

Влияние стохастических характеристик свойств материалов, изделий и процессов на оценку нормативных параметров

Докт. техн. наук, проф. С. Н. Осипов¹⁾

¹⁾ГП «Институт жилища – НИПТИС имени Атаева С. С.» (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2017
Belarusian National Technical University, 2017

Реферат. За последние 100 лет развитие математической статистики достигло высокого уровня. Для практических расчетов, анализа и сравнения различных стохастических процессов широко используется универсальный относительный и безразмерный показатель, называемый коэффициентом вариации. При малом количестве измерений (менее 30) изучаемого параметра до сих пор используются разные методики оценки возможных колебаний определяемых величин, основанные на свойствах закона распределения Гаусса. При этом количество измерений, выполняемых с помощью этих закономерностей, может значительно увеличиваться, что позволяет надежно (правильно) оценивать числовые характеристики изучаемых параметров. Однако согласно ГОСТ 21153.2–84, несмотря на корректировку методики определения минимально необходимого количества измерений (менее 30), этого оказалось недостаточно для получения надежного обеспечения безопасности, например, в области строительства (катастрофические аварии: в Москве – Трансвааль-парк и Басманный рынок; в Польше, Франции – зрелищные сооружения и др.). В 2007 г. предложено использовать критерий хи-квадрат при определении необходимого количества измерений в случае, если их менее 30, на что получены патенты Евразийского патентного ведомства и Республики Беларусь. При этом использовалось предложение К. А. Браунли, поддержанное создателем точной математической теории вероятности А. Н. Колмогоровым по оценке доверительных пределов величины дисперсии при помощи критерия хи-квадрат. Приведены результаты расчетов необходимого количества измерений по четырем методикам и сравнение этих результатов. Оказалось, что в случае использования критерия хи-квадрат для уровня надежности 0,9 и более необходимо самое большое количество измерений (определений). С ростом коэффициента вариации и расчетного уровня надежности увеличивается необходимое количество измерений. Сделана попытка применения «робастной» методики как не зависящей от формы закона распределения для определения минимально необходимого количества измерений. На основании многолетнего практического использования стохастических характеристик различных параметров и процессов предложена классификация нестабильности на базе величин коэффициентов вариации.

Ключевые слова: стохастические характеристики, нормативные параметры, количество измерений, уровень надежности, коэффициент вариации, классификация, «робастная» методика

Для цитирования: Осипов, С. Н. Влияние стохастических характеристик свойств материалов, изделий и процессов на оценку нормативных параметров / С. Н. Осипов // *Наука и техника*. 2017. Т. 16, № 4. С. 304–314. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-304-314

Influence of Stochastic Characteristics of Properties for Materials, Products and Processes on Evaluation of Regulatory Parameters

S. N. Osipov¹⁾

¹⁾UE “Institute of Housing – NIPTIS named after Ataev S. S.” (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. For the last one hundred years development of mathematical statistics has reached rather high level. A universal relative and non-dimensional factor which is known as a coefficient of variation is widely used for practical calculations, analysis and comparison of various stochastic processes. A variety of methodologies for evaluation of possible variations

Адрес для переписки

Осипов Сергей Николаевич
ГП «Институт жилища – НИПТИС имени Атаева С. С.»
ул. Ф. Скорины, 156,
220114, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 263-81-91
up-niptis@rambler.ru

Address for correspondence

Osipov Sergey N.
UE “Institute of Housing – NIPTIS named after Ataev S. S.”
15b F. Skoriny str.,
220114, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 263-81-91
up-niptis@rambler.ru

in definienda is used in case when a small amount of measurements (less than 30) is made in order to study the required parameter. While doing that a number of measurements executed with the help of these regularities can be significantly increased that permits reliably (correctly) to assess numerical characteristics of the investigated parameters. However according to GOST (All Union State Standard) 21153.2–84 some corrections in methodology for determination of minimum required number of measurements (less than 30) have appeared to be insignificant for obtaining a reliable safety, for example, in the field of civil construction (catastrophic accidents: in Moscow – Transvaal Park and Basmanny Market; assembly and other constructions: in Poland, France and others). In 2007 it has been proposed to use chi-square criterion for determination of the required number of measurements when their number is less than 30 and appropriate patents of Eurasian Patent Organization and the Republic of Belarus have been obtained for the proposal. For this purpose Brownlie's proposal has been used to assess confidence limits of dispersion values with the help of the chi-square criterion and the proposal has been supported by A. N. Kolmogorov who is an originator of exact mathematical probability calculus. The paper presents results of calculations for the required number of measurements in accordance with four methodologies and comparative analysis of the obtained results. It has appeared that in case when we are using chi-square criterion for the reliability level of 0.9 or even more it is necessary to make the largest number of measurements (determinations). While increasing variation coefficient and predicted reliability level the number of the required measurements is also increased. An effort has been made to apply a robust methodology, which does not depend on the form of a distribution law, for determination of minimum number of the required measurements. Having multi-year experience on practical usage of stochastic characteristics for various parameters classification of non-stability has been proposed on the basis of variation coefficient values.

Keywords: stochastic characteristics, regulatory parameters, number of measurements, reliability level, variation coefficient, classification, "robust" methodology

For citation: Osipov S. N. (2017) Influence of Stochastic Characteristics of Properties for Materials, Products and Processes on Evaluation of Regulatory Parameters. *Science and Technique*. 16 (4), 304–314. DOI: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-304-314 (in Russian)

К середине XX в. сложилось убеждение о необходимости построения математической статистики на основе теории вероятностей [1, с. 9], что впервые было предложено А. Н. Колмогоровым [2]. Следует отметить, что в начале XX в. в Российской империи и СССР уже существовал значительный интерес к теории вероятностей, свидетельством чего является учебник А. А. Маркова, 4-е издание которого вышло в 1924 г. [3].

Так как измерения – единственный способ получения количественной информации о величинах, характеризующих те или иные явления и процессы, правильная количественная оценка этих измерений совершенно необходима для обеспечения надежности их использования. Для характеристики частоты появления различных значений случайной величины теория вероятностей предлагает пользоваться указанием закона распределения вероятностей различных значений этой величины.

Известно множество (300–400) вероятностных (стохастических) функций распределения значений случайной величины. Наиболее часто применяемые описаны в [4]. В качестве практического примера анализа эмпирических распределений прочности горных пород можно привести исследования [5], в которых статистическому анализу подвергнуто 129 эмпирических распределений различных прочностных

характеристик горных пород. Однако только 73 результата этого анализа при количестве измерений $n > 70$ использовано для сравнения с теоретическими кривыми одновершинных распределений [5, с. 128, рис. 6.2]. Из этих эмпирических распределений около 70 % имеют значения асимметрии $\beta_1 \leq 0,75$ и коэффициента эксцесса $\beta_2 \leq 0,75$, что в первом приближении позволяет использовать нормальный вид (Гаусса) распределения.

Основные требования к кривым распределения для описания прочностных свойств горных пород заключаются в следующем [5]:

- 1) наличие единственного максимума у плотности распределения;
- 2) надежная аппроксимация в области не только средних значений прочности, но и маловероятных значений;
- 3) нижний предел кривой должен быть неотрицательной величиной;
- 4) верхний предел прочности может быть как ограниченной, так и неограниченной величиной;
- 5) наличие у кривой небольшого (2–3) числа параметров и простых методов определения;
- 6) функции плотности и распределения должны иметь простой аналитический вид, без сложных интегральных выражений и специальных функций.

Если испытания производятся при неизменных условиях и имеют «аномальные» (резко отличающиеся от основной массы) наблюдения, необходимо использовать соответствующий статистический критерий для выявления и исключения резко выделяющихся значений [6]. Установлено [5], что технические измерения являются «засоренными» аномальными наблюдениями примерно до 10 %, а производственные – до 20 %. Однако по [7, с. 43] отбрасывание даже одного «аномального» отсчета с края распределения при нормальном законе распределения и доверительной вероятности 95 % (квантиль распределения 0,95) требует производства не менее 40 определений искомого параметра.

В случае проведения измерений параметров, изменяющихся во времени, например суточных колебаний температуры атмосферного воздуха [7, с. 230–234], стохастическая оценка даже математического ожидания (средних значений измеряемого параметра) значительно усложняется. При нормальном распределении параметров прочности, исходя из пункта 3 основных требований, нижний предел кривой должен быть неотрицательной величиной, что обуславливает предельное практическое значение коэффициента вариации $K_v \leq 33\%$ [5, с. 126] и односторонний квантиль при трехкратной величине $\Phi(t) = 0,0013$ [1, с. 401], т. е. вероятность реализации менее 0,013 %. Следовательно, при $K_v > 33\%$ (0,33) полный нормальный закон распределения не применим для описания вероятностных значений прочностных свойств. Однако если величины коэффициентов вариации значений прочности по пробе на сжатие и растяжение не превышают 18–32 %, то по месторождению существенно их превышают, достигая 85–90 % [5, с. 126].

В оценке возможных величин K_v для прочностных свойств (одноосное растяжение и сжатие) всех видов горных пород основным источником информации является «Справочник (кадастр) физических свойств горных пород», в котором при испытании более трех образцов приведено 485 и 405 значений коэффициентов вариации на сжатие и растяжение соответственно [8]. При этом для одноосного сжатия 33 группы и одноосного растяжения 81 группа характеризуются $K_v > 0,33$.

Таким образом, при сжатии и растяжении соответственно около 7 и 20 % групп определения прочностных свойств горных пород даже по критерию максимальных значений $K_v \leq 0,33$ не могут аппроксимироваться кривыми нормального распределения вероятностей значений прочности. Необходимо отметить, что только в 11 группах образцов из 890 количество испытанных образцов составляло $n \geq 75$, по которым испытатели могли эмпирически определить вид распределения случайных значений.

Использование данных кадастра [8] позволило построить гистограммы распределения значений коэффициентов вариации групп измерений прочности образцов горных пород на одноосное сжатие [9, рис. 1] и одноосное растяжение [9, рис. 2]. Впервые [9] полученные общие стохастические закономерности прочности образцов горных пород на одноосное сжатие и растяжение позволили уточнить взаимодействие различных схем разрушения. Примерно «нормальное» распределение прочности значений коэффициентов вариации групп испытаний образцов на одноосное растяжение свидетельствует о преобладании общей стохастической схемы разрушения. Необходимо отметить совпадение превышения средней величины всех коэффициентов вариации прочности образцов на одноосное растяжение по сравнению с таковым на сжатие в 1,4 раза, что совпадает с результатами исследований пород угольных месторождений [5, 6, 8–10]. Однако при этом разброс значений K_v относительно средней величины для прочности на сжатие существенно (в 1,6 раза) больше, чем при растяжении [9].

В связи с небольшим количеством (около 20 % от общего) распределений значений прочностных свойств горных пород, удовлетворяющих критериям подобия (доверительные границы [11]) соответствия эмпирического распределения нормальному закону (Гаусса) для компенсации возможных несоответствий одновершинных распределений нормальному образцу, рекомендуется [6, 10] объем выборки увеличивать на 20–30 % по сравнению с расчетным. Как показал анализ результатов определения прочности на одноосное сжатие образцов сильвинита и каинитовой породы [12], с ростом влажности величина коэффициента

вариации существенно увеличивается. Так, при росте влажности с 1 до 3 % K_v увеличивается в 1,5–2 раза.

Пластические свойства и структура горных пород также оказывают большое влияние на разброс значений различных параметров [13] и существенно зависят от трещиноватости. При необходимости оценки количества определений (реализаций) параметра до настоящего времени используются различные варианты нормального закона распределения, в основе которых находится общеизвестная формула

$$n = \frac{t^2 K_v^2}{P_n^2}, \quad (1)$$

где t – критерий Стьюдента (псевдоним английского ученого-статистика В. С. Госсета [1, с. 148]; K_v – коэффициент вариации; P_n – допустимая погрешность определения искомой величины.

Однако происшедшие уже в XXI в. обрушения крупных по площади наружных перекрытий различных спортивных (спортзал школы в Краснопольске (Беларусь, 2004 г.), Трансвааль-парк (Москва, 2004 г.), бассейн (Москва, 2005 г.)), торговых (Басманный рынок (Москве, 2006 г.)), зрелищных (г. Катовице (ПНР, 2005 г.)) и других сооружений в разных странах (Франция, ФРГ и др.) с большими человеческими жертвами свидетельствуют об определенных недостатках в нормативно-технической документации, в которой зачастую содержалась методика определения расчетных величин прочностных свойств материалов и конструкций. Обычно рекомендованное количество определений расчетных значений показателей прочности составляло 3–10 при возможном коэффициенте вариации до 30 %.

Из приведенного выше анализа результатов определения прочностных свойств пород следует практическая необходимость увеличения количества реализаций, рассчитанных в соответствии с (1), на 20–30 %, что также является следствием отклонения реальных одновершинных законов распределения измеряемых величин от нормального закона. Как указывал еще более 70 лет назад К. А. Браунли [14, с. 48], вероятный доверительный предел истинного значения дисперсий при определенном уровне

значимости для любых объемов выборок, в том числе малых ($n < 30$), можно вычислить по формуле

$$d = \frac{n-1}{\chi^2} \sigma_k^2, \quad (2)$$

где d – дисперсия значений определяемого параметра, полученных при испытаниях, $d = \sigma_m^2$; σ_m – вероятная максимальная величина среднеквадратического отклонения значений, полученных при испытаниях определяемого параметра; σ_k^2 – дисперсия, подсчитанная по данным выборки результатов испытаний с $(n-1)$ степенями свободы; n – количество полученных значений параметра; χ^2 – значение критерия χ^2 (хи-квадрат) Е. Пирсона, верхний доверительный предел которого в зависимости от поставленной задачи принимается в уровне значимости, аналогичном вероятности реализации $P = 0,90-0,99$, что соответствует 1–10 % вероятности появления, более высоких, чем расчетные значения σ_m .

Однако с учетом возможных стохастических колебаний коэффициента вариации можно получить [15, с. 5]

$$n = \frac{\sigma_1^2 K_v^2}{P_n^2} \frac{n-1}{\chi^2}, \quad (3)$$

где σ_1 – количество стандартных отклонений в зависимости от вероятности реализации значений определяемого параметра.

Откуда для нормального закона распределения значений измеряемого параметра

$$n = \frac{1}{1 - \frac{P_n^2 \chi^2}{t_1^2 K_v^2}}. \quad (4)$$

Как видно из (4), количество необходимых испытаний при учете возможного вероятностного разброса значений K_v , по крайней мере при небольшом количестве испытаний ($n < (10-20)$ в зависимости от условий), существенно больше по сравнению с отсутствием учета стохастических колебаний коэффициентов вариации. Для других видов закона распределения измеряемых (определяемых) величин можно получить [15]

$$n = 1 + \chi^2 \left[\frac{1 \mp \frac{x_m}{\bar{x}}}{\delta_1 K_b} \right]^2, \quad (5)$$

где x_m – минимально (максимально) допустимая расчетная нормативная величина; \bar{x} – средняя величина в результате испытаний.

Анализ применения (5) приведен в [16, 17]. Однако многие особенности использования патента [15] по сравнению с (1) до сих пор не описаны. При этом необходимо учесть ГОСТ 21153.2–84 [18], в котором в некоторой мере учтены описанные выше рекомендации увеличения необходимого количества измерений (экспериментов) при определении прочностных свойств горных пород. Кроме того, в строительной отрасли большой интерес вызывает работа Б. М. Колотилкина [19], которая посвящена важнейшему вопросу надежности функционирования жилых зданий, где имеется оценка необходимого количества измерений.

Учитывая сравнение четырех методик определения необходимого количества измерений, для них вводятся следующие условные обозначения (индексы): n_1 – в соответствии с (1) (распределение Гаусса); n_2 – в соответствии с (3) или (5) при учете критерия χ^2 ; n_3 – в соответствии с [18]; n_4 – в соответствии с рекомендацией [19]. В первую очередь следует сравнить необходимое количество измерений согласно распределению по закону Гаусса (n_1) и с учетом χ^2 (n_2), что наглядно представлено на рис. 1 при $K_b = 0,25$. На рис. 1 в качестве базового значения принято $n_1 = 10$, а направленные вниз стрелки показывают эквивалентные значения n_2 .

Как видно из рис. 1, при $K_b = 0,25$ необходимое количество измерений с учетом критерия χ^2 увеличивается при надежности $V = 80\%$ на 50% (в 1,5 раза), при $V = 90\%$ – на 75% (в 1,75 раза), при $V = 95\%$ – на 90% (в 1,9 раза), при $V = 98\%$ – на 135% (в 2,35 раза). При меньших значениях коэффициента вариации это абсолютное увеличение количества необходимых измерений n_2 по сравнению с n_1 уменьшается, но относительное остается высоким. Следует отметить, что надежность определения характеристик пород порядка $V = 0,80$ признается

достаточной в горном деле [18; 20, с. 125], что для строительной и многих других отраслей является неприемлемым, где обычно используется уровень надежности не менее 0,95.

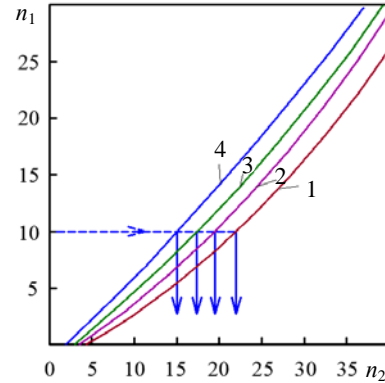


Рис. 1. Количество необходимых измерений (определений) исследуемого параметра при нормальном законе распределения (n_1) и с учетом критерия χ^2 (n_2) в зависимости от уровня надежности V : 1 – 0,98; 2 – 0,95; 3 – 0,90; 4 – 0,80

Fig. 1. Number of required measurements (determinations) or investigated parameter with normal distribution law (n_1) and due account of criterion χ^2 (n_2) according to reliability level V : 1 – 0.98; 2 – 0.95; 3 – 0.90; 4 – 0.80

Существенный интерес представляет сравнение роста необходимого количества измерений с увеличением коэффициента вариации при надежности V , равной 0,90; 0,95 и 0,98, что представлено на рис. 2, 3.

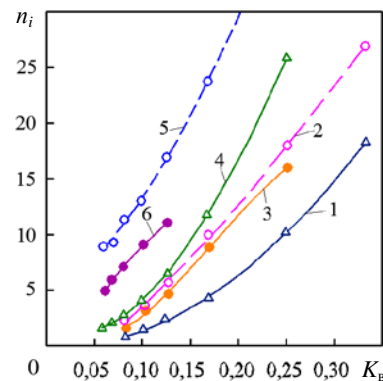


Рис. 2. Влияние величины коэффициента вариации K_b на необходимое количество измерений при использовании различных методик: при $V = 0,90$: 1 – n_1 ; 2 – n_2 ; 3 – n_3 ; при $V = 0,98$: 4 – n_1 ; 5 – n_2 ; 6 – n_3

Fig. 2. Influence of variation coefficient value K_b on required number of measurements while using various methodologies: at $V = 0.90$: 1 – n_1 ; 2 – n_2 ; 3 – n_3 ; at $V = 0.98$: 4 – n_1 ; 5 – n_2 ; 6 – n_3

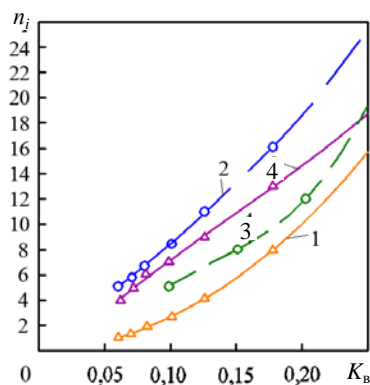


Рис. 3. Влияние величины коэффициента вариации K_b при надежности $V = 0,95$ на необходимое количество измерений при использовании различных методик:

1 – n_1 ; 2 – n_2 ; 3 – n_3 ; 4 – n_4

Fig. 3. Influence of variation coefficient value K_b with reliability $V = 0,95$ on required number of measurements while using various methodologies:

1 – n_1 ; 2 – n_2 ; 3 – n_3 ; 4 – n_4

Все кривые на рис. 2, 3 построены по точкам значений, взятых из рекомендованных или представленных разными авторами. Следует отметить, что все кривые, построенные для нормального закона распределения при соответствующих надежность V (0,90; 0,95 и 0,98), располагаются в нижних частях групп кривых, т. е. эта методика в чистом виде дает минимальные количества необходимых измерений (испытаний). Во всех группах кривых на втором месте снизу расположены зависимости $n_3 = f(K_b, V)$, построенные в соответствии с [18]. Выше них располагается зависимость $n_4 = f(K_b, V)$ (рис. 3, кривая 3), построенная по методике [19]. Выше всех – зависимость $n_2 = f(K_b, V)$ (рис. 3), в которой учитывается критерий χ^2 [15]. Если рассмотреть рекомендованные методики исторически, то определению n_1 уже около 100 лет, n_3 – 30–40 лет, n_4 – 30 лет, а n_2 с учетом критерия χ^2 – всего пять лет. Такой прогресс в первую очередь можно объяснить тяжелыми авариями, происходящими с крупными зданиями со сложными сборными металлическими конструкциями, которые свидетельствовали о неблагополучии, в частности при определении прочностных показателей материалов и конструкций.

Следует отметить разную интенсивность роста необходимого количества измерений (уг-

лов наклона кривых или производных $\partial n_i / \partial K_b$) с нарастанием величины коэффициента вариации при постоянных значениях надежности. При $K_b > (0,15-0,20)$ заметна параллельность нарастания значений n_1 и n_2 . На рис. 3 видно, что результаты расчетов методики необходимого количества измерений по [18] и [19] постепенно сближаются и даже пересекаются при $K_b \approx 0,25$. При малых значениях коэффициента вариации ($K_b < 0,05$) различные методики дают разные интенсивности уменьшения необходимых значений n_i , но при использовании критерия χ^2 количество измерений (испытаний) должно быть не менее четырех ($n_2 \geq 4$) [15].

Как показывает анализ результатов расчетов, разность $(n_2 - n_3)$ (рис. 4) с увеличением коэффициента вариации при постоянных значениях надежности существенно возрастает. Если при $V = 0,90$ эта зависимость (рис. 4, линия 1) примерно линейна, то при V , равном 0,95 и 0,98, выражается параболической кривой (рис. 4, кривые 2, 3), кривизна которой с ростом значений надежности увеличивается.

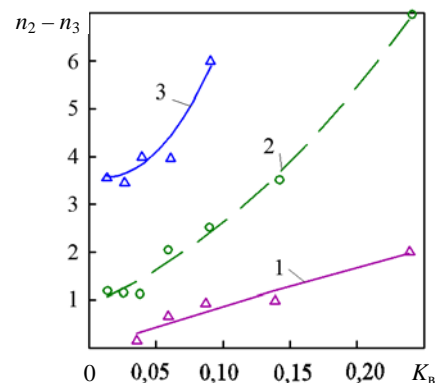


Рис. 4. Зависимость разности $(n_2 - n_3)$ от величины коэффициента вариации K_b при различных значениях надежности V : 1 – 0,90; 2 – 0,95; 3 – 0,98

Fig. 4. Dependence of difference $(n_2 - n_3)$ on variation coefficient value K_b at various reliability values V : 1 – 0,90; 2 – 0,95; 3 – 0,98

Также интересно проследить влияние параметра надежности V на необходимое количество измерений (испытаний) n_2 при разных значениях K_b (рис. 5) в случае учета критерия χ^2 . Следует отметить, что с ростом коэффициента вариации средняя кривизна $(\partial n_2 / \partial V)_{cp}$ возрастает и при этом значительно увеличивается n_2 , выходя в итоге за границу «малого» количества измерений.

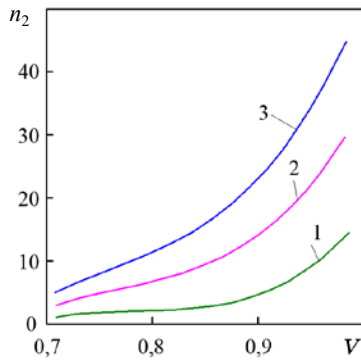


Рис. 5. Влияние показателя надежности на минимально необходимое количество измерений n_2 (испытаний) с учетом критерия χ^2 при разных значениях K_b : 1 – 0,1; 2 – 0,2; 3 – 0,3

Fig. 5. Influence of reliability index on minimum required number of measurements n_2 (tests) with due account of criterion χ^2 at various values of K_b : 1 – 0.1; 2 – 0.2; 3 – 0.3

Отношение необходимых количеств измерений (испытаний) при учете критерия χ^2 и без него также представляет определенный интерес (рис. 6).

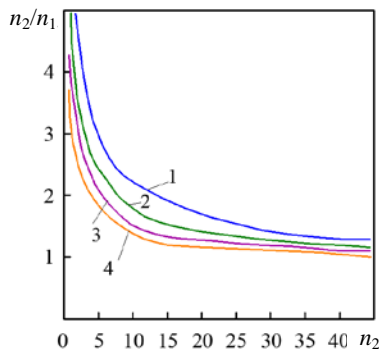


Рис. 6. Зависимость отношения n_2/n_1 от необходимой надежности определения параметра и минимального количества измерений с учетом критерия χ^2 при $K_b = 0,25$ для V : 1 – 0,98; 2 – 0,95; 3 – 0,90; 4 – 0,80

Fig. 6. Dependence of ratio n_2/n_1 on required reliability for determination of parameter and minimum number of measurements with due account of criterion χ^2 at $K_b = 0.25$ for V : 1 – 0.98; 2 – 0.95; 3 – 0.90; 4 – 0.80

Как видно из рис. 6, при $K_b = 0,25$ кривые $n_2/n_1 = f(n_2, V)$ имеют гиперболический вид и резко возрастают при уменьшении n_2 от 30 до нескольких единиц, что свидетельствует о резком усилении влияния учета критерия χ^2 , особенно при малом количестве измерений ($n \leq 10$).

Поэтому при измерениях, испытаниях и определениях искомых параметров при $n \leq 30$ обязательно нужно учитывать критерий χ^2 в случае использования одновершинных законов распределения, похожих на нормальный закон распределения Гаусса.

Учитывая вышеизложенное, основная трудность в правильной и надежной оценке исследуемого параметра лежит в области определения его закона распределения. Однако за последние 30 лет [21–24] для многофакторных экспериментов разработана «робастная», т. е. не зависящая от закона распределения, устойчивая методика оценки параметров модели и исключения промахов [7, с. 240]. В этой методике [24] использованы понятия «сигнал» (управляемый фактор) и «шум» (неуправляемый, т. е. случайный фактор). Для экспериментатора определяемая средняя величина \bar{x} является сигналом (с), чему мешает ее стохастичность, характеризующая шум (ш). Отношение сигнала к шуму по [24] описывается формулой

$$\frac{с}{ш} = 10 \lg \left(\frac{\bar{x}^2}{\sigma^2} \right), \quad (6)$$

где \bar{x} – средняя измеряемая величина (центр рассеивания); σ – среднеквадратическое отклонение, имеющее размерность измеряемой величины.

С учетом изложенного в [25], при использовании нормального закона распределения можно записать

$$\frac{с}{ш} = 10 \lg \left(\frac{1}{K_b^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)} \right), \quad (7)$$

что существенно ограничивает применение (7) для других видов законов распределения. Однако для малых выборок с учетом (2) можно записать

$$\frac{с}{ш} = 10 \lg \left(K_b^2 \left(\frac{n-1}{\chi^2} \right) \right)^{-1}, \quad (8)$$

откуда

$$\lg \chi^2 = \lg(n-1) + 2 \lg K_b - \frac{1}{10} \frac{с}{ш}. \quad (9)$$

Согласно [14, с. 20], критерий χ^2 является функцией вероятности ψ и числа степеней свободы $m = (n - 1)$, т. е. объема выборки (количества измерений). Поэтому для численного определения показателя надежности (вероятности реализации) необходимо по известным значениям n , K_b и c/\bar{x} вычислить χ^2 и $\lg\chi^2$, а затем из $\chi^2 = f(\psi, n)$ найти ψ . Если обозначить:

$$A_1 = \frac{n-1}{\chi^2}; A_2 = \left(K_b^2 10^{\frac{1}{10} \lg \chi^2} \right)^{-1}, \quad (10)$$

то должно удовлетворяться равенство $A_1 = A_2$. Но в явном виде решить это уравнение относительно показателя надежности ψ и количества измерений не представляется возможным. Поэтому для определения необходимого количества измерений n при условии принятия в качестве c/\bar{x} отношения минимально (максимально) допустимого значения измеряемой величины к среднему (x_m / \bar{x}) следует использовать компьютерные расчеты или графоаналитические способы (номограммы) [26]. Такое («робастное») направление оценки надежности экспериментального определения искомого параметра, безусловно, требует дальнейших теоретических и практических исследований.

В связи с важностью учета величины коэффициента вариации, предложенного К. Пирсоном около 100 лет назад в качестве относительной меры рассеяния стохастической величины вокруг среднего значения, представляется необходимым предложить классификацию возможных колебаний значения определяемого параметра по величине коэффициента вариации. Это тем более необходимо вследствие безразмерности K_b , что позволяет сравнить возможные колебания значений самых различных параметров.

Основываясь на многочисленных определениях величин коэффициентов вариации [27], предлагаются следующие варианты нестабильности определяемого параметра по классам:

- 1-й: незначительная при $K_b \leq 0,05$;
- 2-й: малая при $0,05 \leq K_b \leq 0,10$;
- 3-й: средняя при $0,10 \leq K_b \leq 0,20$;
- 4-й: сильная при $0,20 \leq K_b \leq 0,30$;
- 5-й: очень сильная при $0,30 \leq K_b \leq 0,40$;
- 6-й: катастрофическая при $K_b > 0,40$.

Как показывает анализ реальных результатов многочисленных определений коэффициентов вариации прочностных свойств горных пород [17] и концентраций метана в горных выработках шахт Донбасса [27], т. е. совершенно различных природных источников, абсолютные величины K_b очень редко (менее 1 % от общего количества групп измерений) превышают величину 0,40, что уже соответствует очень сильной нестабильности. Следует отметить, что для прочности на сжатие некоторых пород покровной толщи Старобинского месторождения калийных солей (I и II Солигорские рудники) $K_b > 0,40$ (мергель – при $n = 18$ $K_b = 0,44$; глинистый доломит – при $n = 9$ $K_b = 0,45$) [28].

Для металлов и бетонов величины коэффициентов вариаций прочностных показателей обычно не выходят за пределы $K_b \leq 0,20$. Однако даже при этих значениях K_b на основании данных длительной практики конструирования, расчета и эксплуатации машин и сооружений величина запаса прочности для сталей при статической нагрузке принимается равной 1,4–1,6 [29, с. 116]. Для хрупких материалов при статических нагрузках запас прочности следует принимать в размере 2,5–3,0, а для пластичных материалов он должен составлять 2,4–2,6 [29, с. 117].

Ориентировочную оценку величин коэффициентов вариаций, использованных при определении приведенных коэффициентов запаса, можно получить, исходя из приведенного в [5, с. 126, 139, 144] условия $K_b \leq 0,33$ при нормальном законе распределения (Гаусса), так как значения параметров прочности должны быть положительными. При этом эксцесс (островершинность) должен характеризоваться коэффициентом $2,5 \leq b_2 \leq 3,5$ [5, с. 144]. При $K_b \leq 0,45$ и $1,5 \leq b_2 \leq 2,5$ рекомендуется применять параболическое распределение, при $K_b \leq 0,25–0,30$ и $3,5 \leq b_2 \leq 6$ – логистическое распределение.

Исходя из предельной величины коэффициента вариации $K_b \approx 0,33$, для закона Гаусса минимальная величина показателя прочности породы около нуля. Поэтому при $x_m = \bar{x} (1 - 3K_b)$ учтенные величины коэффициентов вариации при определении коэффициентов запаса составляют:

- для сталей при статической нагрузке $K_b \approx 0,10-0,12$;
- для хрупких материалов при статической нагрузке $K_b \approx 0,20-0,22$;
- для пластичных материалов $K_b \approx 0,19-0,21$.

Важность надежного определения величины измеряемого параметра в очередной раз подтверждается Законом Республики Беларусь «Об энергосбережении» от 26.02.2015 [30], в котором предусмотрено каждые пять лет обязательное энергетическое обследование (энергоаудит) юридических лиц с годовым потреблением топливно-энергетических ресурсов 1,5 тыс. т у. т. и более. В этом законе также предусмотрены многие мероприятия по энергосбережению. Понятно, что для эффективного исполнения закона [30] необходимы многочисленные измерения и правильное определение различных параметров объектов обследования, для чего нужна надежная методика. Поэтому описанная в данной статье проблема требует проведения дальнейших исследований.

ВЫВОДЫ

1. Любые количественные измерения определяемых параметров сопровождаются погрешностями, а при разных величинах этих параметров, изменяющихся во времени и пространстве, требуют учета вероятностей их проявления. При случайном воздействии погрешностей необходим учет стохастических закономерностей для их количественной оценки.

2. При малом количестве измерений (определений) изучаемого параметра (менее 30) до сих пор используются различные методики оценки возможных колебаний измеряемых величин, основанных на применении закономерностей распределения Гаусса. При этом практическое использование этих закономерностей для определения количества измерений приводит к необходимости их увеличения для надежного (правильного) нахождения числовых характеристик изучаемых параметров.

3. До 2007 г. по непонятным причинам для малых выборок (менее 30) не использовалось предложение К. А. Браунли по оценке доверительных пределов для величины дисперсии

при помощи критерия χ^2 , применение которого при надежности более 0,8 увеличивает количество необходимых измерений более всех методик на основе закона Гаусса.

4. Все ныне действующие и предлагаемые методики с критерием χ^2 определения количественных (в том числе стохастических) характеристик изучаемого параметра предназначены для одновершинных распределений, похожих на закон Гаусса. Однако для достаточно надежной оценки необходимого количества измерений следует разработать такую методику определения стохастических характеристик, при использовании которой вид закона распределения либо не будет оказывать решающего влияния, либо будет аналитически запрещать проведение этих расчетов.

5. В последнее время большой практический интерес представляют «робастные», т. е. не зависящие от вида закона распределения, устойчивые методы оценки стохастических параметров измеряемого параметра, которые получили применение в основном при многофакторном эксперименте. Необходимо реально оценить условия и возможность применения «робастного» метода при определении количественных характеристик изучаемого объекта.

6. На основе многолетнего практического использования стохастических характеристик различных параметров и процессов впервые предложена классификация нестабильности на базе величин коэффициентов вариации.

7. Насущная необходимость повышения надежности определения количественных характеристик с целью предотвращения катастрофических аварий требует проведения специальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден, Б. Л. Математическая статистика / Б. Л. Ван дер Варден. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 436 с.
2. Колмогоров, А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. М.: ОНТИ, 1936. 324 с.
3. Марков, А. А. Исчисление вероятностей / А. А. Марков. М.: ГИЗ, 1924. 236 с.
4. Хастингс, Н. А. Справочник по статистическим распределениям / Н. А. Хастингс, Дж. Б. Пикок. М.: Статистика, 1980. 96 с.

5. Глушко, В. Т. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов горных пород / В. Т. Глушко, С. П. Гавеля. М.: Недра, 1986. 222 с.
6. Баклашов, И. В. Механика горных пород / И. В. Баклашов, Б. А. Картозия. М.: Недра, 1975. 264 с.
7. Новицкий, П. В. Оценка погрешностей результатов измерений / П. В. Новицкий, И. А. Зорграф. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
8. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. М.: Недра, 1975. 280 с.
9. Осипов, С. Н. О распределении значений коэффициентов вариации прочности групп образцов горных пород / С. Н. Осипов, Е. А. Смычник, Р. Г. Шваб // Горная механика и машиностроение. 2013. № 2. С. 52–62.
10. Чирков, С. Е. Влияние на прочность и деформируемость горных пород напряженного состояния и масштабного эффекта / С. Е. Чирков. М.: МГИ, 1974. 56 с.
11. Длин, А. М. Математическая статистика в технике / А. М. Длин. М.: Советская наука, 1958. 426 с.
12. Осипов, С. Н. Влияние летнего увлажнения атмосферы калийных рудников на прочностные свойства пород контура горных выработок / С. Н. Осипов, Е. А. Смычник, Р. Г. Шваб // Горная механика и машиностроение. 2012. № 4. С. 40–49.
13. Осипов, С. Н. О надежности оценки физических свойств водозащитной толщи при подземной разработке солей / С. Н. Осипов, Е. А. Смычник, Р. Г. Шваб // Горная механика и машиностроение. 2012. № 2. С. 23–24.
14. Браунли, К. А. Статистические исследования в производстве / К. А. Браунли; под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. 228 с.
15. Способ определения минимального количества испытаний преимущественно строительных материалов и изделий: Евразийский пат. № 0143390 / С. Н. Осипов, В. М. Пилипенко; заявл. 12.12.2007, опубл. 29.10.2010. 8 с.
16. Осипов, С. Н. Об оценке надежности результатов испытаний физических свойств строительных материалов / С. Н. Осипов // Наука и техника. 2014. № 5. С. 18–24.
17. Осипов, С. Н. Некоторые стохастические особенности использования результатов определения свойств горных пород / С. Н. Осипов, Е. А. Смычник, Р. Г. Шваб // Горная механика и машиностроение. 2013. № 3. С. 16–24.
18. Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном сжатии: ГОСТ 21153.2–84. М.: Изд-во стандартов, 1985. 16 с.
19. Колотилкин, Б. М. Надежность функционирования жилых зданий / Б. М. Колотилкин. М.: Стройиздат, 1989. 374 с.
20. Зборщик, М. П. Охрана выработок глубоких шахт в выработанном пространстве / М. П. Зборщик. Киев: Техника, 1978. 176 с.
21. Хьюбер, П. Робастность в статистике / П. Хьюбер; пер. с англ. М.: Мир, 1984. 304 с. DOI: 10.1002/0471725250.
22. Taguchi, G. System of Experimental design: Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Costs / G. Taguchi. New York: UNIPUB / Kraus International, 1987. Vol. 1, 2.
23. Taguchi, G. Taguchi methods. Case Studies from the U.S. and Europe / G. Taguchi, Yuiin Wo. American Supplier Institute, 1989. Vol. 6.
24. Серенков, П. С. Концепция робастного проектирования процессов в рамках системы менеджмента качества / П. С. Серенков, В. М. Романчук, Э. М. Короневич // Стандартизация и сертификация. 2004. № 2. С. 64–67.
25. Осипов, С. Н. О некоторых особенностях использования коэффициента вариации при статистической обработке экспериментальных данных / С. Н. Осипов // Вестник БНТУ. 2005. № 4. С. 9–12.
26. Осипов, С. Н. О стохастической оценке результатов волнового просвечивания твердых материалов при малом количестве измерений / С. Н. Осипов // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. 2015. № 3. С. 60–68.
27. Осипов, С. Н. Метановыделение при разработке полых угольных пластов / С. Н. Осипов. М.: Недра, 1964. 254 с.
28. Атрашкевич, А. А. Исследование основных физико-механических свойств пород Старобинского месторождения калийных солей / А. А. Атрашкевич, О. П. Шокин, А. С. Севрюков // Вопросы добычи и переработки галургического сырья. М.; Л.: Химия, 1968. С. 107–118.
29. Сопrotивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. 3-е изд. Киев: Вища шк., 1973. 672 с.
30. Об энергосбережении [Электронный ресурс]: Закон Респ. Беларусь, 8 января 2015 г., № 239-3 // Национальный правовой интернет-портал Республики Беларусь. Режим доступа: http://minenergo.gov.by/dfiles/000437_303862_ob_energoberezenii_2015.pdf. Дата доступа: 26.03.2017.

Поступила 28.06.2016

Подписана в печать 01.09.2016

Опубликована онлайн 28.07.2017

REFERENCES

1. Van der Waerden B. L. (1957) *Mathematical Statistics*. Berlin u. a., Springer-Verl. (Russ. ed.: Van der Waerden B. L. (1960) *Matematicheskaya Statistika*. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ. 436).
2. Kolmogorov A. N. (1936) *Fundamental Concepts of Probability Theory*. Moscow, Joint Scientific and Technical Publishing House. 324 (in Russian).
3. Markov A. A. (1924) *Probability Calculations*. Moscow, State Publishing House. 236 (in Russian).
4. Hastings N. A., Peacock J. B. (1975) *Statistical Distributions: a Handbook for Students and Practitioners*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons. (Russ. ed.: Hastings N. A., Peacock J. B. (1980) *Spravochnik po Statisticheskim Raspredeleniyam*. Moscow, Statistika Publ. 96).
5. Glushko V. T., Gavelya S. P. (1986) *Evaluation of Stress and Deformed State in Rock Massif*. Moscow, Nedra Publ. 222 (in Russian).
6. Baklashov I. V., Kartoziya B. A. (1975) *Rock Mechanics*. Moscow, Nedra Publ. 264 (in Russian).
7. Novitskiy P. V., Zograf I. A. (1985) *Estimated Accuracy of Measurement Results*. Leningrad, Energoatomizdat Publ. 248 (in Russian).

8. *Reference Book (Cadastre) on Physical Properties of Rock* (1975). Moscow, Nedra Publ. 280 (in Russian).
9. Osipov S. N., Smychnik E. A., Shvab R. G. (2013) On Distribution of Ratio Values in Strength Variations for Rock Sample Groups. *Gornaya Mekhanika i Mashinostroyeniye* [Mining Mechanics and Mechanical Engineering], (2), 52–62 (in Russian).
10. Tchirkov S. E. (1974) *Influence on Strength and Deformability of Rocks Being in Stress State and Scale Effect*. Moscow, Moscow Mining Institute. 56 (in Russian).
11. Dlin A. M. (1958) *Mathematical Statistics in Engineering*. Moscow, Sovetskaya Nauka Publ. 426 (in Russian).
12. Osipov S. N., Smychnik E. A., Shvab R. G. (2012) Influence of Summer Humidification in Atmosphere of Potash Mines on Rock Strength Properties in Mining Contour. *Gornaya Mekhanika i Mashinostroyeniye* [Mining Mechanics and Mechanical Engineering], (4), 40–49 (in Russian).
13. Osipov S. N., Smychnik E. A., Shvab R. G. (2012) On Reliability in Evaluation of Physical Properties for Water-Protective Rock Mass While Executing Underground Salt Exploitation. *Gornaya Mekhanika i Mashinostroyeniye* [Mining Mechanics and Mechanical Engineering], (2), 23–24 (in Russian).
14. Brownlee K. A. (1949) *Statistical Investigations in Industry*. Moscow, Inostrannaya Literatura. 228 (in Russian).
15. Osipov S. N., Pilipenko V. M. (2010) *Method for Determination of Minimum Test Number Mainly for Construction Materials and Products*. Euroasian Patent No 0143390 (in Russian).
16. Osipov S. N. (2014) On Reliability Evaluation of Test Results for Physical Properties of Construction Materials. *Nauka i Tekhnika* [Science and Technique], (5), 18–24 (in Russian).
17. Osipov S. N., Smychnik E. A., Shvab R. G. (2013) Some Stochastic Peculiarities in Usage of Results for Determination of Rock Properties. *Gornaya Mekhanika i Mashinostroyeniye* [Mining Mechanics and Mechanical Engineering], (3), 16–24 (in Russian).
18. State Standard 21153.2–84. Rocks. Methods for Determination of Yield Value in Case of Simple Compression. Moscow, Publishing House for Standards, 1985. 16 (in Russian).
19. Kolotilkin B. M. (1989) *Reliability in Operational Behavior of Residential Buildings*. Moscow, Stroyizdat Publ. 374 (in Russian).
20. Zborshchik M. P. (1978) *Protection of Outputs in Deep Mines Within Mined-Out Area*. Kiev, Tekhnika Publ. 176 (in Russian).
21. Huber P. (1981) *Robust Statistics*. Wiley. DOI: 10.1002/0471725250.
22. Taguchi G. (1987) *System of Experimental Design: Engineering Methods to Optimize Quality and Minimize Costs. Vol. 1, 2*. New York, UNIPUB / Kraus International.
23. Taguchi G., Yuin Wo (1989) *Taguchi Methods. Case Studies from the U.S. and Europe. Vol. 6*. American Supplier Institute.
24. Serenkov P. S., Romanchak V. M., Koronevich E. M. (2004) Concept for Robust Process Design in the Framework of Quality Management System. *Standartizatsiya i Sertifikatsiya* [Standardization and Certification], (2), 64–67 (in Russian).
25. Osipov S. N. (2005) On Some Peculiar Features of Variation Factors Usage at Statistical Experimental Data Processing. *Vestnik BNTU* [Bulletin of the Belarusian National Technical University], (4), 9–12 (in Russian).
26. Osipov S. N. (2015) On Stochastic Estimation of Results on Undulatory Transillumination of Solid Materials with Paucity of Measurements. *Energetika. Proceedings of CIS Higher Education Institutions and Power Engineering Associations*, (3), 60–68 (in Russian).
27. Osipov S. N. (1964) *Methane Release While Exploiting Flat-Lying Coal Seams*. Moscow, Nedra Publ. 254 (in Russian).
28. Atrashkevich A. A., Shokin O. P., Sevryukov A. S. (1968) Investigations on Main Physical and Mechanical Properties of Rocks at the Starobinsky Potash Salt Deposit. *Issues on Mining and Processing of Halurgical Raw Material*. Moscow-Leningrad, Khimiya Publ., 107–118 (in Russian).
29. Pisarenko G. S., Agarev V. A., Kvitka A. L., Popkov V. G., Umanskii E. S. (1973) *Material Resistance*. 3rd edition. Kiev, Vishcha Shkola. 672 (in Russian).
30. *On Energy Conservation: Law of the Republic of Belarus Dated on 8 January 2015 No 239-3*. The National Legal Internet Portal of the Republic of Belarus. Available at: http://minenergo.gov.by/dfiles/000437_303862__ob_energo_sbezhenii_2015.pdf (Accessed 26 March 2017) (in Russian).

Received: 28.06.2016

Accepted: 01.09.2016

Published online: 28.07.2017