхностей рассматриваемой геометрии укладывался тонкий слой призматических элементов толщиной, обеспечивающей безразмерный параметр y^+ в диапазоне 30–100. Сходимость процесса определялась по достижении совпадения соседних значений итераций температуры, напора, массового расхода, характеризующихся величиной менее 10^{-3} , что достигалось после 2 тыс. итераций. Процесс построения сетки производился для девяти конфигураций канала экспериментальной установки, время построения сетки для каждой конфигурации в среднем занимало от 2 до 6 ч. Для решения использовался принадлежащий ИТМО НАН Беларуси компьютер с 26 ядрами и 128 Гб ОЗУ, на котором был установлен лицензионный пакет ANSYS.

Расчетные пакеты ANSYS. Следующий этап исследования связан с расчетами непосредственно в точках матрицы плана проведения эксперимента (табл. 1). Для этого из состава ANSYS был выбран пакет CFX, который, согласно рекомендациям, при минимальных временных затратах дает ожидаемый результат [11]. При этом для различных точек плана время расчета изменяется от 3 до 24 ч. Окончания итераций определялись из выполнения таких условий, как: стабилизация при переходе от одной итерации к другой таких параметров, как температура, массовый расход теплоносителя, давление, плотность теплового потока. Погрешность получаемых результатов оценивалась в 5–10 %.

Очевидно, что громоздкость процесса получения результатов с использованием программного комплекса ANSYS мало приемлема в инженерной практике. Это подтверждает необходимость получения на основе экспериментального исследования с помощью данного пакета более простых соотношений, например уравнений регрессии, отвечающих требованиям практического применения.

Таким образом, с помощью программного комплекса ANSYS в зависимости от перечисленных факторов в каждой точке плана рассчитывались: потери напора продуваемого потока воздуха на участке канала, температуры на выходе потока воздуха и сетевой воды в прямом и обратном трубопроводах. Достижением сходимости итерационных процессов указанных расчетов считался выход на плато графиков уравнений импульса, баланса масс, энергий, турбулентности. Время расчетов каждой точки плана находилось в диапазоне 16–24 ч. В качестве примера сходимости для одной из точек плана показаны на рис. 1–4.

Анализируя рис. 1, 2, можно отметить, что для потока сетевой воды при движении в трубопроводе не возникает проблем со сходимостью решения, в то же время для воздуха вследствие наличия ряда местных сопротивлений имеют место пульсации потока воздуха, что осложняет сходимость процесса решения.

Данные рис. 3 позволяют считать, что выбранная модель турбулентности $k-\omega SST$ хорошо описывает протекающие в канале процессы. Из рис. 4 видно, что дисбалансы решаемых уравнений достигают нулевых значений, и это указывает на окончание процесса решения.

Результаты работы программного комплекса ANSYS для всех точек плана приведены в табл. 2.

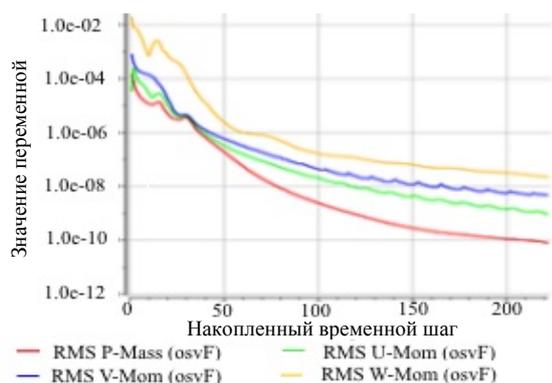


Рис. 1. Сходимость уравнений сохранения импульса и баланса масс для потока сетевой воды

Fig. 1. Convergence of momentum conservation equations and mass balance for flow of network water

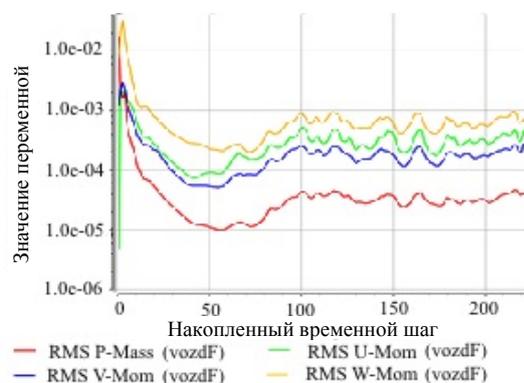


Рис. 2. Сходимость уравнений сохранения импульса и баланса масс для потока воздуха

Fig. 2. Convergence of momentum conservation equations and mass balance for air flow

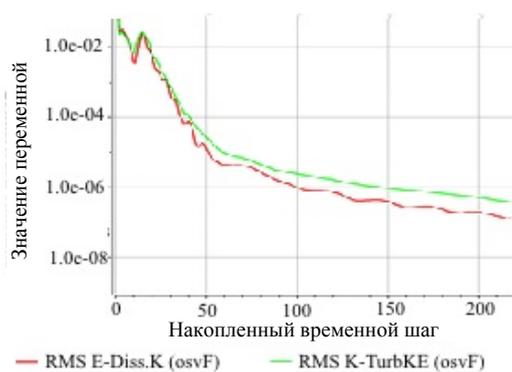


Рис. 3. Сходимость решений для уравнений выбранной модели турбулентности

Fig. 3. Convergence of solutions for equations of selected turbulence model

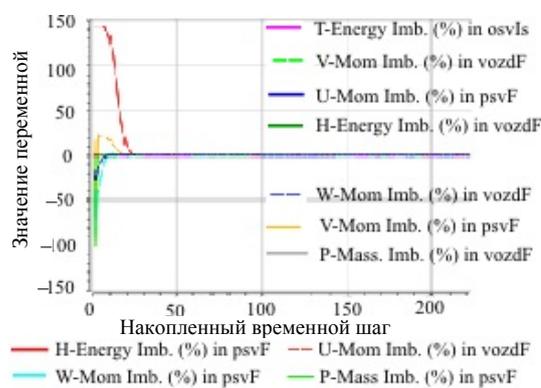


Рис. 4. Дисбалансы решаемых уравнений для всех теплоносителей

Fig. 4. Imbalances of equations being solved for all heat carriers

Таблица 2

Результаты работы программного комплекса ANSYS для всех точек плана
Results of ANSYS software package for all points of the plan

№ точки плана	Температура выхода t , °C			Δp , Па	№ точки плана	Температура выхода t , °C			Δp , Па	№ точки плана	Температура выхода t , °C			Δp , Па
	ПСВ	ОСВ	Воздух			ПСВ	ОСВ	Воздух			ПСВ	ОСВ	Воздух	
1	79,4960	44,9980	-10,88	40,4	17	79,4940	44,9960	-7,64	72	33	89,9990	49,4994	-7,28	27,1
2	79,4960	44,9980	1,05	38,6	18	79,4940	44,9970	1,57	69	34	89,9949	49,4971	-4,81	122
3	100	52,9970	-10,14	40,4	19	100,4920	52,9950	-8,23	72,6	35	89,9990	49,4990	-6,57	71,6
4	100	52,9980	0,65	38,7	20	100,4920	52,9960	2,79	69,1	36	89,9610	49,4780	-3,84	163
5	79,4960	44,9970	-12,50	195	21	79,4930	44,9960	-11,49	341	37	89,9972	49,4984	3,01	0,95
6	79,4970	44,9980	-0,42	185	22	79,4940	44,9970	0,67	324,	38	89,9968	49,4981	-6,84	277
7	100,4950	52,9970	-12,70	195	23	100,4910	52,9950	-10,86	342	39	65,0277	38,9985	-6,14	80,5
8	100,4960	52,9980	-0,04	185	24	100,4920	52,9960	0,30	324	40	114,9660	57,9979	-5,83	78,4
9	79,4984	44,9990	-12,38	11,5	25	79,4972	44,9983	-11,67	19,2	41	89,9963	49,4976	-20,53	86,9
10	79,4986	44,9992	-0,27	10,9	26	79,4976	44,9986	0,72	17,4	42	89,9973	49,4986	8,41	75,3
11	100,498	52,9988	-12,55	11,5	27	100,4970	52,9980	-11,17	19,3	43	89,9968	49,4982	-6,37	78,6
12	100,498	52,9990	0,12	10,9	28	100,4970	52,9984	0,50	17,4	44	89,9968	49,4982	-5,56	79,5
13	79,4984	44,9989	-13,67	54,4	29	79,4970	44,9980	-12,69	85,1	45	89,9968	49,4982	-5,94	77,8
14	79,4986	44,9992	-0,65	51,5	30	79,4976	44,9986	-0,44	80,7	46	89,9968	49,4982	-7,28	80,5
15	100,4980	52,9988	-13,47	54,4	31	100,4960	52,9980	-12,85	85,1					
16	100,4980	52,9990	-0,74	51,6	32	100,4970	52,9984	-0,11	80,7					

Непосредственно по результатам работы программного комплекса ANSYS не выводятся требуемые функции отклика, указанные выше. В этой связи значения требуемых функций отклика рассчитываются на базе полученных результатов работы упомянутого программного комплекса по зависимостям, приведенным в [2].

Регрессионные уравнения

Функциями отклика определены:

– потери напора при продувке канала воздухом;

– удельные тепловые потоки к воздуху: суммарный от трубопроводов сетевой воды; отдельные от трубопроводов прямой и обратной сетевой воды; от ограждающих конструкций канала.

Для определения удельного теплового потока необходимо знать интегральный поток теплоты к воздуху, который определяется известным соотношением с использованием расхода потока воздуха ($G_{\text{вх}}$, кг/с), температур потока в начальном и конечном сечениях и теплоемкостей влажного воздуха изобарных, удельных массовых, средних в соответствующих интервалах температур при обобщенном влагосодержании 10 г/кг

$$Q_{\text{вх}} = G_{\text{вх}} \bar{c}_{p,\text{вх}} \Big|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1), \quad (1)$$

где $\bar{c}_{p,\text{вх}} \Big|_{t_1}^{t_2}$ – изобарная удельная массовая, средняя в интервале температур t_1-t_2 тепло-

емкость воздуха, Дж/(кг·°C); t_2, t_1 – температура воздуха на выходе и входе участка, °C.

На базе приведенных результатов использования программного комплекса ANSYS по известным расходу и температурам сетевой воды не представляет проблем балансовым методом определить тепловой поток от трубопроводов к продуваемому воздуху. Это можно сделать отдельно для потока прямой и обратной сетевой воды

$$Q_{\text{св}} = G_{\text{св}} c_p (t_2 - t_1), \quad (2)$$

где $G_{\text{св}}$ – массовый расход сетевой воды через трубопровод, кг/с; c_p – изобарная удельная массовая теплоемкость воды, Дж/(кг·°C); t_2, t_1 – температура сетевой воды на выходе и входе участка, °C.

Разность интегрального потока теплоты к воздуху и тепловых потоков от трубопроводов сетевой воды позволяет установить теплоту, передаваемую потоку воздуха от ограждающих конструкций канала:

$$Q_{\text{кан}} = Q_{\text{вх}} - Q_{\text{св}}. \quad (3)$$

Удельный тепловой поток определялся как отношение полного интегрального потока теплоты к соответствующей площади поверхности теплоотдачи.

Результаты обработки данных табл. 2 по соотношениям (1)–(3) приведены в табл. 3.

На основании данных табл. 1, 3 аппроксимировались коэффициенты уравнений регрессии с использованием современных пакетов прикладных программ [12, 13].

Таблица 3

Результаты обработки данных табл. 2 по соотношениям (1)–(3)

Results of processing data of Table 2 by relations (1)–(3)

№ точки плана	Мощность удельных потоков теплоты «поверхность – воздух» q , Вт/м ²				№ точки плана	Мощность удельных потоков теплоты «поверхность – воздух» q , Вт/м ²				№ точки плана	Мощность удельных потоков теплоты «поверхность – воздух» q , Вт/м ²			
	ПСВ*	ОСВ*	Грунт**	Суммарный***		ПСВ*	ОСВ*	Грунт**	Суммарный***		ПСВ*	ОСВ*	Грунт**	Суммарный***
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	26,6	16,4	51,5	41,4	17	26,1	15,9	57,0	43,1	33	28,6	16,3	39,7	35,4
2	23,0	12,8	26,6	24,2	18	22,8	12,7	15,2	16,6	34	28,4	15,9	36,0	31,2
3	33,4	18,6	61,1	49,3	19	33,1	18,3	47,6	39,4	35	28,7	16,1	33,6	54,9
4	30,0	15,1	16,7	20,1	20	29,6	14,8	24,1	23,7	36	29,2	16,4	44,5	13,5
5	27,0	16,8	71,3	53,3	21	27,0	16,6	57,7	44,2	37	26,0	14,0	14,5	17,1
6	23,4	13,1	20,0	20,3	22	23,2	12,9	29,9	25,8	38	29,8	16,9	41,2	36,2
7	34,1	19,1	59,9	48,3	23	33,8	18,8	68,5	52,7	39	21,3	13,6	37,9	30,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	30,3	15,3	31,1	29,1	24	30,2	15,3	18,8	21,1	40	38,1	19,2	37,5	35,3
9	29,3	18,2	49,8	50,3	25	28,2	17,4	40,3	37,0	41	34,0	21,1	78,2	59,4
10	25,3	14,2	13,8	21,1	26	24,2	13,4	20,2	23,4	42	24,9	12,1	-1,66	7,07
11	37,0	20,7	41,8	46,7	27	35,3	19,7	48,1	43,1	43	29,5	16,7	26,5	26,6
12	32,8	16,6	21,5	29,3	28	31,2	15,8	12,6	20,9	44	29,4	16,6	48,7	39,8
13	30,0	18,6	48,0	50,0	29	28,7	17,7	55,4	54,7	45	29,4	16,6	37,6	33,6
14	25,8	14,4	25,0	29,9	30	24,8	13,8	15,4	22,2	46	29,4	16,7	37,7	33,0
15	37,6	21,4	57,0	59,6	31	35,9	20,1	46,4	50,3					
16	33,4	17,0	16,0	25,8	32	31,8	16,1	24,0	30,8					

* На 1 м² поверхности изоляции трубопровода.

** На 1 м² поверхности канала.

*** Суммарный поток теплоты к воздуху на 1 м² обдуваемых поверхностей теплоотдачи теплотрассы сетевой воды и канала.

В общем виде уравнение для поверхности отклика второго порядка запишется

$$Y_i = b_0 + b_1X_1 + b_2X_1^2 + b_3X_2 + b_4X_2^2 + b_5X_3 + b_6X_3^2 + b_7X_4 + b_8X_4^2 + b_9X_5 + b_{10}X_5^2 + b_{11}X_5 + b_{12}X_6^2 + b_{13}X_1X_2 + b_{14}X_1X_3 + b_{15}X_1X_4 + b_{16}X_1X_5 + b_{17}X_1X_6 + b_{18}X_2X_3 + b_{19}X_2X_4 + b_{20}X_2X_5 + b_{21}X_2X_6 + b_{22}X_3X_4 + b_{23}X_3X_5 + b_{24}X_3X_6 + b_{25}X_4X_5 + b_{26}X_4X_6 + b_{27}X_5X_6.$$

Вычисление коэффициентов регрессии для принятых функций отклика осуществлялось по формулам [7]. Полученные значения коэффициентов уравнений регрессии приведены в табл. 4.

В табл. 5 отражены результаты оценки адекватности и работоспособности полученных уравнений регрессии.

Таблица 4

Значения коэффициентов уравнений регрессии
Regression equation coefficients

Коэффициент уравнения регрессии	Функция отклика для расчета				
	теплового потока к воздуху $Y_i = f(X)_i = 1, 2, 3, 4, \text{Вт/м}^2$				потерь напора $Y_5, \text{Па/м}$
	Суммарный поток Y_1	От ПСВ Y_2	От ОСВ Y_3	От грунта Y_4	
1	2	3	4	5	6
b_0	32,400	29,30000	16,600000	37,400	0,133000
b_1	-1,380	-0,31000	-0,212000	-0,890	-0,002900
b_2	0,610	-0,07600	-0,055400	0,192	0,000553
b_3	-1,290	0,91000	0,525000	-2,220	-0,065000
b_4	0,770	-0,00161	-0,028100	0,411	0,012500
b_5	3,100	0,41800	0,297000	3,700	0,108000
b_6	-0,560	-0,17700	-0,170000	-1,580	0,019000
b_7	1,030	3,55000	1,180000	-0,068	-0,000131
b_8	0,536	0,13800	-0,000411	0,166	0,001160
b_9	-11,600	-1,92000	-1,890000	-16,600	-0,004380
b_{10}	0,600	0,09600	0,037900	0,273	0,001660
b_{11}	2,970	-0,02170	-0,019600	4,660	0,000114
b_{12}	0,610	0,09800	0,039200	0,163	0,001050
b_{13}	-0,352	-0,29400	-0,153000	0,280	-0,001350
b_{14}	0,650	0,01970	0,020800	0,178	-0,002530

Окончание табл. 4
End of Table 4

1	2	3	4	5	6
b_{15}	-0,0790	-0,07100	-0,01650	-0,0112	-1,32E-05
b_{16}	0,6100	0,03240	0,03990	0,2850	0,0000191
b_{17}	-0,1820	-0,00525	-0,00830	-0,0860	-0,0000170
b_{18}	0,4570	0,000078	-0,01200	-0,5770	-0,0650000
b_{19}	0,0930	0,10300	0,04550	0,0274	-0,0000590
b_{20}	0,0780	-0,12800	-0,10700	1,6900	0,0024200
b_{21}	-0,0800	0,00950	0,00970	-0,4820	-5,35E-05
b_{22}	0,0590	0,02670	0,00980	0,0081	0,0000332
b_{23}	-1,1600	-0,02640	-0,03020	-1,1700	-0,0029200
b_{24}	0,3280	0,00358	0,00630	0,3420	0,0000577
b_{25}	0,0568	-0,02180	-0,00129	-0,0169	0,0000133
b_{26}	-0,2220	0,01010	0,01140	0,0710	0,0000790
b_{27}	-0,0228	-0,00307	-0,00083	-0,0270	0,0000236

Таблица 5

Оценка адекватности и работоспособности уравнений регрессии
Assessment of adequacy and performance of regression equations

Функция отклика	Статистическая характеристика					Оценка уравнения регрессии
	Дисперсия		Критерий			
	S_y^2	$S_{ост}^2$	F	F_T	R^2	
Y_1	177,9300	54,6600	3,26	2,3423	0,877	Адекватно и работоспособно
Y_2	17,2900	0,8800	19,67	2,3423	0,980	
Y_3	5,3800	0,3200	16,75	2,3423	0,976	
Y_4	321,9500	21,0500	15,30	2,3423	0,974	
Y_5	0,0220	0,0082	2,70	2,3423	0,852	

Условие $F > F_T$ выполняется. Это означает, что уравнение регрессии описывает результаты эксперимента в F_T раз лучше модели среднего. Регрессионная модель адекватна. Коэффициент детерминации $R^2 > 0,75$, т. е. полученная модель работоспособна.

Переход к размерным характеристикам осуществлялся по известным соотношениям, приведенным, например, в [5]:

– для свободного члена:

$$\delta_0 = b_0 - \sum_{i=1}^6 b_i \frac{c_i}{\varepsilon_i} + \sum_{i=1, j=1}^6 \frac{b_{ij} c_i c_j}{\varepsilon_i \varepsilon_j}; \quad (4)$$

– для коэффициентов линейных членов

$$\delta_i = \frac{b_i}{\varepsilon_i} - 2b_{ii} \frac{c_i}{\varepsilon_i^2} - \sum_{i=1, j=1}^6 \frac{b_{ij} c_j}{\varepsilon_i \varepsilon_j}; \quad (5)$$

– для коэффициентов нелинейных членов

$$\delta_{ij} = \frac{b_{ij}}{\varepsilon_i \varepsilon_j}, \quad (6)$$

где b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij} – коэффициенты уравнения регрессии (табл. 4); i – номер фактора; j – индекс коэффициента, $1 \leq i \leq j \leq 6$; c_i, c_j – натуральные значения фактора на нулевом уровне; ε_i – натуральное значение интервала варьирования фактора.

Результаты расчета значений размерных коэффициентов регрессионных уравнений будут показаны во второй части статьи.

Значимость коэффициентов полученных уравнений регрессии подтверждалась после проверки с использованием t -критерия Стьюдента [7]. Для наглядности построены карты Парето (рис. 5–7), показывающие значимость коэффициентов уравнений регрессии.

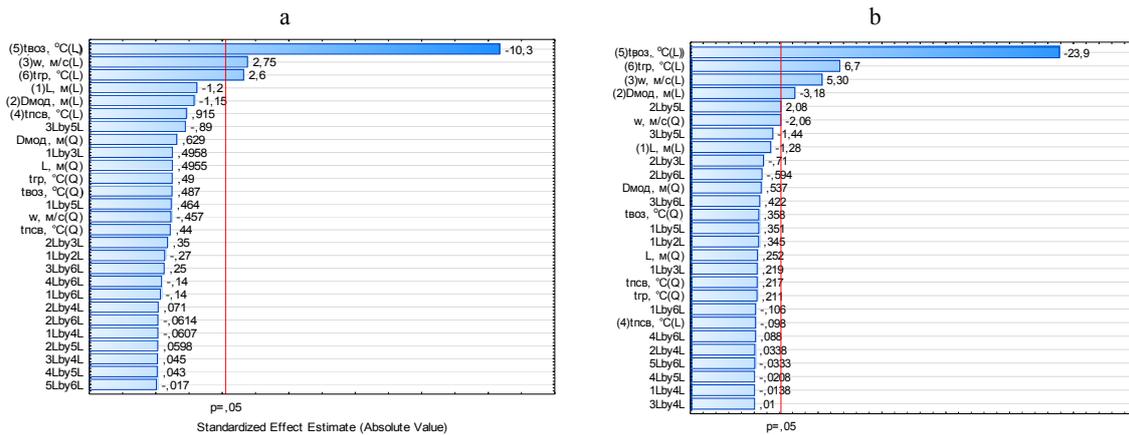


Рис. 5. Карта Парето значимости коэффициентов регрессии для уравнения: а – суммарного потока теплоты Y_1 ; б – удельного потока теплоты от грунта Y_4

Fig. 5. Pareto map of regression coefficient significance for equation: а – total heat flow Y_1 ; б – specific heat flow from soil Y_4

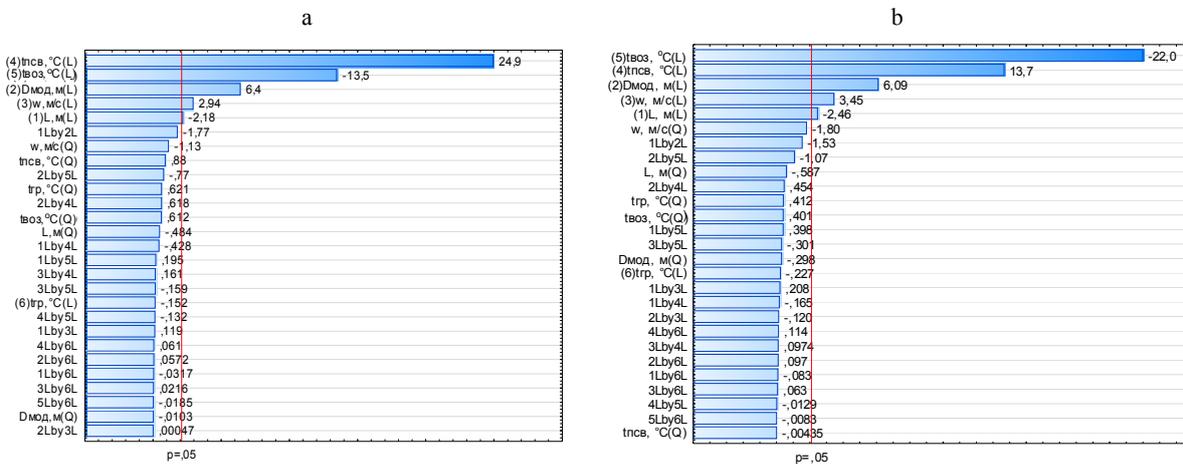


Рис. 6. Карта Парето значимости коэффициентов регрессии для удельного потока теплоты: а – от прямой сетевой воды Y_2 ; б – от обратной сетевой воды Y_3

Fig. 6. Pareto map of regression coefficient significance for specific heat flow: а – from direct network water Y_2 ; б – from return network water Y_3

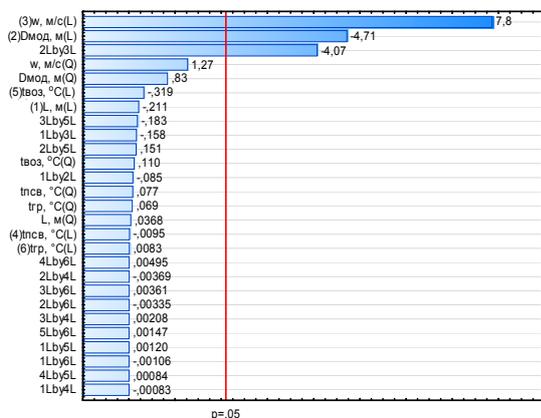


Рис. 7. Карта Парето значимости коэффициентов регрессии для уравнения удельных потерь напора Y_5

Fig. 7. Pareto map of regression coefficient significance for equation of specific pressure losses Y_5

Красной линией на рис. 5–7 обозначен критический уровень p -значения, соответствующий $p = 0,05$, который принимается во многих областях исследований. Таким образом, p -значение 0,05 здесь рассматривается как «граничный приемлемый» уровень ошибки. Вместе с тем известно, что в математических экспериментах, имеющих место в рассматриваемом случае, не следует игнорировать менее значимые коэффициенты регрессионных зависимостей [7].

Согласно анализу полученных значений карт Парето и функций отклика, можно отметить следующее:

– аэродинамическое сопротивление проходу потока воздуха участков канала находится в

диапазоне до 4,6 Па/м, что хорошо соотносится с имеющимися данными [14]. Наибольшее влияние на потери напора оказывают, как и следует ожидать, скорость потока и длина участка;

– удельная теплоотдача от поверхности трубопроводов сетевой воды к потоку воздуха имеет значение до 0,04 кВт/м², что отвечает данным [15]. Наиболее значимые факторы – температуры потоков и характерный размер поперечного сечения;

– удельная теплоотдача от стенок канала к воздуху оценивается величиной 0,08 кВт/м², что соответствует данным по теплообмену в грунтовых скважинах и каналах [16]. Наиболее значимые факторы – температуры потоков, скорость воздуха, характерный размер поперечного сечения;

– мощность суммарных удельных на единицу площади омываемых воздухом поверхностей потока теплоты к воздуху 0,06 кВт/м². Наибольшее воздействие на удельный тепловой поток к воздуху оказывают скорость и температура воздуха в канале, а также температура грунта. Геометрические характеристики канала менее значимы. При этом длина канала более воздействует на удельный тепловой поток на единицу площади, что можно объяснить с позиций теплоотдачи при продольном омывании поверхностей. Температура сетевой воды оказывает наименьшее значение, и это связано с наличием изоляции трубопроводов, которая нивелирует изменение температуры наружной поверхности изоляции теплотрасс при изменении температуры сетевой воды в них. Погрешность расчетов удельных потоков теплоты с помощью полученных регрессионных соотношений находится в пределах 20–30 %;

ВЫВОДЫ

1. На базе программного комплекса ANSYS проведено численное исследование с применением методов планирования активного эксперимента.

2. Получены регрессионные зависимости для безразмерных факторов, позволяющие оп-

ределить тепловые потоки от поверхностей, омываемых потоком воздуха, к названному потоку. Подтверждена их адекватность общепринятыми статистическими методами.

3. Осуществлен переход к регрессионным соотношениям для значимых факторов, и с помощью карт Парето выявлены значимые коэффициенты. Показано соответствие их значимости физическим представлениям о протекающих процессах.

4. Верификация результатов определила пригодность регрессионных соотношений для практического применения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седнин, В. А. Системы регенеративно-утилизационного теплоиспользования для теплотрасс в непроходных каналах / В. А. Седнин, Т. В. Бубырь // Энергия и Менеджмент. 2017. Т. 97, № 4. С. 2–6.
2. Седнин, В. А. Численное исследование сложного теплообмена в продуваемых в непроходных каналах теплотрасс / В. А. Седнин, Т. В. Бубырь // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2019. Т. 62, № 1. С. 61–76. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-1-61-76>.
3. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей / В. З. Бродский и [др.]. М.: Металлургия, 1982. 752 с.
4. Халафян, А. А. Промышленная статистика. Контроль качества, анализ процессов, планирование экспериментов в пакете STATISTICA / А. А. Халафян. М.: Либроком, 2013. 384 с.
5. Тихомиров, В. Б. Планирование и анализ эксперимента (при проведении исследований в легкой и текстильной промышленности) / В. Б. Тихомиров. М.: Легкая индустрия, 1974. 262 с.
6. Шестаков, В. Н. Планирование эксперимента в оптимизационных задачах технической мелиорации грунтов / В. Н. Шестаков. Омск: Изд-во «СибАДИ», 2007. 95 с.
7. Тарасик, В. П. Математическое моделирование технических систем / В. П. Тарасик. Минск: Новое знание, 2013. 584 с.
8. ANSYS ICEM CFD [Электронный ресурс] // ГК «ПЛИМ Урал». Режим доступа: <https://cae-expert.ru/product/ansys-icem-cfd>. Дата доступа: 24.02.2018.
9. ANSYS Fluent Meshing [Электронный ресурс] // ГК «ПЛИМ Урал». Режим доступа: <https://cae-expert.ru/product/ansys-fluent-meshing>. Дата доступа: 24.02.2018.
10. ANSYS Meshing [Электронный ресурс] // ГК «ПЛИМ Урал». Режим доступа: <https://cae-expert.ru/product/ansys-meshing>. Дата доступа: 24.02.2018.

11. ANSYS CFX [Электронный ресурс] // ГК «ПЛИМ Урал». Режим доступа: <https://cae-expert.ru/product/ansys-cfx>. Дата доступа: 24.02.2018.
12. Обзор STATISTICA [Электронный ресурс] // StatSoft Russia. Режим доступа: <http://statsoft.ru/products/overview/>. Дата доступа: 21.01.2018.
13. Боровиков, В. П. Популярное введение в современный анализ данных в системе STATISTICA / В. П. Боровиков. М.: Горячая линия-Телеком, 2013. 288 с.
14. Марченко, А. В. Разработка технологий использования котлоагрегатов ТЭЦ и их дутьевых вентиляторов для транспорта и утилизации вентиляционных выбросов промышленных предприятий и автомагистралей / А. В. Марченко. Ульяновск, 2008. 175 с.
15. Справочник по наладке и эксплуатации водяных тепловых сетей / В. И. Манюк [и др.]; 3-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1988. 432 с.
16. Сапрыкина, Н. Ю. Исследование влияния на температуру грунта геотермальной системы теплоснабжения и кондиционирования в комплексе с тепловым насосом, при долговременном нестационарном циклическом режиме работы / Н. Ю. Сапрыкина // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. 2018. Т. 25, № 3. С. 19–27.

Поступила 24.12.2020

Подписана в печать 25.02.2021

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Sednin V. A., Bubyg T. V. (2017) Systems of Regenerative Recovery Heat Use for Heating Mains in No-Pass Channels. *Energiya i Menedzhment* [Energy and Management], (4), 2–6 (in Russian).
2. Sednin V. A., Bubyg T. V. (2019) Numerical Study of Complex Heat Transfer in Blown Impassable Channels of Heating Mains. *Energetika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii i Energeticheskikh Ob'edinenii SNG = ENERGETIKA. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations*, 62 (1), 61–76. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2019-62-1-61-76> (in Russian).
3. Brodskii V. Z., Brodskii L. I., Golikova T. I., Nikitina E. P., Panchenko L. A. (1982) *Experiment Design Tables for Factorial and Polynomial Models*. Moscow, Metallugiya Publ. 752 (in Russian).
4. Khalafyan A. A. (2013) *Industrial Statistics. Quality Control, Process Analysis, Experimental Planning in the*

- STATISTICA Package*. Moscow, Librokom Publ. 384 (in Russian).
5. Tikhomirov V. B. (1974) *Planning and Analysis of Experiment (when Conducting Research in Light and Textile Industries)*. Moscow, Liogkaya Industriya. 262 (in Russian).
6. Shestakov V. N. (2007) *Planning an Experiment in Optimization Problems of Technical Land Reclamation*. Omsk, Publishing House of Siberian State Automobile and Highway University. 95 (in Russian).
7. Tarasik V. P. (2013) *Mathematical Modeling of Technical Systems*. Minsk, Novoe Znanie Publ. 584 (in Russian).
8. ANSYS ICEM CFD. Available at: <https://cae-expert.ru/product/ansys-icem-cfd> (Accessed 24 February 2018) (in Russian).
9. ANSYS Fluent Meshing. Available at: <https://cae-expert.ru/product/ansys-fluent-meshing> (Accessed 24 February 2018) (in Russian).
10. ANSYS Meshing. Available at: <https://cae-expert.ru/product/ansys-meshing> (Accessed 24 February 2018) (in Russian).
11. ANSYS CFX. Available at: <https://cae-expert.ru/product/ansys-cfx> (Accessed 24 February 2018) (in Russian).
12. STATISTICA. StatSoft Russia. Available at: <http://statsoft.ru/products/overview/> (Accessed 21 January 2018) (in Russian).
13. Borovikov V. P. (2013) *Popular Introduction to Modern Data Analysis with STATISTICA System*. Moscow, Goryachaya Liniya-Telekom Publ. 288 (in Russian).
14. Marchenko A. V. (2008) *Development of Technologies for the Use of CHP Boiler Units and their Blowing Fans for Transport and Utilization of Ventilation Emissions from Industrial Enterprises and Highways*. Ulyanovsk. 175 (in Russian).
15. Manyuk V. I., Kaplinskii Ya. I., Khizh E. B., Manyuk A. I., Il'in V. K. (1988) *Handbook for the Adjustment and Operation of Water Heating Networks*. 3rd ed. Moscow, Stroyizdat Publ. 432 (in Russian).
16. Saprykina N. Yu. (2018) Study of the Effect of Geothermal Heat Supply System on Soil Temperature and Air Conditioning in a Complex with a Heat Pump, with Long-term Non-Stationary Cyclic Operation. *Inzhenerno-Stroitelny Vestnik Prikaspiya = Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region*, 25 (3), 19–27 (in Russian).

Received: 24.12.2020

Accepted: 25.02.2021

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167>

УДК 534.21

О выполнении закона сохранения энергии в теории упругих волн

Докт. физ.-мат. наук, проф. В. В. Невдах¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. В соответствии с законом сохранения энергии полная энергия замкнутой физической системы должна оставаться постоянной в любой момент времени. Энергия бегущей упругой волны состоит из кинетической энергии колеблющихся частиц среды и потенциальной энергии ее упругой деформации. В существующей теории упругих волн считается, что плотности кинетической и потенциальной энергий бегущей волны без потерь одинаковы в любой момент времени и меняются по одинаковому закону. Соответственно плотность полной энергии такой волны разная в различные моменты времени, а постоянным сохраняется только ее усредненное по времени значение. Таким образом, в существующей теории упругих волн закон сохранения энергии не выполняется. Цель настоящей работы – дать физически корректное описание этих волн. Предложено новое описание звуковой волны в идеальном газе, основанное на использовании системы волновых уравнений для возмущения скорости колебаний частиц газа, определяющего их кинетическую энергию, и для упругой деформации, определяющей их потенциальную энергию. Показано, что физически корректными решениями такой системы уравнений для бегущей звуковой волны являются гармонические решения, описывающие колебания возмущения скорости частиц газа и упругой деформации, которые сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Получено, что положения максимумов кинетической и потенциальной энергий упругой волны, описываемых такими решениями, чередуются в пространстве через каждые четверть длины волны. Установлено, что через каждые четверть периода в волне без потерь происходит полное преобразование кинетической энергии в потенциальную и обратно, при этом в каждой пространственной точке волны ее полная плотность энергии одинакова в любой момент времени, что согласуется с законом сохранения энергии. Плотность потока энергии такой бегущей упругой волны описывается выражением для вектора Умова. Сделан вывод, что бегущую звуковую волну без потерь в идеальном газе можно рассматривать как гармонический осциллятор.

Ключевые слова: упругие волны, закон сохранения энергии, волновое уравнение, возмущение скорости колебаний частиц, упругая деформация, вектор Умова

Для цитирования: Невдах, В. В. О выполнении закона сохранения энергии в теории упругих волн / В. В. Невдах // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 161–167. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167>

On Fulfillment of Energy Conservation Law in Theory of Elastic Waves

V. V. Nevdakh¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. In accordance with the energy conservation law, the total energy of a closed physical system must remain constant at any moment of time. The energy of a traveling elastic wave consists of the kinetic energy in the oscillating particles of the medium and the potential energy of its elastic deformation. In the existing theory of elastic waves, it is believed that the kinetic

Адрес для переписки

Невдах Владимир Владимирович
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-77-61
v.v.nevdakh@bk.ru

Address for correspondence

Nevdakh Vladimir V.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-77-61
v.v.nevdakh@bk.ru

and potential energy densities of a traveling wave without losses are the same at any moment of time and vary according to the same law. Accordingly, the total energy density of such wave is different at various moment of time, and only its time-averaged value remains constant. Thus, in the existing theory of elastic waves, the energy conservation law is not fulfilled. The purpose of this work is to give a physically correct description of these waves. A new description of a sound wave in an ideal gas has been proposed and it is based on the use of a wave equation system for perturbing the oscillation velocity of gas particles, which determines their kinetic energy, and for elastic deformation, which determines their potential energy. It has been shown that harmonic solutions describing the oscillations of the gas particles velocity perturbation and their elastic deformation, which are phase shifted by $\pi/2$, are considered as physically correct solutions of such equations system for a traveling sound wave. It has been found that the positions of the kinetic and potential energy maxima in the elastic wave, described by such solutions, alternate in space every quarter of the wavelength. It has been established that every quarter of a period in a wave without losses, the kinetic energy is completely converted to potential and vice versa, while at each spatial point of the wave its total energy density is the same at any time, which is consistent with the energy conservation law. The energy flux density of such traveling elastic wave is described by the expression for the Umov vector. It has been concluded that such traveling sound wave without losses in an ideal gas can be considered as a harmonic oscillator.

Keywords: elastic waves, energy conservation law, wave equation, perturbation of particle velocity, elastic deformation, Umov vector

For citation: Nevdakh V. V. (2021) On Fulfillment of Energy Conservation Law in Theory of Elastic Waves. *Science and Technique*. 20 (2). 161–167. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167> (in Russian)

Введение

Один из фундаментальных законов природы – закон сохранения энергии, который может быть сформулирован в общем виде так: пока физическая система является замкнутой, ее полная энергия остается неизменной (постоянной) величиной в любой момент времени [1].

Считается, что закон сохранения энергии эквивалентен однородности времени, т. е. независимости всех законов, описывающих систему, от момента времени, в который рассматривается система. С математической точки зрения закон сохранения энергии эквивалентен утверждению, что система дифференциальных уравнений, описывающая динамику данной физической системы, обладает первым интегралом движения, связанным с симметричностью уравнений относительно сдвига во времени. Если время однородно, то функция Лагранжа $L(q_i, \dot{q}_i)$, описывающая рассматриваемую систему, не зависит явно от времени, поэтому полная ее производная по времени имеет вид

$$\frac{dL(q_i, \dot{q}_i)}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt}, \quad (1)$$

где q_i – обобщенные координаты; \dot{q}_i – производные по времени обобщенных координат системы или обобщенные скорости.

Уравнения Лагранжа, или уравнения движения такой системы, записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) дает уравнение, в котором выражение, стоящее в скобках, по определению является энергией системы

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0. \quad (3)$$

Из (3) следует, что полная энергия системы – постоянная величина, т. е. сохраняется в каждый момент времени.

Выполнение закона сохранения энергии является критерием справедливости различных теоретических построений в классической физике. Так как в различных разделах физики используются разные виды энергии, то и в законе сохранения энергии для этих разделов физики также фигурируют различные виды энергии. При этом смысл закона сохранения энергии не меняется – полная энергия замкнутой физической системы, равная сумме отдельных видов энергий, сохраняется в каждый момент времени.

Цель работы – показать, что в существующей в настоящее время теории упругих волн закон сохранения энергии не выполняется, и дать физически корректное описание этих волн.

Упругие колебания и волны

Упругие колебания и упругие волны рассматриваются в разделе классической (ньютоновской) механики, в которой закон сохранения энергии формулируется так: полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной. Если $U(\vec{r})$ – по-

тенциальная энергия тела, имеющего массу m и движущегося со скоростью v , то закон сохранения энергии (3) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}) \right] = 0. \quad (4)$$

В (4) выражение в скобках называется полной механической энергией материального тела, состоящей из ее кинетической энергии – первое слагаемое, и потенциальной энергии – второе слагаемое.

Рассмотрим вначале выполнение закона сохранения энергии на примере пружинного маятника, совершающего упругие колебания без затухания [2]. На маятник массой m действует сила $F = -kz$ в пределах закона упругости Гука, направленная вдоль оси Z (где k – коэффициент, характеризующий упругость пружины). Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина упругой деформации пружины $z_0 = a$. После снятия действия внешней силы под действием упругого напряжения маятник придет в движение, которое описывается уравнением Ньютона

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -kz(t). \quad (5)$$

Решение (5), удовлетворяющее начальному условию, можно взять в виде (для простоты считаем, что начальная фаза равна 0)

$$z(t) = a \cos(\omega t). \quad (6)$$

Из (6) следует, что маятник будет совершать гармонические колебания с амплитудой a и циклической частотой ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (7)$$

где T – период колебаний.

Колебательная скорость маятника описывается выражением

$$v = \frac{dz(t)}{dt} = -\omega a \sin(\omega t), \quad (8)$$

а его кинетическая энергия с учетом (7) равна

$$W_k(t) = \frac{1}{2} ka^2 \sin^2 \omega t. \quad (9)$$

Потенциальная энергия маятника описывается выражением

$$W_p(t) = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 \omega t. \quad (10)$$

Из (9) и (10) видно, что колебания потенциальной и кинетической энергий маятника имеют одинаковые амплитуды, происходят с удвоенной частотой, по сравнению с частотой колебаний упругой деформации и колебательной скорости, и имеют сдвиг по фазе $\pi/2$. Также через каждую четверть периода колебаний происходит полное преобразование потенциальной энергии маятника в его кинетическую энергию и наоборот. Очевидно, что для полной энергии маятника можно записать

$$W = W_k(t) + W_p(t) = \frac{1}{2} ka^2 = \text{const}. \quad (11)$$

То есть в соответствии с законом сохранения энергии полная механическая энергия пружинного маятника без затухания сохраняется неизменной в любой момент времени. Такой маятник можно рассматривать как классический гармонический осциллятор.

Рассмотрим упругие волны без потерь на примере звуковых волн в идеальном газе. Теория таких волн разработана давно и изложена в многочисленных научных трудах [3–10]. В существующей теории звуковые волны рассматриваются как упругие колебания частиц газа, распространяющиеся в продольном направлении от источника звука, который создает периодическое смещение частиц в этом направлении со скоростью, позволяющей изменить давление газа в некотором объеме, определяемом геометрией источника. Колебания частиц газа создают упругие деформации в этом объеме, которые, в свою очередь, обуславливают периодическое повышение и понижение давления газа относительно его начального невозмущенного значения. При этом распространения частиц газа в направлении распространения звуковой волны не происходит. В пространстве распространяется только упругая деформация сжатия и растяжения. При максимальном сжатии или растяжении частиц газа в некотором объеме их колебательная скорость и кинетическая энергия становятся равными нулю, а по-

тенциальная энергия достигает максимального значения и определяется максимальной упругой деформацией или изменением давления газа в этом объеме. Колебательная скорость частиц газа в звуковой волне определяет их кинетическую энергию, а работа по созданию упругой деформации (или изменения давления газа в рассматриваемом объеме) определяет потенциальную энергию частиц газа этого объема.

В идеальном газе с плотностью ρ_0 и давлением P_0 источник звука создает продольное смещение частиц газа $\xi(z, t)$ вдоль оси OZ в объеме $V_0 = S_0 \Delta z$. Смещение частиц газа приводит к появлению в этом объеме упругой деформации, которая будет распространяться в направлении смещения. Рассматривая движение выделенного объема идеального газа в адиабатическом приближении, например [4], получают волновое уравнение для смещения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (12)$$

где $v_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ – скорость звука; $\gamma = C_p/C_V$; C_p ,

C_V – теплоемкость газа при постоянном давлении и объеме соответственно.

Решение волнового уравнения (12) обычно принимается в виде

$$\xi(z, t) = A \cos(\omega t - kz). \quad (13)$$

Подстановка (13) в (12) позволяет получить связь между величинами v_s , ω и k

$$v_s = \frac{\omega}{k}. \quad (14)$$

Считается, что решение (13) описывает колебания смещения частиц газа, распространяющиеся вдоль оси Z с фазовой скоростью $\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$, равной скорости звука (14), т. е. (13) описывает продольную звуковую волну. Эта волна обладает кинетической и потенциальной энергией.

Плотности кинетической энергии звуковой волны и потенциальной энергии определяются соответственно по формулам:

$$w_k(z, t) = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz); \quad (15)$$

$$\begin{aligned} w_p(z, t) &= \frac{1}{2} \gamma P_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v_s^2 k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz) = \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (16)$$

Следовательно, плотность полной энергии звуковой волны

$$\begin{aligned} w(z, t) &= w_k(z, t) + w_p(z, t) = \\ &= \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (17)$$

В [2–10] из выражений (15)–(17) сделаны следующие выводы:

– кинетическая и потенциальная энергии бегущей звуковой волны без потерь одинаковы в любой момент времени;

– усредненные по времени (периоду колебаний) кинетическая и потенциальная энергии такой волны равны и постоянны

$$\bar{w}_k = \bar{w}_p = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 A^2 = \text{const}; \quad (18)$$

– усредненная по времени плотность полной энергии звуковой волны есть величина постоянная

$$\bar{w} = \bar{w}_k + \bar{w}_p = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 = \text{const}. \quad (19)$$

При этом в литературе не обсуждается практически очевидный факт, что софазные колебания $w_k(z, t)$ (15) и $w_p(z, t)$ (16) противоречат смыслу понятия «упругие колебания», так как вызывают естественные вопросы:

– куда девается энергия волны в моменты времени, когда и кинетическая, и потенциальная энергии волны одновременно становятся равными нулю, что бежит в такой волне?

– откуда появится энергия волны в последующие моменты времени?

Равно как не обсуждается также и то, что полученное выражение (17) противоречит закону сохранения энергии (11), согласно которому полная энергия звуковой волны без потерь должна оставаться постоянной в любой момент времени, а не средняя энергия этой волны за период.

Таким образом, наряду с существующими правильными представлениям об упругих колебаниях в газе, о том, что максимальная колебательная скорость частиц газа в звуковой волне достигается в моменты времени, когда упругая деформация равна нулю, и, наоборот, в моменты времени, когда колебательная скорость частиц газа становится равной нулю, упругая деформация – максимальна, существует и физически некорректное описание этих колебаний, нарушающее закон сохранения энергии. Некорректность в описании звуковых волн появилась из-за того, что для этого используется только одно волновое уравнение (12) для смещения частиц газа. Так как производная по времени от решения уравнения (13) определяет плотность кинетической энергии волны (15), а производная по координате от этого же решения – плотность потенциальной энергии волны (16), получается, что обе эти величины изменяются с течением времени по одинаковому гармоническому закону. Отсюда следует физически некорректный вывод, что максимальная колебательная скорость частиц газа и максимальная упругая деформация в звуковой волне достигаются одновременно.

Для физически корректного описания звуковых волн в идеальном газе нужно использовать систему из волновых уравнений для параметров, определяющих кинетическую и потенциальную энергию волны. Например, в [6] рассматривается баротропный поток идеального газа, линии тока которого параллельны оси Z , а скорость u , давление P , плотность ρ и температура T являются функциями только координаты z и времени t . Такой поток описывается уравнением Эйлера и уравнением неразрывности, образующими систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, в которой содержатся неизвестные u , P и ρ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Для того чтобы эту систему можно было решить, необходимы еще уравнение связи между P и ρ , начальные и граничные условия.

В покоящемся идеальном газе с параметрами u_0 , P_0 и ρ_0 создаются малые возмущения скорости u' , давления P' или плотности ρ' . Возникающее вследствие этого движение является одномерным, параллельным оси Z и зависящим только от координаты z и времени t . Ставится задача нахождения элементов этого движения. Система нелинейных уравнений (20) может быть линеаризована, если в ней пренебречь произведениями малых величин или их производных по координате, как малыми величинами высших порядков. В этом случае она принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Так как в идеальном газе увеличение давления приводит к увеличению плотности и наоборот, то $dP/d\rho > 0$, и можно ввести обозначение

$$\left(\frac{dP}{d\rho} \right)_0 = v_0^2. \quad (22)$$

Нетрудно убедиться, что v_0 имеет размерность скорости.

Дифференцируя по времени первое уравнение системы (21) и подставляя в него второе уравнение, с учетом (22) получаем волновое уравнение для u'

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}. \quad (23)$$

Аналогично, дифференцируя по времени второе уравнение системы (21) и подставляя в него первое уравнение, получаем волновое уравнение для ρ'

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}. \quad (24)$$

Из (24) и (22) получаем такое же уравнение для P'

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial z^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}. \quad (25)$$

Таким образом, малые возмущения скорости частиц газа u' , его плотности ρ' и давления P' в случае идеального газа описываются одинаковыми волновыми уравнениями (23)–(25) и распространяются с одинаковой скоростью v_0 . Поскольку волна возмущений давления – это звуковая волна, то v_0 – это скорость звука.

Возмущение давления P' (или, что то же самое, напряжения σ) в соответствии с законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (26)$$

где ε – относительная упругая деформация; E – модуль упругости газа.

Из (25) и (26) следует, что и для упругой деформации можно записать волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \quad (27)$$

Согласно [4], плотность потенциальной энергии сжатого газа определяется как работа по сжатию его единичного объема и выражается через модуль упругости и величину упругой деформации

$$w_p(z, t) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2. \quad (28)$$

Плотность кинетической энергии колеблющегося газа может быть определена как

$$w_k(z, t) = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2. \quad (29)$$

Для нахождения этих энергий в (28) и (29) нужно подставлять решения соответствующих волновых уравнений. Так как каждое волновое уравнение имеет несколько математически корректных решений, то для выбора правильного нужно исходить из их физического смысла. Пусть в начальный момент времени в рассматриваемом объеме существует максимальное изменение давления (напряжения) и, следовательно, максимальная упругая деформация. Очевидно, что в этот момент времени скорость колебания частиц газа равна нулю. Таким начальным условиям удовлетворяют

гармонические решения волновых уравнений (27) и (23), сдвинутые по фазе на $\pi/2$:

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_m \cos(\omega t - kz); \quad (30)$$

$$u'(z, t) = u'_m \sin(\omega t - kz). \quad (31)$$

Подставляя (30) в (28) и (31) в (29), соответственно получаем:

$$w_p(z, t) = \frac{1}{2} E \varepsilon_m^2 \cos^2(\omega t - kz); \quad (32)$$

$$w_k(z, t) = \frac{1}{2} \rho_0 u_m'^2 \sin^2(\omega t - kz). \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что колебания плотности кинетической и потенциальной энергий звуковой волны сдвинуты по фазе относительно друг друга на $\pi/2$, а их периоды составляют половину периода колебаний деформации и скорости частиц. Также видно, что в моменты времени, когда плотность потенциальной энергии волны принимает максимальное значение $w_p^{\max} = \frac{1}{2} E \varepsilon_m^2$, плотность кинетической энергии равна нулю, а через четверть периода в моменты времени, когда плотность потенциальной энергии равна нулю, плотность кинетической энергии становится максимальной – $w_k^{\max} = \frac{1}{2} \rho_0 u_m'^2$. Это может быть только тогда, когда происходит полное преобразование потенциальной энергии в кинетическую и наоборот, и выполняется условие

$$w_p^{\max} = \frac{1}{2} E \varepsilon_m^2 = w_k^{\max} = \frac{1}{2} \rho_0 u_m'^2. \quad (34)$$

Следовательно, плотность полной энергии звуковой волны без потерь есть величина постоянная в любой момент времени в соответствии с законом сохранения энергии

$$\begin{aligned} w &= w_p(z, t) + w_k(z, t) = \frac{1}{2} E \varepsilon_m^2 = \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 u_m'^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (32) и (33) также следует, что положение максимумов кинетической и потенциальной энергий звуковой волны чередуется в про-

странстве через каждые $\lambda/4$, т. е. такая волна действительно является бегущей. При этом в каждой точке пространства в волне без потерь полная плотность энергии одинакова.

Таким образом, бегущую звуковую волну без потерь можно рассматривать как классический гармонический осциллятор.

В соответствии с физическим смыслом понятия «плотность потока энергии» как количества энергии, протекающей через единичную площадку в единицу времени в направлении нормали к площадке, эта величина для бегущей упругой волны может быть корректно описана через плотность полной энергии волны w и ее скорость v_s , т. е. выражением для вектора Умова

$$\vec{I} = w\vec{v}_s. \quad (36)$$

ВЫВОДЫ

1. Показано, что в существующей в настоящее время теории упругих волн нарушается закон сохранения энергии. Предложено физически корректное описание звуковой волны в идеальном газе, основанное на использовании системы волновых уравнений для возмущения скорости колебаний частиц газа, определяющего их кинетическую энергию, и для упругой деформации, определяющей потенциальную энергию частиц газа в волне. Физически корректными решениями такой системы волновых уравнений являются гармонические решения, описывающие колебания возмущения скорости частиц газа и их упругой деформации, сдвинутые по фазе на $\pi/2$.

2. В бегущей звуковой волне без потерь, описываемой такими решениями, через каждые четверть периода происходит полное преобразование кинетической энергии частиц газа в потенциальную и наоборот. Плотность полной энергии волны в соответствии с законом сохранения энергии остается постоянной в каждый момент времени.

3. Плотность потока энергии бегущей упругой волны описывается вектором Умова.

4. Бегущую звуковую волну без потерь в идеальном газе можно рассматривать как гармонический осциллятор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1983. 928 с.
2. Орит, Дж. Физика / Дж. Орит. М.: Мир, 1981. Т. 1. 336 с.
3. Тимошенко, С. П. Теория упругости. 2-е изд. / С. П. Тимошенко. Л.: ОНТИ, 1937. 452 с.
4. Горелик, Г. С. Колебания и волны / Г. С. Горелик. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 572 с.
5. Ландау, Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986. 730 с.
6. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. М.: Наука, 1978. 736 с.
7. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. М.: Наука, 1979. 384 с.
8. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике. 8-е изд. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс; пер. с англ. М.: Либликом, 2013. Т. 4: Кинетика. Теплота. Звук. 260 с.
9. Кроуфорд, Ф. С. Берклевский курс физики / Ф. С. Кроуфорд. М.: Наука, 1984. Т. 3: Волны. 512 с.
10. Holiday, D. Fundamentals of Physics. 9th ed. / D. Holiday, R. Resnick, J. Walker // John Wiley & Sons. 2010. 1330 p.

Поступила 15.06.2020

Подписана в печать 25.08.2020

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Prokhorov A. M. (1983) Physical Encyclopedic Dictionary. Moscow, Sovetskaya Entsiklopedia Publ. 928 (in Russian).
2. Oriri J. (1967) *Fundamental Physics*. New York, Wiley.
3. Timoshenko S. P. (1937) *Elasticity Theory*. 2nd ed. Leningrad, Publishing House of Scientific and Technical Information Department. 452 (in Russian).
4. Gorelik G. S. (1959) *Oscillations and Waves*. Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature. 572 (in Russian).
5. Landau L. D., Lifshitz E. M. (1986) *Hydrodynamics*. Moscow, Nauka Publ. 730 (in Russian).
6. Loitsyanskii L. G. (1978) *Mechanics of Liquids and Gases*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
7. Vinogradova M. B., Rudenko O. V., Sukhorukov A. P. (1979) *The Wave Theory*. Moscow, Nauka Publ. 384 (in Russian).
8. Feynman R., Leighton R., Sands M. (2013) *The Feynman Lectures on Physics. Vol. 4: Kinetics. Heat. Sound*. 8th ed. Moscow, Librokom Publ. 260 (in Russian).
9. Crawford F. S. (1984) *Berkeley Physics Course. Vol. 3: Waves*. Moscow, Nauka Publ. 512 (in Russian).
10. Holiday D., Resnick R., Walker J. (2010) *Fundamentals of Physics*. 9th ed. John Wiley & Sons. 1330.

Received: 15.06.2020

Accepted: 25.08.2020

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-168-172>

УДК 519.6517.5

Приближенное представление дилогарифмами решения одной вариационной краевой задачи для круга при граничном условии Неймана

Докт. физ.-мат. наук, проф. И. Н. Мелешко¹⁾, канд. физ.-мат. наук, доц. П. Г. Ласый¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

©Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Известно, что краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона эквивалентны задаче вариационного исчисления – о минимуме интеграла, для которого данное уравнение в частных производных является уравнением Эйлера – Лагранжа. Например, задача о минимуме интеграла Дирихле в единичном круге с центром в начале координат на некотором допустимом множестве функций при заданных значениях нормальной производной на окружности эквивалентна краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа в этой области. На основе известного точного решения краевой задачи Неймана для круга с помощью специальной приближенной формулы для интеграла Дини сконструировано эффективное приближенное представление дилогарифмами решения указанной выше эквивалентной вариационной краевой задачи. Приближенная формула эффективна в том смысле, что она достаточно проста при численной реализации, устойчива, а равномерная по кругу оценка погрешности позволяет проводить вычисления с заданной точностью. Специальная квадратурная формула для интеграла Дини обладает замечательным свойством – ее коэффициенты неотрицательны. Квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами занимают особое место в теории приближенных вычислений определенных интегралов и ее приложениях. Естественно, что еще большую значимость это свойство приобретает, когда коэффициенты не числа, а некоторые функции. Проведенный численный анализ приближенного решения подтверждает его эффективность.

Ключевые слова: вариационная задача, краевая задача Неймана, интеграл Дини, приближенное решение, квадратурная формула

Для цитирования: Мелешко, И. Н. Приближенное представление дилогарифмами решения одной вариационной краевой задачи для круга при граничном условии Неймана / И. Н. Мелешко, П. Г. Ласый // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 168–172. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-168-172>

Approximate Dilogarithm Representation of One Variational Boundary Value Problem Solution for Circle under the Neumann Boundary Condition

I. N. Meleshko¹⁾, P. G. Lasy¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. It is known that boundary value problems for the Laplace and Poisson equations are equivalent to the problem of the calculus of variations – the minimum of an integral for which the given partial differential equation is the Euler – Lagrange equation. For example, the problem of the minimum of the Dirichlet integral in the unit disc centered at the origin on some admissible set of functions for given values of the normal derivative on the circle is equivalent to the Neumann boundary value problem for the Laplace equation in this domain. An effective approximate dilogarithm representation of the solution of the above equivalent variational boundary value problem is constructed on the basis of the known exact solution of the Neumann Boundary value problem for a circle using a special approximate formula for the Dini integral. The approximate formula is effective in the sense that it is quite simple in numerical implementation, stable, and the error estimation, which is uniform over a circle, allows calculations with the given accuracy. A special quadrature formula for the Dini integral has

Адрес для переписки

Мелешко Иван Николаевич
Белорусский национальный технический университет
ул. Б. Хмельницкого, 9,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

Address for correspondence

Meleshko Ivan N.
Belarusian National Technical University
9, B. Khmel'nithskogo str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
kafvm2@bntu.by

a remarkable property – its coefficients are non-negative. Quadrature formulas with non-negative coefficients occupy a special place in the theory of approximate calculations of definite integrals and its applications. Naturally, this property becomes even more significant when the coefficient are not number, but some functions. The performed numerical analysis of the approximate solution confirms its effectiveness.

Keywords: variational problem, boundary Neumann problem, Dini integral, approximate solution, quadrature formula

For citation: Meleshko I. N., Lasy P. G. (2021) Approximate Dilogarithm Representation of One Variational Boundary Value Problem Solution for Circle under the Neumann Boundary Condition. *Science and Technique*. 20 (2). 168–172. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-168-172> (in Russian)

Введение

Вариационные методы часто применяют для решения различных задач механики, физики и математической физики [1–4]. Представляет интерес вопрос о решении вариационных задач с помощью эффективных методов решения эквивалентных краевых задач математической физики.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала на некотором допустимом множестве \mathfrak{Z} функций $u = u(x, y)$, удовлетворяющих граничному условию Неймана:

$$\iint_G |\text{grad } u|^2 \, dx dy.$$

Она эквивалентна краевой задаче Неймана для уравнения Лапласа в области G . В случае, когда область G – единичный круг с центром в начале координат, мы приходим к задаче о нахождении функции $u = u(r, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа и граничному условию Неймана соответственно:

$$\Delta u = 0, \, r < 1; \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = f(\varphi), \, -\pi \leq \varphi \leq \pi, \tag{2}$$

где $f(\varphi)$ – непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция.

Необходимым условием разрешимости краевой задачи (1), (2) является выполнение равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \, d\varphi = 0.$$

Решение задачи находится в этом случае с точностью до действительной постоянной и может быть записано с помощью интеграла Дини [1, с. 598–600; 2, с. 231–232] в виде

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln |t - z| \, d\tau + C, \tag{3}$$

$$t = e^{i\tau}, \, z = re^{i\varphi}.$$

Решение краевой задачи (1), (2), а следовательно, и соответствующей вариационной задачи будет единственным, если потребовать, чтобы множество допустимых функций \mathfrak{Z} удовлетворяло некоторому дополнительному условию.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ
Приближенная формула для интеграла Дини

Сконструируем квадратурную формулу с неотрицательными коэффициентами для интеграла

$$D(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln |t - z| \, d\tau, \tag{4}$$

$$t = e^{i\tau}, \, z = re^{i\varphi}.$$

Запишем этот интеграл в виде разности двух интегралов

$$D(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln \frac{2}{|t - z|} \, d\tau - \frac{\ln 2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \, d\tau. \tag{5}$$

Зададим на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему точек $\varphi_k = kh, \, k = \overline{-n, n}, \, h = \frac{2\pi}{2n+1}$ и аппроксимируем функцию $f(\varphi)$ на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi) \approx \tilde{f}(\varphi) = \sum_{k=-n}^n \theta_k(\varphi) f(\varphi_k), \tag{6}$$

$$\text{где } \theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]; \\ 0, & \varphi \notin \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Подставив в представление (5) интеграла Дини вместо плотности ее приближение по (6), получим следующую квадратурную формулу:

$$D(r, \varphi) \approx \tilde{D}(r, \varphi) = \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \frac{h \ln 2}{\pi} \sum_{k=-n}^n f(\varphi_k), \tag{7}$$

где

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau. \quad (8)$$

Теорема 1. Коэффициенты $A_k(r, \varphi)$ квадратурной формулы (7) неотрицательны и вычисляются по формуле

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \left(h \ln 2 + \operatorname{Im} \left(L^2 \left(z e^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)} \right) - L^2 \left(z e^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)} \right) \right) \right), \quad (9)$$

где $L^2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ – дилогарифм Эйлера [5, 6].

Доказательство. Так как в единичном круге $\ln \frac{2}{|t-z|} > 0$, то из представления (8) для коэффициентов $A_k(r, \varphi)$ следует, что все они неотрицательны для $r < 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Далее запишем

$$\begin{aligned} A_k(r, \varphi) &= \frac{h \ln 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \operatorname{Re} \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) d\tau = \\ &= \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{t} \right)^k \right) d\tau = \\ &= \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \cos k(\tau - \varphi) \right) d\tau = \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \times \\ &\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k^2} \left(\sin k \left(\varphi - \varphi_k + \frac{h}{2} \right) - \sin k \left(\varphi - \varphi_k - \frac{h}{2} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(h \ln 2 + \operatorname{Im} \left(L^2 \left(z e^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)} \right) - L^2 \left(z e^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Формула (9) доказана.

Получим оценки погрешности приближенной формулы (7).

Теорема 2. Если плотность $f(\varphi)$ интеграла Дини непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то имеет место равномерная по $r \leq 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$ оценка погрешности приближенной формулы (7)

$$|D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| \leq 4\omega(f, h) \ln 2, \quad (10)$$

где $\omega(f, h)$ – модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на $[-\pi, \pi]$ функция, то равномерно по всем $r \leq 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$

$$|D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| \leq 2M_1 h \ln 2, \quad (11)$$

где $M_1 = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f'(\varphi)|$.

Доказательство. Сравнивая (5) и (7), находим, что

$$D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\tau) - \tilde{f}(\tau)) \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau - \frac{\ln 2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\tau) - \tilde{f}(\tau)) d\tau.$$

Оценивая эту разность по абсолютной величине и учитывая, что в единичном круге $\ln \frac{2}{|t-z|} > 0$, можно записать неравенство

$$\begin{aligned} |D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau + \frac{\ln 2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \right) \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)|, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} |D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau + 4 \ln 2 \right) \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)|. \quad (12) \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{|t-z|} &= -\operatorname{Re} \ln \left(1 - \frac{z}{t} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{t} \right)^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \cos k(\tau - \varphi), \end{aligned}$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k^2} \sin k(\tau - \varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

и, следовательно, неравенство (12) можно переписать в виде

$$|D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| \leq 4 \ln 2 \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)|. \quad (13)$$

Если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \omega(f, h), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (14)$$

если же она непрерывно дифференцируема на этом промежутке, то

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \frac{M_1 h}{2}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (15)$$

Из (13)–(15) следуют доказываемые неравенства (10), (11).

Полученные оценки погрешности приближенной формулы (7) для интеграла Дини полезны также и тем, что в них указываются не только порядок, но и возможные значения для констант.

Приближенное представление дилогарифмами решения вариационной задачи

Приближенное решение вариационной задачи будем конструировать на основе формул (3)–(5) и (7), из которых вытекают следующие точные и приближенные равенства:

$$u(r, \varphi) = D(r, \varphi) + C \approx \tilde{D}(r, \varphi) + C; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r, \varphi) = \tilde{D}(r, \varphi) + C = & \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \\ & - \frac{h \ln 2}{\pi} \sum_{k=-n}^n f(\varphi_k) + C, \end{aligned} \quad (17)$$

в которых коэффициенты $A_k(r, \varphi)$ определены формулами (8), (9). Формулы (9) и (17) позволяют представить приближенное решение дилогарифмами Эйлера

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r, \varphi) = & \frac{1}{\pi} \sum_{k=-n}^n \operatorname{Im} \left(L^2 \left(z e^{-i \left(\varphi_k - \frac{h}{2} \right)} \right) - \right. \\ & \left. - L^2 \left(z e^{-i \left(\varphi_k + \frac{h}{2} \right)} \right) \right) f(\varphi_k) + C. \end{aligned} \quad (18)$$

Сравнив равенства (16) и (17), замечаем, что

$$u(r, \varphi) - \tilde{u}(r, \varphi) = D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi).$$

Поэтому для оценки погрешности формул (17) и (18) можно воспользоваться неравенствами (10) и (11) теоремы 2.

Об устойчивости квадратурной формулы (7) для интеграла Дини

Выше отмечен тот факт, что коэффициенты $A_k(r, \varphi)$ квадратурной формулы (7) неотрицательны для всех $r < 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Квадратур-

ные формулы с неотрицательными коэффициентами занимают особое место в теории приближенного вычисления определенных интегралов и ее приложениях [7]. Важность свойства положительности коэффициентов квадратурных формул отмечается также в [8]. Естественно, что еще большую значимость это свойство приобретает, когда коэффициенты не числа, а некоторые функции, на что указывается в [9].

Проведем исследование квадратурной формулы (7) на устойчивость. Предположим, что значения плотности $f(\varphi)$ интеграла Дини в узлах квадратурной формулы найдены приближенно, т. е. вместо $f(\varphi)$ имеем $\tilde{f}(\varphi)$, так что погрешности равны $\varepsilon_k = f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)$. Пусть $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$, $k = \overline{-n, n}$. Тогда для погрешности вычисления квадратурной суммы в (7) получается неравенство

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) \tilde{f}(\varphi_k) \right| \leq \\ \leq \varepsilon \sum_{k=-n}^n |A_k(r, \varphi)|, \end{aligned}$$

из которого следует, что точная верхняя грань погрешности вычисления этой квадратурной

суммы пропорциональна $\sum_{k=-n}^n |A_k(r, \varphi)|$. Оценим

данную сумму числом, не зависящим от r и φ , учитывая, что, как мы убедились выше, $\ln \frac{2}{|t-z|} > 0$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau = 0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n |A_k(r, \varphi)| = & \frac{1}{\pi} \sum_{k=-n}^n \left| \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln \frac{2}{|t-z|} dt \right| = \\ = & \frac{1}{\pi} \left(2\pi \ln 2 + \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau \right) = 2 \ln 2. \end{aligned}$$

Значит, при всех $r < 1$ и $\varphi \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \sum_{k=-n}^n A_k(r, \varphi) \tilde{f}(\varphi_k) \right| \leq 2\varepsilon \ln 2.$$

Это означает, что при всех n, r и φ погрешность вычислений этой квадратурной суммы имеет тот же порядок, что и погрешность вычис-

ления плотности $f(\varphi)$. В таких случаях говорят, что квадратурная формула численно устойчива.

Пример. Найти решение уравнения (1) при условии

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=1} = \sin \varphi + \varphi \cos \varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Точное решение этой задачи найдено в [10, с. 133] с помощью преобразований интеграла Шварца

$$u(r, \varphi) = D(r, \varphi) + C = \operatorname{Im} \left(\left(z - \frac{1}{z} \right) \ln(1+z) \right) + C, \quad (19)$$

где $\ln(1+z)$ – ветвь логарифмической функции, принимающей на промежутке $(-1, 1)$ действительной оси действительные значения.

Максимальная погрешность вычислений по точной формуле (19) и с помощью приближенного уравнения (18) при $r = 0,1+0,2k$, $k = \overline{0, 4}$;

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $n = 20$ равна 0,002. Аналогично погрешность вычислений в тех же точках при $n = 50$ не превышает 0,00033, а при $n = 100$ она не больше чем 0,000083.

Численный эксперимент подтверждает эффективность и устойчивость квадратурной формулы.

ВЫВОДЫ

1. На основе известного точного решения краевой задачи Неймана для круга с помощью специальной квадратурной формулы для интеграла Дини сконструировано эффективное приближенное представление дилогарифмами решения эквивалентной вариационной задачи на допустимом множестве функций.

2. Получена равномерная в единичном круге оценка погрешности приближенной формулы. Проведен численный анализ квадратурной суммы на устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
2. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.

3. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. М.: Наука, 1974. Т. 4. 336 с.
4. Беляев, Н. М. Методы теории теплопроводности: в 2 ч. / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. М.: Высш. шк., 1982. Ч. 1. 327 с.
5. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1967. 294 с.
6. Пыхтеев, Г. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. Минск: Изд-во БГУ, 1976. 68 с.
7. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. М.: Наука, 1967. 500 с.
8. Мысовских, И. П. Интерполяционные кубатурные формулы / И. П. Мысовских. М.: Наука, 1981. 336 с.
9. Мелешко, И. Н. Квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами для сингулярных интегралов Коши / И. Н. Мелешко // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1989. № 3. С. 27–34.
10. Мелешко, И. Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. 197 с.

Поступила 07.10.2020

Подписана в печать 17.12.2020

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Kantarovich L. V., Krylov V. I. (1962) *Approximate Methods of Higher Analysis*. Moscow-Leningrad, Fizmatgiz Publ. 708 (in Russian).
2. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. (1973) *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*. Moscow, Nauka Publ. 736 (in Russian).
3. Smirnov V. I. (1974) *Higher Mathematics Course. Vol. 4*. Moscow, Nauka Publ. 336 (in Russian).
4. Belyaev N. M., Ryadno A. A. (1982) *Methods of the Theory of Heat Conduction. Part 1*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 327 (in Russian).
5. Bateman H., Erdelyi A. (1967) *Higher Transcendental Functions*. Moscow, Nauka Publ. 294 (in Russian).
6. Pykhteev G. N., Meleshko I. N. (1976) *Polylogarithms, their Properties and Calculation Methods*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 68 (in Russian).
7. Krylov V. I. (1967) *Approximate Calculation of Integral Methods*. Moscow, Nauka Publ. 500 (in Russian).
8. Mysovskikh I. P. (1981) *Interpolatory Cubature Formulas*. Moscow, Nauka Publ. 336 (in Russian).
9. Meleshko I. N. (1989) Quadrature Formulas with Non-negative Coefficients for Singular Cauchy Integrals. *Vesti Akademii Navuk BSSR. Ser. Fizika-Matematychnykh Navuk* [Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series], (3), 27–34 (in Russian).
10. Meleshko I. N. (1999) *Special Formulas for Integrals of Cauchy Type and their Applications*. Minsk, VUZ-UNITI Publ. 197 (in Russian).

Received: 07.10.2020

Accepted: 17.12.2020

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-173-178>

УДК 004.383

Спектральный анализ сигнала в системе Wolfram Mathematica

Канд. физ.-мат. наук, доц. М. А. Гундина¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Выполнены спектральный анализ сигналов различной природы, построение скалограммы сигнала с помощью вейвлета Морле, модификация скалограммы для получения более информативного графического представления сигнала. Путем преобразования Фурье строится спектральный анализ сигнала. С помощью системы Mathematica разработана модификация графического представления результата вейвлет-преобразования. Для этого использовалась вейвлет-скалограмма как двумерное представление исходного сигнала. На ней введена шкала для значения амплитуды сигнала в зависимости от времени и периода ее составляющих компонент. Такое графическое представление позволяет получить дополнительную информацию о динамических свойствах исходного сигнала. Разработана модификация представления скалограммы исходного сигнала для более полного спектрального анализа (определение периода составляющих компонент). Приведен пример использования модифицированной скалограммы для анализа сигнала, содержащего два импульса – звукового сигнала и белого шума. Базисным вейвлетом в этом случае является вейвлет Морле. Произведено сравнение скалограмм – полученной с помощью встроенной функции и модифицированной. Недостаток первой скалограммы – невозможность оценки периодичности сигнала, а ее достоинство – возможность оценки локализации импульса. Для модифицированной скалограммы достоинством является оценка периодичности сигнала, а недостатком – неточность определения диапазона локализации импульса. Для спектрального анализа в системе Mathematica рекомендуется использовать сочетание двух подходов (использование стандартной встроенной функции для определения локализации импульса) и модифицированной скалограммы (для определения периодов составляющих компонент).

Ключевые слова: Wolfram Mathematica, обработка сигнала, преобразование Фурье, спектральный анализ, частота сигнала, вейвлет-преобразование, звуковые файлы, скалограмма

Для цитирования: Гундина, М. А. Спектральный анализ сигнала в системе Wolfram Mathematica / М. А. Гундина // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 2. С. 173–178. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-173-178>

Spectrum Analysis of Signal in Wolfram Mathematica System

М. А. Hundzina¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The purpose of this paper is a spectrum analysis of signals of various nature, construction of the signal scalogram using Morlet wavelet, modification of the scalogram to obtain a more informative graphic representation of the signal. Spectral analysis of the signal is constructed by means of the Fourier transform. A modification of the graphical representation of the result of the wavelet transform has been developed with the help of the Mathematica system. For this, a wavelet scalogram has been used as a two-dimensional representation of the original signal. A scale has been introduced on it for the value of the signal amplitude depending on the time and period of its constituent components. This graphical representation allows us to obtain additional information about the dynamic properties of the original signal. A modification of the representation of the original signal scalogram has been developed for a more complete spectrum analysis (determination of the period of the constituent components). The paper contains an example using a modified scalogram for the analysis of a signal

Адрес для переписки

Гундина Мария Анатольевна
Белорусский национальный технический университет
ул. Я. Коласа, 22,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-67-84
hundzina@bntu.by

Address for correspondence

Hundzina Maryia A.
Belarusian National Technical University
22, Ya. Kolasa str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-67-84
hundzina@bntu.by

containing two pulses, an audio signal and white noise. The basic wavelet in this case is the Morlet wavelet. A comparison of the scalogram, obtained using the built-in function, and the modified scalogram has been made in the paper. The disadvantage of the first scalogram is the impossibility of assessing the frequency of the signal; its advantage is the ability to assess the localization of the pulse. For a modified scalogram, the advantage is the estimation of the signal periodicity, and the disadvantage is the inaccuracy in determining the range of pulse localization. For spectrum analysis in Mathematica, it is recommended to use a combination of two approaches (using a standard built-in function to determine the localization of the pulse) and a modified scalogram (to determine the periods of the constituent components).

Keywords: Wolfram Mathematica, signal processing, Fourier transform, spectrum analysis, signal frequency, wavelet transform, sound files, scalogram

For citation: Hundzina M. A. (2021) Spectrum Analysis of Signal in Wolfram Mathematica System. *Science and Technique*. 20 (2). 173–178. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-173-178> (in Russian)

Введение

При обработке сигналов часто используется спектральный анализ, применяемый в задачах распознавания речи, обнаружения надводных кораблей и подводных лодок, в системах сжатия полосы речевого сигнала, при получении информации о скорости цели в радиолокационных системах [1, 2]. Поэтому развитие данного направления является актуальным для различных областей науки и техники. В отечественной и зарубежной литературе широко освещены существующие методы и задачи спектрального анализа сигналов, представлена подробная классификация методов спектрального анализа и рассмотрены наиболее применяемые из них на сегодняшний день. Особое внимание уделяется классическим методам спектрального анализа сигналов, построенных на преобразовании Фурье [3]. В этом случае сигнал раскладывается на элементарные гармонические колебания с различными частотами [4], а свойства и зависимости выражаются с помощью одной базисной экспоненциальной функции.

Известно, что преобразование Фурье нашло широкое применение в прикладных исследованиях. Одна из актуальных областей его использования – биометрическая идентификация человека по радужной оболочке [5]. Также обработке могут подвергаться речевые сообщения. Например, для сокрытия двоичных данных в речевых сообщениях могут использоваться преобразование Фурье и вейвлет-преобразование, что позволяет повысить стойкость скрытых сообщений [6, 7].

Спектральный анализ широко применяется для сбора дополнительной информации о данных, полученных промышленным оборудо-

ванием [8, 9]. Система Mathematica может использоваться для реализации известных и разработки новых методов обработки сигналов [10–12].

Цель исследования автора – проведение спектрального анализа некоторых сигналов, построение скалограммы сигнала с помощью встроенных возможностей системы, модификация скалограммы для получения дополнительной информации о сигнале.

Основная часть

Путем преобразования Фурье строится спектральный анализ сигнала. С помощью системы Mathematica разработана модификация графического представления вейвлет-коэффициентов преобразования. Спектральный анализ является одним из наиболее распространенных видов анализа сигналов и в системе Mathematica имеет ряд особенностей.

Сигнал, содержащий две периодические составляющие. Рассмотрим сигнал, который представляет собой сумму синусоид $\sin(100\pi t) + \sin(300\pi t)$. График этого сигнала показан на рис. 1а.

Спектр вычисляется с помощью преобразования Фурье, примененного к массиву значений, которые соответствуют отсчетам сигнала во временной области. Вычисление комплексного спектра осуществляется с помощью функции *Fourier*. Здесь для его отображения используется модуль комплексного спектра (амплитудный спектр).

Для построения представления комплексного спектра применяется функция *ComplexListPlot*, результат действия которой изображен на рис. 1б.

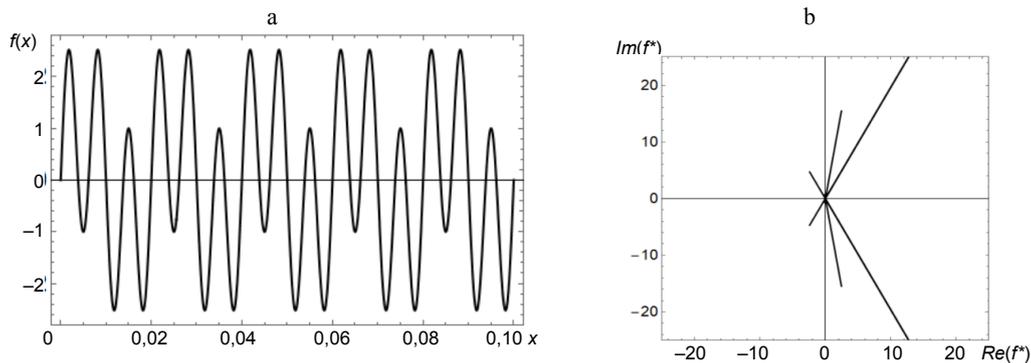


Рис. 1. График исходного сигнала (а) и представление комплексного спектра (б): $f(x)$ – значение сигнала; $Re(f^*)$, $Im(f^*)$ – действительная и мнимая части преобразования Фурье

Fig. 1. Source signal graph (a) and complex spectrum representation (b): $f(x)$ – signal value; $Re(f^*)$, $Im(f^*)$ – real and imaginary parts of the Fourier transform

Следует отметить, что графики на рис. 1 не дают достаточно информации о сигнале: для простых сигналов представляет собой отдельные линии, для сложных – набор отрезков. В этом случае необходимо построение графика модуля спектра (рис. 2).

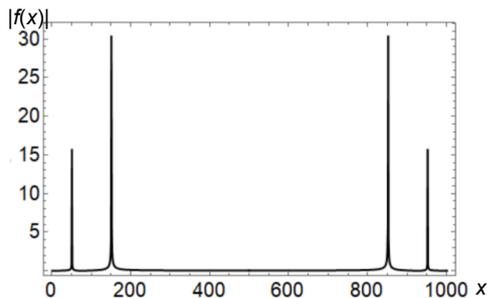


Рис. 2. Отображение модуля комплексного спектра: $|f(x)|$ – абсолютное значение сигнала

Fig. 2. Complex spectrum module display: $|f(x)|$ – absolute signal value

График на рис. 2 более информативен, но по оси абсцисс отложены отсчеты сигнала. На оси Ox необходимо представить вектор частот, соответствующий отсчетам спектра. Для этого определим число отсчетов в массиве и частоту дискретизации с помощью команды `signal/Length`.

Под разрешением спектрального анализа будем понимать минимальную разницу между соседними значениями частоты в спектре. Частота дискретизации определяется по формуле

$$fs = d/h,$$

где d – длина всего интервала; h – разрешение спектрального анализа.

Спектр вычисляется в диапазоне частот от нуля до частоты дискретизации с помощью следующей пользовательской функции:

$$fv[n_]:=Table[i/(n-1)fs, \{i, 1, n-1\}].$$

Заметим, что спектр данного сигнала периодичен, значит, информативной частью спектра является его половина. Тогда вектор частот формируется как нормированный вектор от нуля до половины частоты дискретизации, причем размерность вектора равна размерности исходного массива:

$$fv1[n_]:=Table[i/(n-1)fs, \{i, 1, n/2\}].$$

Массив точек, где первой координатой является частота, а второй – значение амплитуды, определяется следующим образом:

$$sp[n_]:=Table[\{fv1[n][[i]], Abs[Fourier[sig]][[i]]\}, \{i, 1, n/2\}],$$

где `sig` – значение исходного сигнала.

Под скалограммой будем представлять двумерное описание одномерного сигнала, где на оси Ox задается время, на оси Oy – шкала, представляющая собой оценку локального спектра энергии [13, 14].

Для построения скалограммы существует встроенная функция `WaveletScalogram`. Вначале на исходный массив данных воздействуем вейвлет-преобразованием на основе вейвлета Морле, затем строим скалограмму. Команды, реализующие эти действия, выглядят следующим образом: `dwd=ContinuousWaveletTransform[sig, n]; MorletWavelet[[]]; WaveletScalogram[dwd]`. Результат выполнения перечисленных команд представлен на рис. 3а.

Данная функция строит представление коэффициентов вейвлет-преобразования и дает графическую интерпретацию в виде рядов цветных прямоугольников, в которых большие значения отражаются темнее, а каждая после-

дующая строка соответствует различным спецификациям индекса вейвлета. Недостатком такого представления является сложность определения периода компонент сигнала. Согласно рис. 3, периода – два, но их значения на графике отсутствуют.

Для устранения этого недостатка используем разработанную модифицированную скалограмму. Вначале определяем коэффициент вейвлет-преобразования как функцию от параметров a, b следующим образом:

$$W[a, b] := 1/a^{(1/2)} \text{Sum}[f[i - b]/a] dt[[i], \{i, 1, n\}].$$

Затем определяем массив коэффициентов для некоторого диапазона значений исходных параметров

$$w = \text{Flatten}[\text{Table}[\{a, b, W[a, b]\} // \text{Chop}, \{a, 1, n\}, \{b, 1, n\}], 1].$$

После этого строим контурное распределение $\text{ListContourPlot}[w]$. Результат выполнения этих команд представлен на рис. 3b.

Полученный спектр позволяет оценить точное значение частоты сигнала. Из рис. 3 видно, что периодами для данных компонент исходного сигнала являются значения 50 и 150.

Сигнал, представляющий собой белый шум. Воспроизведем белый шум с помощью встроенной функции системы $\text{sig} = \text{RandomFunc}$

$\text{tion}[\text{WhiteNoiseProcess}[], \{0, 40\}]$. График сигнала и его гистограмма представлены на рис. 4.

С целью оценки качества работы генератора проанализируем распределение значений отсчетов выходного сигнала и построим его спектр. Для представления информации о функции распределения сигнала можно использовать команду $\text{Histogram}[\text{sig}, 10]$. Чтобы оценить частотные характеристики сигнала, вычислим частоту дискретизации с помощью команды $Fs = 1/(\text{sig}[[2]] - \text{sig}[[1]])$. Модуль комплексного спектра можно оценить как $sp = \text{Abs}[\text{Fourier}[\text{sig}]]$.

Стандартная и модифицированная скалограммы изображены на рис. 5. Их интерпретация подтверждает информацию, что тот сигнал, который обрабатывается, представляет собой белый шум.

Из рис. 5 видно, что в спектре присутствуют отдельные дискретные составляющие на нижних частотах, но в широкой полосе частот сформированный сигнал близок к случайному процессу с постоянной спектральной плотностью мощности.

При необходимости могут быть проанализированы и другие характеристики сигнала, например интервал корреляции, дисперсия, пик-фактор и т. д.

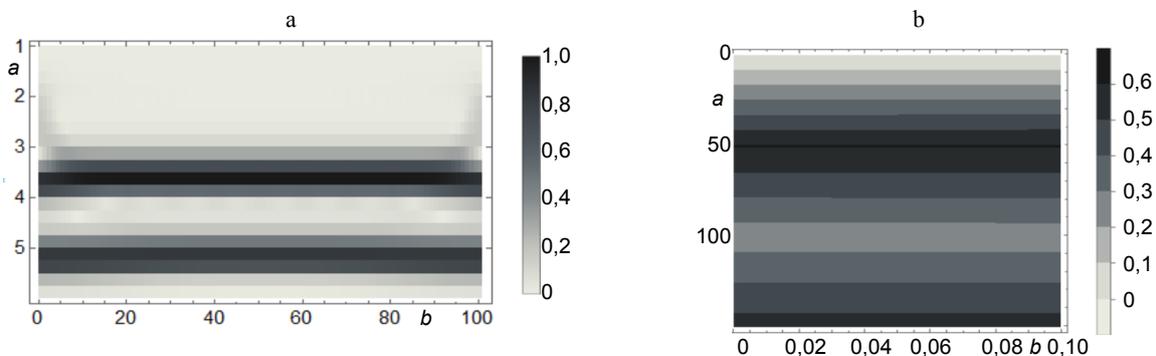


Рис. 3. Скалограмма сигнала, полученная с помощью встроенной функции (а), и модифицированная скалограмма (б): a, b – параметры разложения

Fig. 3. Signal scalogram obtained with the built-in function (a), and modified scalogram (b): a, b – decomposition parameters

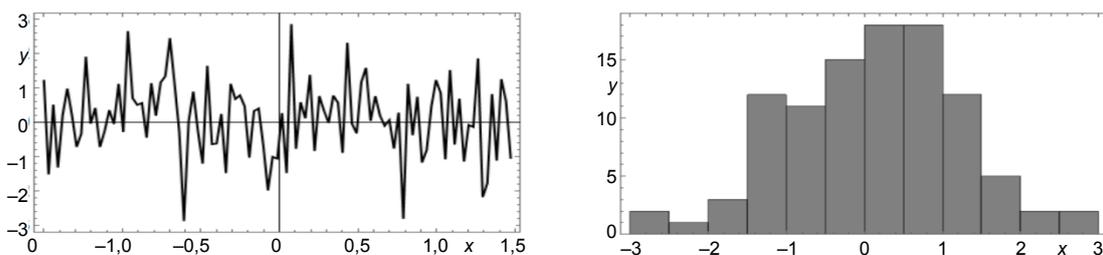


Рис. 4. Выходной сигнал схемы генератора шума и гистограмма сигнала: x, y – значения исходного сгенерированного сигнала

Fig. 4. Noise generator circuit output and signal histogram: x, y – values of original generated signal

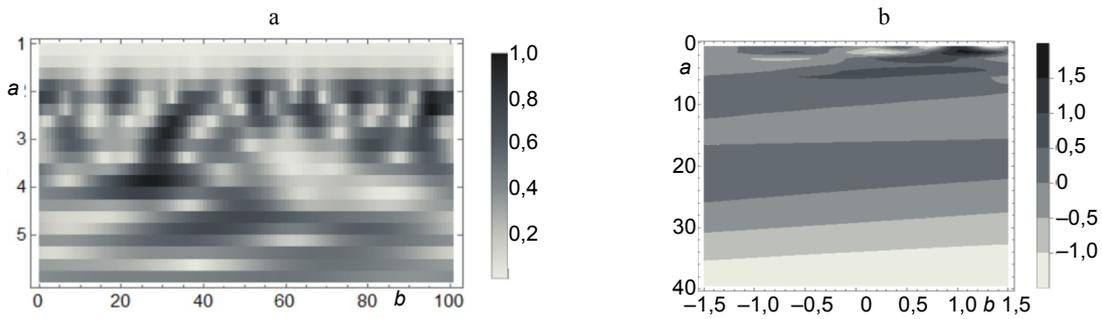


Рис. 5. Скалограмма сигнала: а – полученная с помощью встроенной функции; б – модифицированная; а, b – параметры разложения

Fig. 5. Signal scalogram: a – obtained using built-in function; b – modified; a, b – decomposition parameters

Обработка звукового сигнала. Описанный подход может применяться к обработке звуковых сигналов. В системе Mathematica есть набор стандартных звуков, а также возможность импорта звукового файла.

Значение массива данных может быть определено с помощью встроенной функции *Sound* следующим образом:

```
sig=Sound[SoundNote["C"]].
```

Обращение к встроенным образцам звука осуществляется с помощью функции *ExampleData*.

Рассмотрим сигнал звука ноты си:

```
sig=ExampleData[{"Sound", "SubwayTrain"}].
```

Результат действия функции *ListPlot[sig]* и распределение модуля комплексного спектра

ра представлены на рис. 6, скалограммы – на рис. 7.

ВЫВОД

При использовании модифицированной скалограммы появляется возможность определения по графику периода входящих в сигнал компонент и значений параметров, при которых коэффициенты вейвлет-преобразования достигают наибольших величин. Для спектрального анализа в системе Mathematica рекомендуется использование сочетания двух подходов: стандартной встроенной функции (для определения локализации импульса) и модифицированной скалограммы (для определения периодов составляющих компонент).

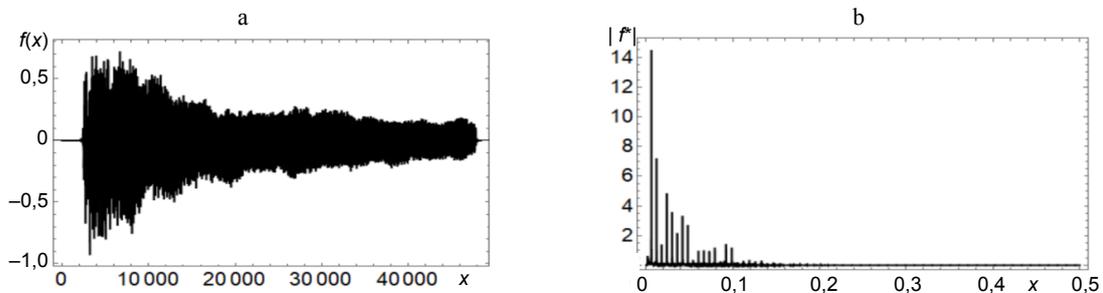


Рис. 6. График исходных сигналов и модуля комплексного спектра

Fig. 6. Plot of original signals and complex spectrum modulus

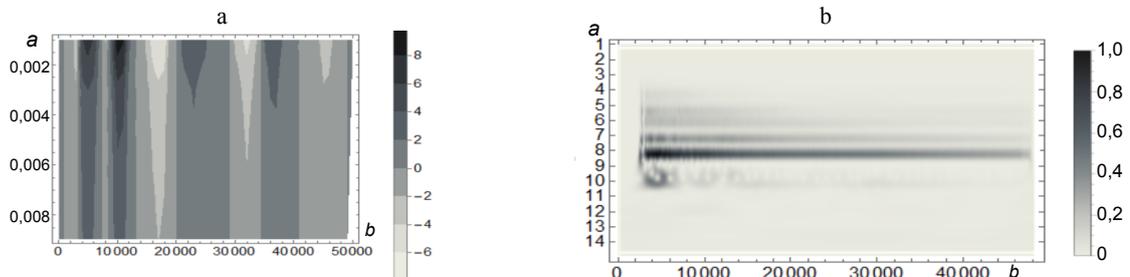


Рис. 7. Скалограмма сигнала, полученная с помощью встроенной (а) и пользовательской функций (б): а, b – параметры разложения

Fig. 7. Signal scalogram, obtained using built-in (a) and custom functions (b): a, b – decomposition parameters

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. М.: Мир, 1978. 848 с.
2. Запрыгаев, С. А. Анализ и распознавание речевых сигналов на основе вейвлет-преобразований / С. А. Запрыгаев, А. А. Коновалов // Вестник ВГУ. Серия «Системный анализ и информационные технологии». 2009. № 2. С. 313–316.
3. Помехоустойчивое кодирование в современных форматах связи / А. С. Костюков [и др.] // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2019. Т. 15, № 2. С. 128–131.
4. Оценка эффективности различных методов анализа временных диагностических сигналов / Т. Н. Круглова [и др.] // Современные наукоемкие технологии. 2016. Т. 2, № 8. С. 237–241.
5. Идентификация изображений радужных оболочек глаз на основе спектрального анализа методами вейвлет-преобразования и преобразования Фурье / В. А. Частикова [и др.] // Научные труды КубГТУ. 2016. № 2. С. 341–347.
6. Рублёв, Д. П. Метод стеганографического встраивания сообщений в аудиоданные на основе вейвлет-преобразования / Д. П. Рублёв, О. Б. Макаревич, В. М. Федоров // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2009. Т. 100, № 11. С. 199–206.
7. Лебедев, А. А. Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье для преобразования данных аудиофайла при разработке ритма игры / А. А. Лебедев, Е. В. Трофименко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. МНТК, Воронеж, 12–15 сент. 2016. С. 82–85.
8. Гундин, А. А. Обработка цифровых изображений при дефектоскопии поверхностей промышленных объектов / А. А. Гундин, М. А. Гундина, А. Н. Чешкин // Наука и техника. 2016. № 3. С. 225–232.
9. Гундина, М. А. Использование сферических гармоник для исследования радиоизлучений / М. А. Гундина // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2019. Т. 102, № 1. С. 11–16.
10. Lutovac, M. D. Design for Signal Processing Using MatLab and Mathematica / M. D. Lutovac, D. V. Tomic, B. L. Evans. Prentice Hall. 2001. 756 p.
11. Evans, B. L. Mathematica as an Educational Tool for Signal Processing / B. L. Evans, J. H. McClellan, K. A. West // European Neuropsychopharmacology. 1991. Vol. 2. P. 1162–1166.
12. Vaseghi, S. V. Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction / S. V. Vaseghi. Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd. 2008. 514 p.
13. Benitez, R. A Wavelet-Based Tool for Studying Non-Periodicity / R. Benitez, V. J. Bolos, M. E. Ramirez // Comput. Math. Appl. 2010. Vol. 60, No 3. P. 634–641. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.05.010>.
14. WaveletScalogram – Wolfram Mathematica [Electronic Resource]. Mode of access: <https://reference.wolfram.com/language/ref/WaveletScalogram.html>. Dade of access: 01.05.2020.
5. Zapryagaev S. A., Konovalov A. A. (2009) Analysis and Recognition of Speech Signals Based on Wavelet Transforms. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Sistemnyi Analiz i Informatsionnye Tekhnologii"* = *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, (2), 313–316 (in Russian).
3. Kostyukov A. S., Bashkirov A. V., Nikitin L. N., Bobylkin I. S., Makarov O. Yu. (2019) Noise-Resistant Coding in Modern Communication Formats. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta = Bulletin of Voronezh State Technical University*, 15 (2), 128–131 (in Russian).
4. Kruglova T. N., Shurygin D. N., Litvin D. A., Tarkovalin S. A., Vlasov A. S., Ryzhenkov S. I., Artsebashev V. V. (2016) Evaluation of the Effectiveness of Various Methods for Analysis of Temporary Diagnostic Signals. *Sovremennye Naukoyemkie Tekhnologii = Modern High Technologies*, 2 (8), 237–241 (in Russian).
5. Chastikova V. A., Sotnikov V. V., Zinoveva S. V., Sheludko A. A. (2016) Identification of Iris Images Based on Spectral Analysis Using Wavelet Transform and Fourier Transform. *Nauchnye Trudy Kubanskogo Gosudarstvennogo Tekhnologicheskogo Universiteta = Scientific Works of Kuban State Technological University*, (2), 341–347 (in Russian).
6. Rublev D. P., Makarevich O. B., Fedorov V. M. (2009) Method of Steganographic Embedding of Messages in Audio Data Based on Wavelet Transform. *Izvestiya Yuzhnogo Federalnogo Universiteta. Tekhnicheskie Nauki = Proceedings of the Southern Federal University. Technical Sciences*, 100 (11), 199–206 (in Russian).
7. Lebedev A. A., Trofimenko E. V. (2016) Using the Fast Fourier Transformation Algorithm to Convert Audio File Data in Developing the Rhythm of a Game. *Aktual'nye Problemy Prikladnoi Matematiki, Informatiki i Mekhaniki: sb. tr. MNTK, Voronezh, 12–15 Sent.* [Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference, Voronezh, Sept. 12–15], 82–85 (in Russian).
8. Hundzin A. A., Hundzina M. A., Cheshkin A. N. (2016) Processing of Digital Images of Industrial Object Surfaces during Non-Destructive Testing. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, (3), 225–232 (in Russian).
9. Hundzina M. A. (2019) Use of Spherical Harmonics for Study of Radio Emissions. *Vesnik Vitsebskaga Dzyarzhavnaga Universiteta* [Bulletin of Vitebsk State University], 102 (1), 11–16 (in Russian).
10. Lutovac M. D., Tomic D. V., Evans B. L. (2001) *Design for Signal Processing Using MatLab and Mathematica*. Prentice Hall. 756.
11. Evans B. L., McClellan J. H., West K. A. (1991) Mathematica as an Educational Tool for Signal Processing. *European Neuropsychopharmacology*, 2, 1162–1166.
12. Vaseghi S. V. (2008) *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*. Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd. 514.
13. Benitez R., Bolos V. J., Ramirez M. E. (2010) A Wavelet-Based Tool for Studying Non-Periodicity. *Computers & Mathematics with Applications*, 60 (3), 634–641. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.05.010>.
14. *WaveletScalogram – Wolfram Mathematica*. Available at: <https://reference.wolfram.com/language/ref/WaveletScalogram.html>. (Accessed 1 May 2020).

Поступила 08.06.2020

Подписана в печать 25.08.2020

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Rabiner L., Gould B. (1978) *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Moscow, Mir Publ. 848 (in Russian).

Received: 08.06.2020

Accepted: 25.08.2020

Published online: 30.03.2021

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-179-184>

УДК 519.653.4

Прямой метод решения задачи билинейного программирования

Канд. физ.-мат. наук, доц. Л. Д. Матвеева¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Рассматривается задача билинейного программирования, в которой столбец, соответствующий одной из переменных величин, не фиксированный, а может выбираться из некоторого выпуклого множества. Данная задача известна как задача Данцига – Вулфа. Ранее предлагался модифицированный опорный метод ее решения, использующий декомпозицию ограничений задачи метода Данцига – Вулфа. Автором статьи разработан прямой точный метод решения сформулированной задачи. Метод основан на идее решения задачи линейного программирования с обобщенными прямыми ограничениями и на общей концепции адаптивного метода решения задачи линейного программирования. Введены понятия опоры, опорного плана, оптимального и субоптимального (ϵ -оптимального) плана, который является заданным приближением по целевой функции к оптимальному плану задачи. Сформулированы и доказаны критерии оптимальности и субоптимальности опорного плана. Поиск оптимального решения основан на идее максимизации приращения целевой функции. Данный подход позволяет полнее учитывать основную цель и структуру задачи. Улучшение опорного плана состоит из двух частей: замены плана и замены опоры. Для поиска подходящего направления решается специальная производная задача с учетом основных ограничений задачи. Замена опоры основана на поиске оптимального плана двойственной задачи. За конечное число итераций (в случае невырожденности) метод приводит к оптимальному решению задачи.

Ключевые слова: билинейное программирование, оптимальный план, опора, прямой метод

Для цитирования: Матвеева, Л. Д. Прямой метод решения задачи билинейного программирования / Л. Д. Матвеева // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 2. С. 179–184. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-179-184>

Direct Method for Solving Bilinear Programming Problem

L. D. Matveyeva¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The bilinear programming problem is considered, where a column, which corresponds to one of the variables, is not fixed but can be chosen from a convex set. This problem is known as the Dantzig – Wolfe problem. Earlier, a modified support method was proposed to solve the problem, using the decomposition of the problem constraints of the Dantzig – Wolfe method. The author of the paper has developed a direct exact method for solving the formulated problem. The method is based on the idea of the solving a linear programming problem with generalized direct constraints and a general concept of an adaptive solution method. The notions of support, support plan, optimal and suboptimal (ϵ -optimal) plan are introduced which is a given approximation of the objective function to the optimal plan of the problem. Criteria for optimality and suboptimality of the support plan have been formulated and have been proved in the paper. The search for the optimal solution is based on the idea of maximizing the increment of the objective function. This approach allows more fully to take into account the main target and structure of the problem. Improving a support plan consists of two parts: replacing the plan and replacing the support. To find a suitable direction, a special derived problem is solved while taking into account the main constraints of the problem. The replacement of the support is based on the search for the optimal plan of the dual problem. The method leads to an optimal solution to the problem in a finite number of iterations (in the case of a non-degenerate value).

Keywords: bilinear programming, optimal plan, support, direct method

For citation: Matveyeva L. D. (2021) Direct Method for Solving Bilinear Programming Problem. *Science and Technique*. 20 (2), 179–184. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-179-184> (in Russian)

Адрес для переписки

Матвеева Людмила Дмитриевна
Белорусский национальный технический университет
ул. Б. Хмельницкого, 9, корп. 11,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 292-82-73
millamatveeva@gmail.com

Address for correspondence

Matveyeva Ludmila D.
Belarusian National Technical University
9, k. 11, B. Khmel'nitskogo str.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 292-82-73
millamatveeva@gmail.com

Введение

Билинейными задачами называются специальные задачи нелинейного программирования с такими двумя группами переменных, когда при фиксации значений каждой группы получается однотипная задача линейного программирования относительно другой группы переменных. То есть в билинейных задачах обеими группами переменных распоряжаются союзники и каждый из них при самостоятельных действиях имеет дело с задачей линейного программирования [1].

Следует отметить, что многие задачи теории управления, исследования операций и экономики могут быть представлены в виде задач билинейного программирования [2]. Например, так выглядят задачи поиска ситуации равновесия по Нэшу в биматричной игре [3], задача производственного календарного планирования, задача о многопродуктовом потоке на сети [4].

В [5] приводятся приближенные алгоритмы локального и глобального поисков оптимального решения в задачах билинейного программирования с несвязными переменными. Среди последних работ стоит отметить подход к решению билинейных задач, базирующийся на известном алгоритме внешних аппроксимаций.

Автором статьи разработан точный метод решения специальной задачи билинейного программирования, который максимально учитывает специфику задачи и позволяет находить как ее приближенное, так и точное решение.

Основная часть

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, x, y) = c'x + (q'y + c_0)x_0 \rightarrow \max_{x_0, x, y}; \\ Ax + (Cy + a_0)x_0 = b, \quad d_{*0} \leq x_0 \leq d_0^*, \\ d_* \leq x \leq d^*, \quad y \in Y, \end{aligned} \quad (1)$$

где $Y = \{y : By = a, g_* \leq y \leq g^*\}$ – ограниченное множество; c, x, d_*, d^* – n -векторы; a_0, b – m -векторы; q, y, g_*, g^* – p -векторы; a – r -вектор; c_0, x_0, d_{*0}, d_0^* – скаляры; $A = A(I, J)$ – $m \times n$ -матрица; $B = B(K, L)$ – $r \times p$ -матрица; $C = C(I, L)$ – $m \times p$ -матрица.

Данная задача в литературе известна как задача Данцига – Вулфа [6].

Совокупность (x_0, x, y) называется планом задачи (1), если на ней выполняются все ограничения. План (x_0^*, x^*, y^*) называется оптимальным, если он доставляет максимум целевой функции. Субоптимальный (ε -оптимальный) план определяется неравенством $\varphi(x_0^*, x^*, y^*) - \varphi(x_0^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Предположим, что $r + m < p$. Из множеств J и L выделим подмножества $J_{оп}$ и $L_{оп}$ соответственно так, что $|J_{оп}| = |I|, |L_{оп}| = |K|$. Квадратные матрицы $A_{оп} = A(I, J_{оп}), B(K, L_{оп})$ назовем опорными, если они являются невырожденными [7]. Совокупность $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$ – это опорный план задачи (1). Опорный план $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$ называется невырожденным, если он не вырожден по прямым ограничениям, т. е. выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} d_{*0} < x_0 < d_0^*; \quad d_*(J_{оп}) < x(J_{оп}) < d^*(J_{оп}); \\ g_*(L_{оп}) < y(L_{оп}) < g^*(L_{оп}). \end{aligned}$$

Пусть задан опорный план $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$. Вычислим векторы потенциалов $u' = c'_{оп}A_{оп}^{-1}, \bar{u}' = \alpha'_{оп}B_{оп}^{-1}$, оценок $\Delta' = u'A - c', \bar{\Delta}' = \bar{u}'B - \alpha'$, где $\alpha' = u'C - q', \mu = u'a_0 - c_0$.

Рассмотрим некоторый план задачи (1): $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}\} = \{x_0 + \Delta x_0, x + \Delta x, y + \Delta y\}$. Найдем формулу приращения целевой функции $\varphi(x_0, x, y)$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \Delta\varphi(x_0, x, y) = \varphi(\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}) - \\ - \varphi(x_0, x, y) = c'\Delta x + (q'y + c_0)\Delta x_0 + \\ + q'\Delta y\Delta x_0 + q'\Delta yx_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как (x_0, x, y) и $(\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y})$ являются планами задачи, то выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} A\Delta x + (Cy + a_0)\Delta x_0 + C\Delta yx_0 + \\ + C\Delta y\Delta x_0 = 0; \quad B\Delta y = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Найдем из этих равенств опорные компоненты Δx и Δy :

$$\Delta x(J_{\text{оп}}) = -A_{\text{оп}}^{-1} [A(I, J_{\text{н}}) \Delta x(I_{\text{н}}) + (Cy + a_0) \Delta x_0 + C \Delta y x_0 + C \Delta y \Delta x_0]; \quad (4)$$

$$\Delta y(L_{\text{оп}}) = -B_{\text{оп}}^{-1} B(K, L_{\text{н}}) \Delta y(L_{\text{н}}), \quad (5)$$

где $J_{\text{н}} = J \setminus J_{\text{оп}}$; $L_{\text{н}} = L \setminus L_{\text{оп}}$.

Тогда из определения потенциалов и оценок получим

$$\Delta \varphi = -\Delta'(J_{\text{н}}) \Delta x(J_{\text{н}}) - \Delta_0(y) \Delta x_0 - \bar{\Delta}'(L_{\text{н}}) \Delta y(L_{\text{н}}) x_0 - \bar{\Delta}'(L_{\text{н}}) \Delta y(L_{\text{н}}) \Delta x_0. \quad (6)$$

Обозначим:

$$J_{*\text{н}} = \{j \in J_{\text{н}} : x_j = d_{*j}\}; \quad J_{\text{н}}^* = \{j \in J_{\text{н}} : x_j = d_j^*\}; \\ L_{*\text{н}} = \{l \in L_{\text{н}} : y_l = g_{*l}\}; \quad L_{\text{н}}^* = \{l \in L_{\text{н}} : y_l = g_l^*\}; \\ \tilde{J}_{\text{н}} = J_{\text{н}} \setminus \{J_{*\text{н}} \cup J_{\text{н}}^*\}; \quad \tilde{L}_{\text{н}} = L_{\text{н}} \setminus \{L_{*\text{н}} \cup L_{\text{н}}^*\}.$$

Теорема. Критерий оптимальности. Соотношения:

$$\Delta(J_{*\text{н}}) \geq 0, \quad \Delta(J_{\text{н}}^*) \leq 0, \quad \Delta(\tilde{J}_{\text{н}}) = 0;$$

$$\Delta_0(y) \geq 0 \text{ при } x_0 = d_{*0}; \quad \Delta_0(y) \leq 0 \text{ при } x_0 = d_0^*; \\ \Delta_0(y) = 0 \text{ при } d_{*0} < x_0 < d_0^*;$$

$$\bar{\Delta}(L_{*\text{н}}) x_0 \geq 0; \quad \bar{\Delta}(L_{\text{н}}^*) x_0 \leq 0; \quad \bar{\Delta}(\tilde{L}_{\text{н}}) x_0 = 0; \\ \bar{\Delta}(L_{*\text{н}}) \leq 0; \quad \bar{\Delta}(L_{\text{н}}^*) \geq 0; \quad \bar{\Delta}(\tilde{L}_{\text{н}}) = 0, \text{ при } x_0 = d_{*0}; \quad (7)$$

$$\bar{\Delta}(L_{*\text{н}}) \geq 0; \quad \bar{\Delta}(L_{\text{н}}^*) \leq 0; \quad \bar{\Delta}(\tilde{L}_{\text{н}}) = 0 \text{ при } x_0 = d_0^*; \\ \bar{\Delta}(L_{\text{н}}) = 0 \text{ при } d_{*0} < x_0 < d_0^*$$

достаточны, а в случае невырожденности необходимы для оптимальности опорного плана $(x_0, x, y, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}})$.

Доказательство. Достаточность. Из условий $d_* - x \leq \Delta x \leq d^* - x$, $d_{*0} - x_0 \leq \Delta x_0 \leq d_0^* - x_0$, $g_* - y \leq \Delta y \leq g^* - y$ и определения подмножеств $J_{*\text{н}}, J_{\text{н}}^*, L_{*\text{н}}, L_{\text{н}}^*$ следуют соотношения $\Delta x(J_{*\text{н}}) \geq 0$, $\Delta x(J_{\text{н}}^*) \leq 0$, $\Delta y(L_{*\text{н}}) \geq 0$, $\Delta y(L_{\text{н}}^*) \leq 0$, $\Delta x_0 \geq 0$ при $x_0 = d_{*0}$, $\Delta x_0 \leq 0$ при $x_0 = d_0^*$ для всех допустимых приращений $\Delta x_0, \Delta x, \Delta y$. Следовательно,

при условиях (7) выполняется неравенство $\Delta \varphi(x_0, x, y) \leq 0$, что доказывает оптимальность плана $\{x_0, x, y\}$, так как любое допустимое приращение $\{\Delta x_0, \Delta x, \Delta y\}$ не ведет, согласно (6), к увеличению значения целевой функции.

Необходимость. Пусть $\{x_0, x, y, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}}\}$ – оптимальный план. Докажем справедливость соотношений (7) методом от противного. Пусть условия (7) не выполняются по первой группе соотношений. Тогда, полагая $\Delta x_0 = 0$, $\Delta y(L_{\text{н}}) = 0$, можно построить такую (в силу невырожденности опорного плана) допустимую вариацию Δx , что не нарушаются прямые ограничения по опорным переменным и при этом $-\Delta'(J_{\text{н}}) \Delta x(J_{\text{н}}) > 0$, что противоречит предположению об оптимальности опорного плана. Аналогично проводится доказательство при нарушении других групп соотношений (7).

Из приведенных рассуждений следует, что при заданном опорном плане $\{x_0, x, y, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}}\}$ для каждого плана $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}\}$ найдутся допустимые приращения $\Delta x(J_{\text{н}}), \Delta y(L_{\text{н}}), \Delta x_0$ такие, что $\tilde{x} = x + \{\Delta x(J_{\text{оп}}), \Delta x(J_{\text{н}})\}$, $\tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x_0$, $\tilde{y} = y + \{\Delta y(L_{\text{оп}}), \Delta y(L_{\text{н}})\}$, где $\Delta x(J_{\text{оп}}), \Delta y(L_{\text{оп}})$ вычисляются по формулам (4), (5). Поэтому максимум функции (6) служит оценкой отклонения плана $\{x_0, x, y\}$ от оптимального по целевой функции. Найдем максимум функции (6) с учетом ограничений:

$$d_*(J_{\text{н}}) - x(J_{\text{н}}) \leq \Delta x(J_{\text{н}}) \leq d^*(J_{\text{н}}) - x(J_{\text{н}});$$

$$d_{*0} - x_0 \leq \Delta x_0 \leq d_0^* - x_0;$$

$$g_*(L_{\text{н}}) - y(L_{\text{н}}) \leq \Delta y(L_{\text{н}}) \leq g^*(L_{\text{н}}) - y(L_{\text{н}}).$$

Он достигается при $\Delta x_j = d_{*j} - x_j$ при $\Delta j > 0$; $\Delta x_j = d_j^* - x_j$ при $\Delta j < 0$; $\Delta x_j = 0$ при $\Delta j = 0$, $j \in J_{\text{н}}$; $\Delta x_0 = d_{*0} - x_0$ при $\Delta_0(y) > 0$; $\Delta x_0 = d_0^* - x_0$ при $\Delta_0(y) < 0$; $\Delta x_0 = 0$ при $\Delta_0(y) = 0$; $\Delta y_j = g_{*j} - y_j$ при $\bar{\Delta}_j > 0$; $\Delta y_j = g_j^* - y_j$ при $\bar{\Delta}_j < 0$; $\Delta y_j = 0$ при $\bar{\Delta}_j = 0$, $j \in L_{\text{н}}$ и равен числу $\beta = \beta(x_0, x, y, A_{\text{оп}}, B_{\text{оп}})$ [8, 9]:

$$\beta = \sum_{\substack{\Delta_j < 0, \\ j \in J_n}} \Delta_j (x_j - d_j^*) + \sum_{\substack{\Delta_j > 0, \\ j \in J_n}} \Delta_j (x_j - d_{*j}) + \Delta_0(y) \bar{d}_0 + x_0 \sum_{\substack{\bar{\Delta}_j x_0 \geq 0, \\ j \in L_n}} \bar{\Delta}_j (g_j^* - y_j) + x_0 \sum_{\substack{\bar{\Delta}_j x_0 < 0, \\ j \in L_n}} \bar{\Delta}_j (g_{*j} - y_j) + \\ + \sum_{\substack{\bar{\Delta}_j > 0, \\ j \in L_n}} \bar{\Delta}_j (g_j^* - y_j) (d_0^* - x_0) + \sum_{\substack{\bar{\Delta}_j < 0, \\ j \in L_n}} \bar{\Delta}_j (g_{*j} - y_j) (d_{*0} - x_0),$$

которое называется оценкой субоптимальности опорного плана $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$. Здесь приняты обозначения:

$$\bar{d}_0 = \begin{cases} x_0 - d_0^*, & \text{если } \Delta_0(y) < 0; \\ x_0 - d_{*0}, & \text{если } \Delta_0(y) > 0. \end{cases}$$

Справедлив критерий субоптимальности. При $\beta \leq \varepsilon$ опорный план $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$ является ε -оптимальным опорным планом задачи (1). Для каждого ε -оптимального плана $\{x_0^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon\}$ существует такая опора $A_{оп}, B_{оп}$, что оценка субоптимальности β опорного плана $\{x_0^\varepsilon, x^\varepsilon, y^\varepsilon, A_{оп}, B_{оп}\}$ удовлетворяет неравенству $\beta \leq \varepsilon$.

Итерация метода. Пусть $\{x_0, x, y, A_{оп}, B_{оп}\}$ – опорный план задачи (1). Для плана $\{x_0, x, y\}$ имеются допустимые направления, вдоль которых целевая функция возрастает. Пусть $\beta > \varepsilon$, где ε – заданная точность приближения к оптимальному плану задачи. Новый план $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}\}$ будем искать в виде $\tilde{x}_0 = x_0 + \theta_0 l_0, \tilde{x} = x + \theta_0^2 l, \tilde{y} = y + \theta_0 \tilde{l}$, где $\{l_0, l, \tilde{l}\}$ – подходящие направления для $\{x_0, x, y\}$; θ_0 – максимально допустимый шаг.

Для построения подходящего направления рассмотрим производную задачу:

$$\Delta_0(y) l_0 - \bar{\Delta}'_n \tilde{l}_n (x_0 + l_0) \rightarrow \min_{l_0, \tilde{l}_n}; \\ d_{*0} - x_0 \leq l_0 \leq d_0^* - x_0; \\ g^*(L_n) - y(L_n) \leq \tilde{l}_n \leq g^*(L_n) - y(L_n); \\ B\tilde{l} = 0, C\tilde{l}x_0 + (Cy + a_0)l_0 = 0. \tag{8}$$

Направление $\tilde{l}_n = \tilde{l}(L_n)$ определяем по формулам:

$$\tilde{l}_j = \begin{cases} g_j^* - y_j & \text{при } \bar{\Delta}_j(x_0 + l_0) > 0; \\ g_{*j} - y_j & \text{при } \bar{\Delta}_j(x_0 + l_0) < 0; \\ 0 & \text{при } \bar{\Delta}_j(x_0 + l_0) = 0, j \in L_n. \end{cases} \tag{9}$$

В результате получим следующую кусочно-линейную задачу для нахождения l_0 :

$$s(l_0) = \Delta_0(y) l_0 + \sum_{\substack{\bar{\Delta}'_j(x_0 + l_0) > 0, \\ j \in L_n}} \bar{\Delta}'_j(x_0 + l_0) (y_j - g_j^*) + \\ + \sum_{\substack{\bar{\Delta}'_j(x_0 + l_0) < 0, \\ j \in L_n}} \bar{\Delta}'_j(x_0 + l_0) (y_j - g_{*j}) \rightarrow \min; \tag{10} \\ d_{*0} - x_0 \leq l_0 \leq d_0^* - x_0.$$

Несложно доказать, что если $x_0 + l_0$ меняет знак на отрезке $[d_{*0}, d_0^*]$, то функция $s(l_0)$ – вогнутая. Если $x_0 + l_0$ постоянного знака, то $s(l_0)$ – монотонная. Следовательно, минимум функции $s(l_0)$ существует только на границах отрезка $[d_{*0}, d_0^*]$.

Решая задачу (10), находим направление l_0 для x_0 . Затем по формулам (9), (5) находим направление \tilde{l} для y . Полагая

$$l_j = \begin{cases} d_j^* - x_j & \text{при } \Delta_j < 0; \\ d_{*j} - x_j & \text{при } \Delta_j > 0; \\ 0 & \text{при } \Delta_j = 0, j \in J_n, \end{cases}$$

вычисляем $l(J_{оп})$ по (4). Направление l для вектора x найдено. Максимально допустимый шаг θ_0 вдоль найденных направлений l_0, l, \tilde{l} для x_0, x, y соответственно вычисляем так, чтобы:

- 1) выполнялись прямые опорные и неопорные основные ограничения;
 - 2) оценка $\Delta_0(y)$ сохраняла свой знак.
- Следовательно, имеем $\theta_0 = \min\{1, \theta_{j_1}, \tilde{\theta}, \tilde{\theta}_{j_0}\}$,

где

$$\theta_{j_s} = \min \begin{cases} \sqrt{(d_j^* - x_j)/l_j}, & \text{если } l_j > 0; \\ \sqrt{(d_{*j} - x_j)/l_j}, & \text{если } l_j < 0; \\ \infty, & \text{если } l_j = 0, j \in J_{\text{оп}}; \end{cases}$$

$$\tilde{\theta} = \begin{cases} -\frac{\Delta_0(y)}{\alpha' \tilde{l}}, & \text{если } \Delta_0(y) \neq 0 \text{ и } \frac{\Delta_0(y)}{\alpha' \tilde{l}} < 0; \\ \infty, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tilde{\theta}_{j_0} = \min \begin{cases} (g_j^* - y_j)/\tilde{l}_j, & \text{если } \tilde{l}_j > 0; \\ (g_{*j} - y_j)/\tilde{l}_j, & \text{если } \tilde{l}_j < 0; \\ \infty, & \text{если } \tilde{l}_j = 0, j \in L_{\text{оп}}. \end{cases}$$

Строим новый опорный план $\tilde{x}_0 = x_0 + \theta_0 l_0$, $\tilde{x} = x + \theta_0^2 l$, $\tilde{y} = y + \theta_0 \tilde{l}$ [10], на котором выполняются соотношения

$$\begin{aligned} c'x^* + (q'y^* + c_0)x_0^* - c'x - (q'y + c_0)x_0 - \\ - \theta_0^2 c'l - \theta_0(q'y + c_0)l_0 - \theta_0 q' \tilde{l}x_0 - \theta_0^2 q' \tilde{l}l_0 \leq \\ \leq \beta - \theta_0^2 c'l - \theta_0(q'y + c_0)l_0 - \theta_0 q' \tilde{l}x_0 - \\ - \theta_0^2 q' \tilde{l}l_0 = \bar{\beta} = (1 - \theta_0)\beta. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\bar{\beta} \leq \varepsilon$ процесс решения задачи (1) заканчивается построением ε -оптимального плана $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}\}$.

Пусть $\bar{\beta} > \varepsilon$. Составим двойственную задачу к задаче (1). В силу билинейности двойственная задача будет состоять из пары двойственных задач относительно x и y . Поэтому имеем:

$$\bar{b}'z - d_*'v + d^{*'}w \rightarrow \min; \quad (11)$$

$$A'z - v + w \geq c, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0;$$

$$a'z - g_*'v + g^{*'}w \rightarrow \min; \quad (12)$$

$$B'z - v + w \geq a, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0,$$

где $\bar{b} = b - (c\tilde{y} + a_0)\tilde{x}_0$, $z = u$ для (11); $z = \bar{u}$ для (12).

Для уменьшения оценки субоптимальности переходим к улучшению опор $A_{\text{оп}}$ или $B_{\text{оп}}$ в зависимости от выбранного шага [8]. Возможны случаи:

1) $\theta_0 = \theta_{j_s}$ – с помощью решения двойственной задачи (11) улучшаем опору $A_{\text{оп}}$, заменяя ее на новую $\tilde{A}_{\text{оп}}$ [3];

2) $\theta_0 = \tilde{\theta}_{j_0}$ – меняем опору $B_{\text{оп}}$ на $\tilde{B}_{\text{оп}}$, используя оптимальный план двойственной задачи (12);

3) $\theta_0 = \tilde{\theta}$ – здесь $\Delta_0(\tilde{y}) = 0$. Следовательно, новую опору $B_{\text{оп}}$ необходимо подобрать так, чтобы удерживать данное условие. Так как $\Delta_0(\tilde{y}) = \alpha' \tilde{y} + \mu$, то вектор Δy должен удовлетворять условиям $B \Delta y = 0, \alpha' \Delta y = 0$. Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} B_{\text{оп}} \Delta y(L_{\text{оп}}) + B(I, j_s) \Delta y_{j_s} + B(I, \tilde{L}_H) \Delta y(\tilde{L}_H) = 0; \\ \alpha'_{\text{оп}} \Delta y(L_{\text{оп}}) + \alpha_{j_s} \Delta y_{j_s} + \alpha'(\tilde{L}_H) \Delta y(\tilde{L}_H) = 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{L}_H = L_H \setminus j_s$.

Поскольку $\Delta y(L_{\text{оп}}) = -B_{\text{оп}}^{-1} \cdot B(I, L_H) \Delta y(L_H)$, то

$$\begin{aligned} \alpha'_{\text{оп}} \left(-B_{\text{оп}}^{-1} B(I, \tilde{L}_H) \Delta y(\tilde{L}_H) - B_{\text{оп}}^{-1} B(I, j_s) \Delta y_{j_s} \right) + \\ + \alpha_{j_s} \Delta y_{j_s} + \alpha'(\tilde{L}_H) \Delta y(\tilde{L}_H) = 0, \end{aligned}$$

или

$$-\bar{\Delta}_{j_s} \Delta y_{j_s} - \bar{\Delta}'(\tilde{L}_H) \Delta y(\tilde{L}_H) = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta y_{j_s} = \frac{-\bar{\Delta}'(\tilde{L}_H) \Delta y(\tilde{L}_H)}{\bar{\Delta}_{j_s}} \quad \text{при } \bar{\Delta}_{j_s} \neq 0.$$

Строим новую опору $\bar{B}_{\text{оп}}$, полагая $\bar{L}_{\text{оп}} = L_{\text{оп}} \setminus j_0 \cup \{j_s\}$, где j_0 определяем по второй группе соотношений оптимальности с учетом их нарушений.

Проверяем опорный план $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{A}_{\text{оп}}, \tilde{B}_{\text{оп}}\}$ на оптимальность. За конечное число шагов при невырожденности опорного плана получим ε -оптимальный план исходной задачи.

ВЫВОДЫ

1. Разработан прямой точный метод решения задачи билинейного программирования в случае, когда столбец, соответствующий од-

ной из переменных задачи, не фиксированный, а выбирается из некоторого выпуклого множества.

2. Сформулированы и доказаны критерии оптимальности и субоптимальности опорного плана, позволяющие оценить степень приближения полученного решения к оптимальному.

3. Данный метод может применяться при решении прикладных задач в теории управления, исследовании операций и экономике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов, А. В. Биматричные игры и билинейное программирование / А. В. Орлов, А. С. Стрекаловский. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
2. Васин, А. А. Теория игр и модели математической экономики / А. А. Васин, В. В. Морозов. М.: МГУ, 2005. 278 с.
3. Мухамадиев, Б. М. О решении задачи билинейного программирования и отыскания всех ситуаций равновесия в билинейных матричных играх / Б. М. Мухамадиев // Журнал вычислительной математики и математической экономики. 1978. Т. 18, № 2. С. 211–240.
4. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск: Изд-во БГУ, 1980. Ч. 3. 368 с.
5. Орлов, А. В. Численное решение задач билинейного программирования / А. В. Орлов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 2. С. 237–254.
6. Данцинг, Дж. Линейное программирование, его применение и обобщение / Дж. Данцинг. М.: Прогресс, 1964. 600 с.
7. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск: Изд-во БГУ, 1977. Ч. 1. 176 с.
8. Габасов, Р. Методы линейного программирования: в 3 ч. / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск: Изд-во БГУ, 1978. Ч. 2. 240 с.
9. Матвеева, Л. Д. Об одной задаче билинейного программирования / Л. Д. Матвеева // Материалы 53-й Междунар. науч.-техн. конф. Минск: БГПА, 1999. Ч. 2. 340 с.
10. Матвеева, Л. Д. Решение задачи билинейного программирования с переменным вектором условий / Л. Д. Матвеева // Наука – образованию, производству,

экономике: материалы II Междунар. науч.-техн. конф.: в 4 т. Минск: БНТУ, 2011. Т. 3. С. 375.

Поступила 18.08.2019

Подписана в печать 12.11.2020

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Orlov A. V., Strekalovskii A. S. (2007) *Bimatrix Games and Bilinear Programming*. Moscow, Phisimatlit Publ. 223 (in Russian).
2. Vasin A. A., Morozov V. V. (2005) *Game Theory and Models of Mathematical Economics*. Moscow, Publishing House of Moscow State University. 278 (in Russian).
3. Mukhamadiev B. M. (1978) The Solution of Bilinear Programming Problems and Finding the Equilibrium Situations in Bimatrix Games. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 18 (2), 60–66. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(78\)90039-3](https://doi.org/10.1016/0041-5553(78)90039-3).
4. Gabasov R., Kirillova F. M. (1980) *Methods of Linear Programming. Part 3*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 368 (in Russian).
5. Orlov A. V. (2008) Numerical Solution of Bilinear Programming Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 48 (2), 225–241. <https://doi.org/10.1134/s0965542508020061>.
6. Dantzig G. (1964) *Linear Programming, its Application and Ge-Neralization*. Moscow, Progress Publ. 600 (in Russian).
7. Gabasov R., Kirillova F. M. (1977) *Methods of Linear Programming. Part 1*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 176 (in Russian).
8. Gabasov R., Kirillova F. M. (1978) *Methods of Linear Programming. Part 2*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 240 (in Russian).
9. Matveeva L. D. (1999) On one Bilinear Programming Problem. *Materialy 53-i Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf. Ch. 2 [Proceedings of 53th International Scientific and Technical Conference. Part 2]*. Minsk, Belarusian State Polytechnic Academy. 340 (in Russian).
10. Matveeva L. D. (2011) Solving a Bilinear Programming Problem with a Variable Vector of Conditions. *Nauka – Obrazovaniyu, Proizvodstvu, Ekonomike: Materialy II Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf. T. 3 [Science for Education, Industry, Economy: Proceedings of II International Scientific and Technical Conference. Vol. 3]*. Minsk, Belarusian National Technical University, 375 (in Russian).

Received: 18.08.2019

Accepted: 12.11.2020

Published online: 30.03.2021