

DOI: 10.21122/2227-1031-2016-15-6-493-503

УДК 539.3

Расчет жесткой стенки в упругой весоной полуплоскости

К. В. Дмитриева¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2016
Belarusian National Technical University, 2016

Реферат. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния жесткой стенки в упругой весоной полуплоскости с ломаным контуром. Для этого решена вспомогательная задача по определению перемещений в упругой весоной четвертьплоскости. При помощи метода Ритца получены формулы для определения перемещений границ упругого плоского клина с учетом его собственного веса. На основании данных выражений разработан алгоритм определения перемещений границ щели в упругой весоной полуплоскости с контуром ломаного очертания. Аналитический расчет жесткой вертикальной стенки, находящейся в упругой весоной полуплоскости под действием горизонтальной нагрузки, проведен двумя способами: методом Б. Н. Жемочкина и методом конечных разностей. В постановке задачи упругая полуплоскость считается моделью грунтового основания, следовательно, на контакте стенки с упругим основанием могут возникать только сжимающие нормальные напряжения. Такая предпосылка предполагает возникновение разрывов сплошности грунтовой среды, а для стенки приводит к возникновению двух точек раздела граничных условий. Отыскание границ областей контакта стенки с упругой полуплоскостью, которые заранее не известны, проводили итерационным путем, на каждом шаге которого задавали положение точек раздела граничных условий и записывали систему канонических уравнений соответствующего метода. Если на контакте «стенка – основание» появлялись растягивающие напряжения и/или происходило перекрытие граней щели, то осуществляли переход к следующей итерации. Анализ полученных результатов показывает, что эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях жесткой стенки в ломаной весоной полуплоскости незначительно отличаются от таких же эпюр, построенных для жесткой стенки в упругой невесоной полуплоскости. Проведена верификация результатов аналитического расчета с результатами, полученными при помощи ПК «Лира 9.6», реализующего метод конечных элементов. Результаты расчета для жесткой стенки в упругой весоной полуплоскости, полученные аналитическими методами, качественно согласуются с результатами расчета на ПК «Лира 9.6».

Ключевые слова: контактная задача, плоская деформация, метод Жемочкина, конструктивная нелинейность

Для цитирования: Дмитриева, К. В. Расчет жесткой стенки в упругой весоной полуплоскости / К. В. Дмитриева // *Наука и техника*. 2016. Т. 15, № 6. С. 493–503

Analysis of Rigid Wall in Elastic Weighty Half-Plane

К. V. Dmitrieva¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. A stress-strain analysis of a rigid wall in an elastic weighty half-plane with a broken outline has been carried out in the paper. For this purpose we have solved an auxiliary problem on determination of displacements in an elastic weighty quarter-plane. Formulae for determination of boundary displacements in elastic flat wedge with due account of its own weight have been derived with the help of the Ritz method. An algorithm for determination of crack boundary displacements in an elastic weighty half-plane with a broken outline has been developed on the basis of the expression data. An analytical calculation of a rigid vertical wall located in an elastic weighty half-plane under the influence of a horizontal load has been made by two methods: the Zhemochkin's method and a finite difference method. In the problem statement, therefore only compressive normal stresses can arise on the connection of the wall with the elastic base.

Адрес для переписки

Дмитриева Ксения Владимировна
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 150,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 267-98-65
SM@bntu.by

Address for correspondence

Dmitrieva Ksenia V.
Belarusian National Technical University
150 Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 267-98-65
SM@bntu.by

Such an assumption implies occurrence of discontinuities in soil medium, and as for the wall it leads to an emergence of two dividing points for boundary conditions. Determination of contact boundaries for the wall with the elastic half-plane which are not known in advance has been performed iteratively. At every step of the determination we have set a position of dividing points for boundary conditions and written down a system of canonical equations for a relevant method. If tensile stresses appear and/or overlapping of the crack edges occurs in “wall-base” contact then we have proceeded to the next iteration. An analysis of the obtained results shows that diagrams of bending moments and shear forces in sections of the rigid wall within a broken weighty half-plane slightly differ from the same diagrams which are constructed for a rigid wall in an elastic weightless half-plane. A verification of analytical calculation results with the results obtained while using the LIRA 9.6 software complex has been carried out in the paper. In this case the LIRA complex implements a finite element method. Calculation results for the rigid wall in an elastic weighty half-plane that have been obtained by analytical methods, are qualitatively consistent with the “Lira 9.6” calculation results.

Keywords: contact problem, plane strain, Zhemochkins method, constructive nonlinearity

For citation: Dmitrieva K. V. (2016) Analysis of Rigid Wall in Elastic Weighty Half-Plane. *Science & Technique*. 15 (6), 493–503 (in Russian)

Контактные задачи представляют одну из важнейших областей современной механики деформируемого твердого тела. Необходимость совместных расчетов основания и взаимодействующих с ним конструкций заложена в нормативных документах и актуальна не только для уникальных объектов, но и для рядовых зданий и сооружений. Учет контактных взаимодействий позволяет повысить точность расчета и обеспечить надежность конструкций. Однако в практике проектирования еще довольно сильна инерция раздельных расчетов контактирующих конструкций. Например, при решении задач контактного взаимодействия грунтового массива с конструкциями инженерных сооружений расчет, как правило, выполняется отдельно для подземных и надземных частей, а взаимодействие происходит посредством использования коэффициентов постели. Вместе с тем распределение контактных напряжений зависит от жесткости, формы и размеров контактирующего сооружения и от податливости основания.

Существующие в настоящее время программные комплексы, основанные на методе конечных элементов (МКЭ), позволяют решать задачи в линейной постановке даже с огромным количеством степеней свободы. Нелинейные же задачи контактного взаимодействия, как правило, имеющие внутренним циклом точное решение линейной задачи, требуют чрезмерно большого количества времени по сравнению с линейными задачами, что обусловлено математической сложностью поставленных задач. Проблемы в области нелинейной постановки контактных задач связаны не только с отсутствием программы, удобной для совместного расчета конструкций и основания. Более существенные трудности связаны с чело-

веческим фактором: на практике зачастую пользователи программных средств, позволяющих быстро получить впечатляющий результат, выполняют однократный расчет, не делая проверку аналитическими решениями, хотя отказ от аналитических методов расчета, апробированных многолетней практикой, – грубая ошибка [1]. Сегодня большое количество научных работ посвящается не столько изучению контактных взаимодействий, сколько изучению того, как работают конечно-элементные программы при различных постановках задач. Поэтому представляются важными обязательная верификация результатов численных расчетов с соответствующими аналитическими решениями, выполнение нескольких сопоставительных расчетов, учитывающих влияние различных факторов. Цель настоящей работы – аналитический расчет методом Б. Н. Жемочкина и методом конечных разностей (МКР) жесткой стенки, заглубленной в упругое весомое основание, сопоставление и верификация результатов аналитического расчета с результатами расчета, полученными при помощи ПК «Лира 9.6».

В [2] приведены исследование взаимодействия ограждения котлована и грунтового массива в натурных условиях и оценка достоверности современных инженерных и численных методов расчета раскрепленных ограждений котлованов в конкретных инженерно-геологических условиях. Такое сравнение данных экспериментальных исследований с результатами расчетов, проведенных различными методами, показало, что существующие методы расчета ограждений приводят к большому разбросу результатов для напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции ограждения. Расхождение с данными наблюдений по величинам максимальных горизонтальных пере-

мещений ограждающего шпунта составляло от 3 до 17 % для моделей, реализованных при помощи МКЭ. При использовании нормативных методов расчета расхождение с опытными данными оказывалось значительно больше.

В [3] задача взаимодействия анкерных конструкций «стена в грунте» с грунтовым массивом в линейной и нелинейной постановках решена с применением МКЭ. Проведенные расчетные исследования показывают, что начальное напряженное состояние грунта от сил собственного веса имеет большое влияние лишь для определения перемещений сечений стены и боковых давлений грунта. На характер же эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в стене вес грунта не оказывает заметного влияния.

Также по методу конечных элементов рассчитывалась гибкая стенка, погруженная в грунт [4]. При этом основание представлялось в виде невесомой линейно-деформируемой среды. Анализ результатов расчета совместной работы стенки и грунтового основания позволяет сделать вывод, что учет разрыва сплошности среды, т. е. образование щели по контакту стенки и грунта, играет существенную роль. В [5] получено решение аналогичной задачи с учетом собственного веса грунта. Однако в [4, 5] рассматривалась стенка в упругой полуплоскости с прямолинейным контуром. В настоящей статье автор предлагает решение для стенки, находящейся в более общих граничных условиях, – очертание полуплоскости предполагается в виде ломаного контура (рис. 1).

Для расчета жесткой стенки в упругой весовой полуплоскости с ломаным очертанием границ (рис. 1) вначале решим вспомогательную задачу по определению перемещений границы четвертьплоскости, нагруженной силами собственного веса (рис. 2). Эти силы создают в четвертьплоскости гидростатическое напряженное состояние

$$\sigma_y = -\gamma_0 y, \quad (1)$$

где γ_0 – удельный вес грунта; y – координата, отсчитываемая от вершины клина.

Рассмотрим упругий однородный весовой клин с постоянными модулем упругости E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 , в котором действуют начальные напряжения, создаваемые собственным весом γ_0 материала клина. Расчет будем вести методом Ритца [6].

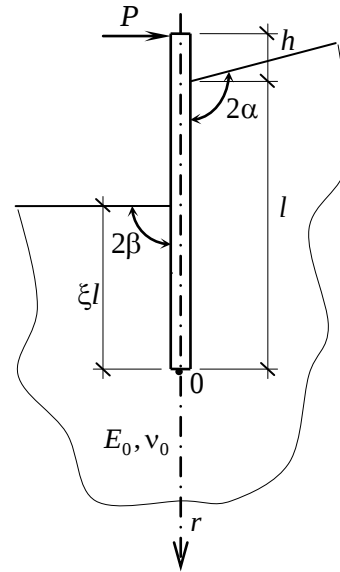


Рис. 1. Жесткая стенка в упругой весовой полуплоскости с ломаным очертанием границ

Fig. 1. Rigid wall in elastic weighty half-plane with broken outline of boundaries

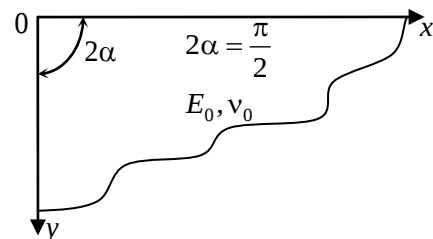


Рис. 2. Четвертьплоскость, нагруженная силами собственного веса

Fig. 2. Quarter-plane loaded by its own weight

Выражение для полной потенциальной энергии клина и действующей внешней нагрузки Ξ складывается из суммы потенциальной энергии деформаций упругой системы U и работы внешних объемных сил Π с обратным знаком [7]

$$\Xi = U - \Pi, \quad (2)$$

где

$$U = \iint_0^\infty \frac{1}{2} [\lambda(\epsilon_x + \epsilon_y)^2 + 2\mu(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2) + 2\mu\gamma_{xy}^2] dx dy; \quad (3)$$

$$\Pi = \gamma_0 \iint_0^\infty v \epsilon_y dx dy,$$

где v – вертикальные перемещения клина.

Удельная потенциальная энергия деформаций рассматриваемой системы [7]

$$U_1 = \frac{1}{2} [\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + 2\mu\gamma_{xy}^2], \quad (4)$$

где

$$G = \frac{(1 - \nu_0^2) l^2}{2E_0}; \quad \lambda = 2\mu \frac{\nu_0}{1 - 2\nu_0}; \quad \mu = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}. \quad (5)$$

Задаемся перемещениями точек упругой четвертьплоскости:

$$u = e^{-\frac{x}{l} - \frac{y}{l}} \left(a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \frac{y}{l} \right); \quad v = G \left(\frac{y}{l} \right)^2 + e^{-\frac{x}{l} - \frac{y}{l}} \left(b_0 + b_1 \frac{x}{l} + b_2 \frac{y}{l} \right), \quad (6)$$

где a_i , b_i – неизвестны постоянные.

Заметим, что при выборе координатных функций необходимо, чтобы строго выполнялись геометрические граничные условия. Удовлетворять же статическим граничным условиям не обязательно. При выборе координатных функций следует стремиться к тому, чтобы первый член ряда наиболее точно отражал характер искомого решения. Один из путей выбора координатных функций состоит в использовании координатных функций родственной и полностью определенной задачи, допускающей точное аналитическое решение. Отправной точкой для задания координатных функций для весомого клина будем считать аналогичную задачу для весомой полуплоскости. Первое слагаемое для v в (6) соответствует решению для упругой полуплоскости.

Для определения неизвестных коэффициентов разложений (6) необходимо найти выражение для полной потенциальной энергии рассматриваемой системы. Запишем выражения для линейных деформаций [6]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

По теореме о минимуме потенциальной энергии деформации [7] искомым решением для перемещений u и v будет такое, при котором коэффициенты перед координатными функциями (6) сообщают минимум выражению (2). Это приводит к необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где $k = \overline{0, 1, 2}$.

Для того чтобы получить выражение полной потенциальной энергии, меняем очередность выполняемых операций: вначале дифференцируем, а затем интегрируем выражение (2). Все математические выкладки осуществляются при помощи программы Wolfram Mathematica 8.

Получаем систему уравнения метода Ритца:

$$\begin{cases} 2(\lambda + 3\mu)a_0 - (\lambda + \mu)a_1 + (\lambda + \mu)a_2 + 2(\lambda + \mu)b_0 + (\lambda - \mu)(b_1 - b_2) - 15Gl = 0; \\ -2(\lambda + \mu)a_0 + 2(\lambda + 3\mu)a_1 - (\lambda + 3\mu)a_2 + 2(-\lambda + \mu)b_0 + (\lambda + \mu)b_2 = 0; \\ 2(\lambda + \mu)a_0 - (\lambda + 3\mu)a_1 + 2(\lambda + 3\mu)a_2 + 2(\lambda - \mu)b_0 + (\lambda + \mu)b_1 - 64Gl = 0; \\ 2(\lambda + \mu)a_0 + (-\lambda + \mu)a_1 + (\lambda - \mu)a_2 + 2(\lambda + 3\mu)b_0 + (\lambda + \mu)(b_1 - b_2) - 8(l^2\gamma_0 + 2G(\lambda + 2\mu)) = 0; \\ (\lambda - \mu)a_0 + (\lambda + \mu)a_2 + 2(\lambda + \mu)b_0 + (\lambda + 3\mu)(2b_1 - b_2) - 16(l^2\gamma_0 + 2G(\lambda + 2\mu)) = 0; \\ -2(\lambda - \mu)a_0 + (\lambda + \mu)a_1 - 2(\lambda + \mu)b_0 - (\lambda + 3\mu)(b_1 - b_2) - 16(l^2\gamma_0 + 2G(\lambda + 2\mu)) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляем (5) в (9) и решаем систему:

$$a_0 = -\frac{l^2 \gamma_0 (30 - 21v_0 - 32v_0^2 + 13v_0^3 - 6v_0^4)}{E_0 (5 - 6v_0 + v_0^2)};$$

$$a_1 = \frac{2l^2 \gamma_0 (-30 + 21v_0 + 24v_0^2 - 25v_0^3 + 2v_0^4)}{E_0 (5 - 6v_0 + v_0^2)};$$

$$a_2 = \frac{2l^2 \gamma_0 (-10 + 7v_0 - 8v_0^2 - 19v_0^3 + 6v_0^4)}{E_0 (5 - 6v_0 + v_0^2)};$$

$$b_0 = -\frac{l^2 \gamma_0 (-50 + 35v_0 + 60v_0^2 - 27v_0^3 - 2v_0^4)}{E_0 (5 - 6v_0 + v_0^2)}; \quad (10)$$

$$b_1 = -\frac{2l^2 \gamma_0 (-50 + 35v_0 + 52v_0^2 - 31v_0^3 + 2v_0^4)}{E_0 (5 - 6v_0 + v_0^2)};$$

$$b_2 = -\frac{2l^2 \gamma_0 (-70 + 49v_0 + 76v_0^2 - 37v_0^3 + 6v_0^4)}{E_0 (5 - 6v_0 + v_0^2)}.$$

Для численного примера возьмем следующие исходные данные:

$$\gamma_0 = 18 \text{ кН/м}^3; \quad E_0 = 20 \text{ МПа}; \quad v_0 = \frac{1}{3}; \quad l = 8 \text{ м}.$$

После вычислений получим:

$$\frac{E_0}{l} a_0 = -11,4857; \quad \frac{E_0}{l} a_1 = -24,5714;$$

$$\frac{E_0}{l} a_2 = -10,6286;$$

$$\frac{E_0}{l} b_0 = 18,9143; \quad \frac{E_0}{l} b_1 = 38,9714; \quad \frac{E_0}{l} b_2 = 53,8286.$$

При этих значениях a_i и b_i ($i = \overline{0, 1, 2}$) абсолютные перемещения грани $x = 0$ показаны на рис. 3, а относительные перемещения — на рис. 4.

Рассмотрим щель в упругой весомой полуплоскости с ломаным, несимметричным очертанием контура (рис. 5), на грань которой действует единичная горизонтальная сила, равномерно распределенная по участку щели. Перемещения границы щели, к которой приложена внешняя нагрузка, определяются как разность перемещений в плоском клине от действия внешней нагрузки, включая собственный вес грунта, и перемещений, вызванных напряжениями на

контакте между клиньями. Перемещения же противоположной незагруженной границы щели определяются только перемещениями от напряжений на контакте между клиньями.

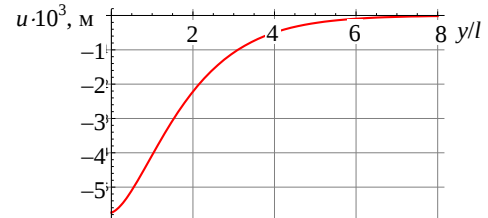


Рис. 3. Абсолютные перемещения грани упругой весомой четвертьплоскости

Fig. 3. Absolute displacements of elastic weighty quarter-plane side

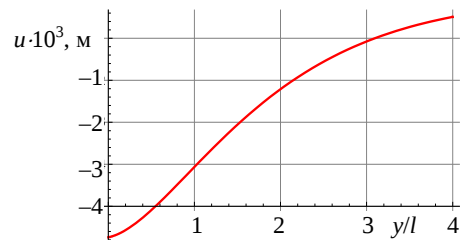


Рис. 4. Относительные перемещения грани упругой весомой четвертьплоскости

Fig. 4. Relative displacements of elastic weighty quarter-plane side

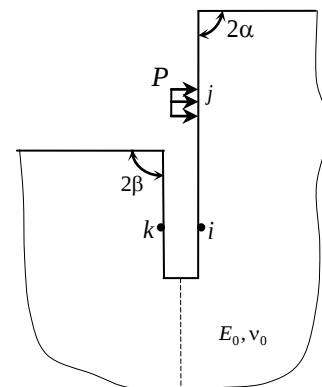


Рис. 5. Щель в упругом основании с ломаным контуром

Fig. 5. Crack in elastic foundation with broken outline

Для определения нормальных и касательных напряжений, возникающих между плоскими клиньями от действия равномерно распределенной нагрузки, нормальной к границе щели (рис. 5), заменяем сплошной контакт между плоскими клиновидными основаниями контактом в отдельных точках, введя связи Б. Н. Же-

мочкина [8]. Расчетная схема для такой задачи изображена на рис. 6.

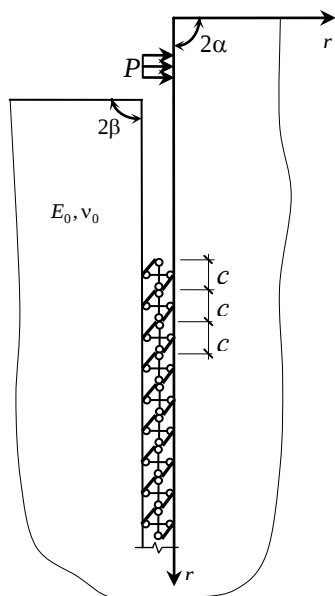


Рис. 6. Расчетная схема щели в упругом основании
Fig. 6. Calculated scheme of cracks in elastic foundation

Таким образом, усилия в связях Жемочкина моделируют нормальные и касательные напряжения, возникающие между плоскими клиньями. Система канонических уравнений для определения усилий в связях Б. Н. Жемочкина для расчетной схемы, изображенной на рис. 6, будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}X_1 + \dots + \delta_{1,m-1}X_{m-1} + \delta_{1,m}X_m + \dots + \\ \quad + \delta_{1,2m}X_{2m} + \Delta_{1,p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{m-1,1}X_1 + \dots + \delta_{m-1,m-1}X_{m-1} + \delta_{m-1,m}X_m + \dots + \\ \quad + \delta_{m-1,2m}X_{2m} + \Delta_{m-1,p} = 0; \\ \delta_{m,1}X_1 + \dots + \delta_{m,m-1}X_{m-1} + \delta_{m,m}X_m + \dots + \\ \quad + \delta_{m,2m}X_{2m} - \Delta_{m,p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{2m,1}X_1 + \dots + \delta_{2m,m-1}X_{m-1} + \delta_{2m,m}X_m + \dots + \\ \quad + \delta_{n,2m}X_{2m} - \Delta_{2m,p} = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

где X_i – усилие в связи Жемочкина с номером i , причем индексы $i = \overline{1, m}$ соответствуют горизонтальным, а индексы $i = \overline{m+1, 2m}$ – вертикальным связям; m – количество учитываемых участков Б. Н. Жемочкина на контакте между

плоскими клиньями; $\delta_{i,j}$ – взаимное перемещение точек i границ двух упругих плоских клиньев от действия единичной силы, равномерно распределенной по участкам j граней клина, в направлении X_j ; $\Delta_{i,p}$ – перемещение точки i границы упругого плоского клина, складывающееся из перемещения Δ_{i,γ_0} , вызванного действием собственного веса грунта, и перемещения $\Delta_{i,p}^0$ от единичной равномерно распределенной внешней нагрузки, приложенной к области щели в основной системе, т. е.

$$\Delta_{i,p} = \Delta_{i,p}^0 + \Delta_{i,\gamma_0}. \quad (12)$$

Перемещения Δ_{i,γ_0} находятся по формулам (6).

Для определения коэффициентов при неизвестных системы (11) используются полученные ранее в [9] уточненные выражения для перемещения в невесомом плоском клине со свободными гранями от действия распределенной нагрузки. Отметим, что эти выражения дают не абсолютные, а относительные величины перемещений. Здесь необходимо сделать замечание о возможности применения принципа независимости действия сил при расчете стенки в упругом весоном основании. При расчете плит на весоной полуплоскости ранее в [10] была обоснована корректность применения принципа независимости действия дополнительных (возмущающих основное напряженное состояние весоной полуплоскости) сил при использовании (2). Справедливость этого принципа для равносжатых стержневых систем в теории устойчивости доказана в [11].

Рассмотрим стенку в грунте, которая находится в условиях плоской деформации (рис. 7). Соотношения между линейными размерами сечения стенки позволяют говорить об одномерной задаче. Также будем считать стенку абсолютно жесткой. Грунтовый массив моделируется линейно упругой средой с постоянными E_0, ν_0 . Удельный вес грунта будем считать постоянным и равным γ_0 . На стенку действует горизонтальная сосредоточенная сила, вызывающая ее перемещение. Необходимо определить напряжения на контакте между

стенкой и грунтом, перемещения и внутренние усилия в сечениях стенки.

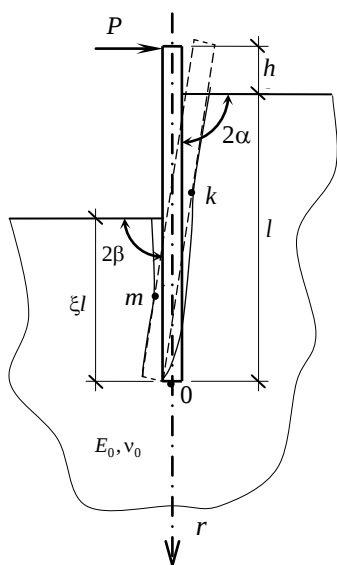


Рис. 7. Горизонтально нагруженная стенка в упругой среде

Fig. 7. Horizontally loaded wall in elastic medium

Будем считать стенку как бы вставленной в образованную в упругой полуплоскости щель (рис. 8). При повороте стенки вследствие невозможности возникновения растягивающих напряжений на контакте стенки и грунта края щели, возникающей в упругой полуплоскости, не будут смыкаться. На рис. 7 показано деформированное состояние стенки в упругой полуплоскости с двумя точками раздела граничных условий. Здесь пунктирной линией отмечено положение стенки после ее поворота, а тонкой – деформированная форма щели.

Указанные предпосылки позволяют перейти к расчету стенки по способу Б. Н. Жемочкина [8]. С этой целью разобьем область контакта между стенкой и упругой средой на участки длиной c и заменим контактом в отдельных точках, введя связи Б. Н. Жемочкина. При этом касательные напряжения в контактной зоне не учитываются. Следовательно, расчетная схема рассматриваемой задачи будет иметь вид, изображенный на рис. 8. Такая расчетная схема соответствует двум точкам нулевых напряжений k и m , или точкам раздела граничных условий. Положения этих точек (границ областей контакта стенки с упругой полуплоскостью) зара-

нее не известны, в чем и состоит сложность поставленной задачи.

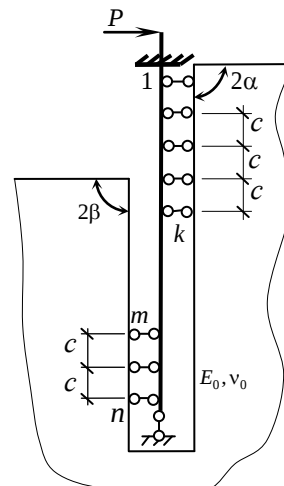


Рис. 8. Расчетная схема стенки в упругой полуплоскости

Fig. 8. Calculated scheme of wall in elastic half-plane

Основная система смешанного метода для расчета стенки с учетом разрыва сплошности основания приведена на рис. 9.

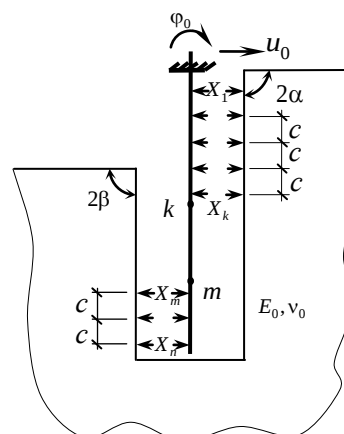


Рис. 9. Основная система смешанного метода для расчета стенки с учетом разрыва сплошности упругого основания

Fig. 9. Main system of mixed method for calculation of wall with due account of elastic foundation discontinuity

В качестве неизвестных берутся усилия во введенных односторонних связях Б. Н. Жемочкина, горизонтальное перемещение u_0 и угол поворота φ_0 вершины стенки на поверхности основания. Система канонических уравнений способа Б. Н. Жемочкина [8] для расчета стенки со свободной вершиной имеет вид:

$$\begin{cases}
 \delta_{1,1}X_1 + \dots + \delta_{1,k}X_k + \delta'_{1,m}X_m + \dots + \delta'_{1,n}X_n + \varphi_0 \frac{c}{2} + u_0 = 0; \\
 \dots \\
 \delta_{k,1}X_1 + \dots + \delta_{k,k}X_k + \delta'_{k,m}X_m + \dots + \delta'_{k,n}X_n + \varphi_0 \frac{2k-1}{2}c + u_0 = 0; \\
 \delta'_{m,1}X_1 + \dots + \delta'_{m,k}X_k + \delta_{m,m}X_m + \dots + \delta_{m,n}X_n - \varphi_0 \frac{2m-1}{2}c - u_0 = 0; \\
 \dots \\
 \delta'_{n,1}X_1 + \dots + \delta'_{n,k}X_k + \delta_{n,m}X_m + \dots + \delta_{n,n}X_n - \varphi_0 \frac{2n-1}{2}c - u_0 = 0; \\
 -\frac{c}{2}X_1 - \dots - \frac{2k-1}{2}cX_k + \frac{2m-1}{2}cX_m + \dots + \frac{2n-1}{2}cX_n = Pa; \\
 -X_1 - \dots - X_k + X_m + \dots + X_n = P,
 \end{cases} \quad (13)$$

где X_i – усилие в связи Жемочкина с номером i ; u_0 – горизонтальное перемещение вершины стержня; φ_0 – угловое перемещение стержня на поверхности упругой среды; c – длина участка Б. Н. Жемочкина; $\delta_{i,j}$ – перемещение точки i стенки от действия равномерно распределенной по участку j единичной нагрузки X_j ($j = \overline{1, k}$); $\delta'_{i,j}$ – перемещение точки i стенки от действия равномерно распределенной по участку j единичной нагрузки X_j ($j = \overline{m, n}$).

Составим итерационный процесс, при котором меняется положение точек раздела граничных условий. При этом не должно происходить перекрытия правой и левой граней щели, очертание эпюры напряжений на контакте стенки и грани клина должно быть наиболее гладким, а напряжения в точках раздела граничных условий равны нулю. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях стенки приведены на рис. 10.

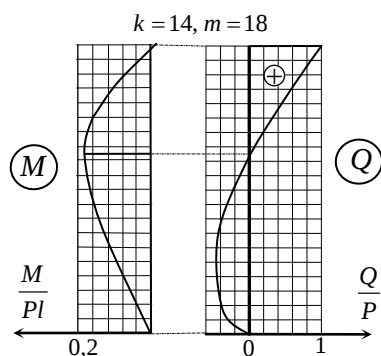


Рис. 10. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов
Fig. 10. Diagrams of shear forces and bending moments

Показатели, полученные при расчете жесткой стенки в случае учета собственного веса грунто-

вого основания и для невесомого упругого основания, сведены в табл. 1.

Таблица 1
Результаты расчета жесткой стенки
Results of rigid wall calculation

Расчет жесткой стенки	$M_{\max},$ кН·м	$\frac{E_0}{1-\nu_0^2}\varphi_0$	$\frac{E_0}{1-\nu_0^2}u_0$	k m
В упругом весомом основании	74,5	81,88	10,54	14 18
В невесомом упругом основании	73,45	209,76	28,28	16 19

Выполним расчет поставленной задачи при помощи МКР для подтверждения полученных ранее результатов. Порядок расчета поставленной задачи при помощи МКР подробно изложен в [12]. Результаты расчета жесткой стенки в случае учета собственного веса грунтового основания и показатели, полученные по методу конечных разностей и по методу Б. Н. Жемочкина, сведены в табл. 2.

Произведем расчет поставленной задачи также при помощи ПК «Лира 9.6» [13]. Расчет выполняли при следующих исходных дан-

ных (рис. 11): $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$; $\xi = 0,5$; $h = 0$; $P = 50$ кН;

$E_0 = 20$ МПа; $\nu_0 = \frac{1}{3}$. Упругая среда заменялась

расчетной областью ломаного контура (рис. 11), ограниченной по сторонам на расстоянии, равном трем длинам стенки [14]. Расчет жесткой стенки на статические нагрузки производили, как расчет плоской системы, состоящей из стержневых элементов и элементов балки-стенки.

Таблица 2

Сравнение результатов расчета для метода конечных разностей и метода Б. Н. Жемочкина

Comparison of calculation results for finite-difference and B. N. Zhemochkin methods

Метод	$M_{\max}$, кН·м	$\sigma_{\max}$, кН/м ²	$\frac{E_0}{1-\nu_0^2} \varphi_0$	$\frac{E_0}{1-\nu_0^2} u_0$
Конечных разностей	77,82	16,92	9,45	78,16
Б. Н. Жемочкина	74,5	17,9	10,54	81,88

При формировании конечно-элементной модели использованы следующие типы конечных элементов (рис. 12).

- Тип 1. Конечный элемент (КЭ) плоской фермы. Моделирует стержни, которыми заменяется контакт между стенкой и основанием.

- Тип 2. КЭ плоской рамы. Моделирует шпунтовую стенку.

- Тип 21. Прямоугольный КЭ плоской задачи (балка-стенка). Моделирует упругое основание.

- Тип 22. Треугольный КЭ плоской задачи (балка-стенка). Моделирует участок основания по граням щели.

Далее производили смену типа конечного элемента: КЭ типа 2 заменяли на КЭ типа 262 (двухузловой конечный элемент, моделирующий одностороннюю упругую связь между узлами [12]). На узлы по краям расчетной области накладывались связи, ограничивающие перемещения по осям Ox и Oz .

Анализ результатов расчета на ПК «Лира 9.6» и сопоставление с результатами расчета по методике автора показали, что в линейной постановке расположение точек нулевых напряжений получается одинаковым.

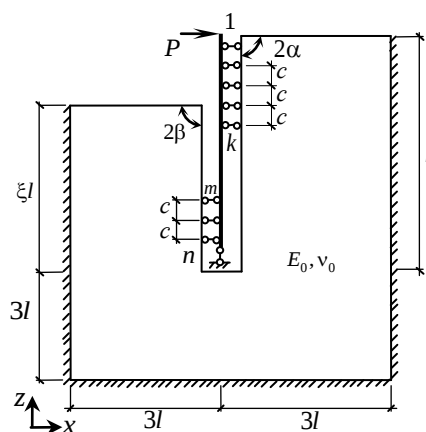


Рис. 11. Расчетная схема стенки в упругом основании

Fig. 11. Calculated scheme of wall in elastic foundation

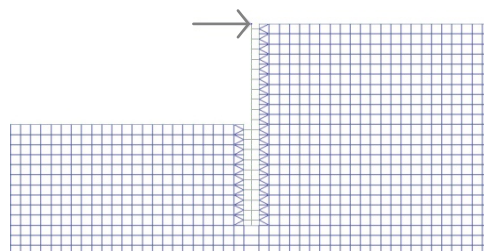


Рис. 12. Расчетная схема для программного комплекса «Лира 9.6» (фрагмент)

Fig. 12. Calculated scheme for "Lira 9.6" software complex (fragment)

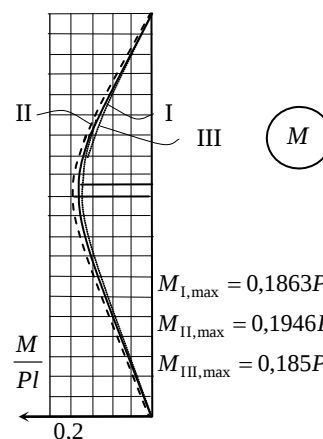


Рис. 13. Эпюра изгибающих моментов в шпунтовой стенке для результатов, полученных: I – по способу Б. Н. Жемочкина; II – по методу конечных разностей; III – при помощи ПК «Лира 9.6»

Fig. 13. Diagram of bending moments in sheet pile wall for results obtained while using: I – B. N. Zhemochkins method; II – finite -difference method; III – "Lira 9.6" software complex

ВЫВОДЫ

1. Перемещения грани упругой весомой четвертьплоскости с достаточной для инженерных расчетов точностью могут определяться по выражениям (6).

2. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях жесткой стенки в ломаной весомой полуплоскости незначительно отличаются от таких же эпюр, построенных для жесткой стенки в упругой невесомой полуплоскости.

3. Результаты расчета для жесткой стенки в упругой весомой полуплоскости, полученные аналитическими методами, качественно согласуются с результатами расчета на ПК «Лира 9.6», реализующего метод конечных элементов. Расхождение по максимальным изгибающим моментам в сечениях стенки составляет не более 5 %.

4. Предложенный подход по расчету жесткой стенки в упругой весомой полуплоскости с ломаным очертанием контура может быть распространен на расчет для гибкой стенки с учетом ее физической нелинейности на основании более ранних разработок автора [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шашкин, К. Г. Метод конечных элементов в геомеханике: современный взгляд / К. Г. Шашкин // Численные методы расчетов в практической геотехнике: сб. статей Междунар. науч.-техн. конф. СПб.: СПбГАСУ, 2012. С. 76–86.
2. Сливец, К. В. Анализ совместной работы стенки и грунтового массива / К. В. Сливец, В. В. Богданов // Геотехника: научные и прикладные аспекты строительства надземных и подземных сооружений: межвуз. тематич. сб. тр. / под ред. Р. А. Мангушева [и др.]. СПб.: СПбГАСУ, 2008. С. 76–80.
3. Флайх Хасан Хасенин. Взаимодействие анкерных конструкций «стена в грунте» с грунтовым массивом / Хасан Хасенин Флайх. М., 2001. 193 с.
4. Лазарева, И. В. Расчет методом конечных элементов гибкой стенки, погруженной в грунт / И. В. Лазарева // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1976. № 2. С. 27–29.
5. Огранович, А. Б. Расчет фундаментной стенки на горизонтальную нагрузку с учетом разрыва сплошности основания / А. Б. Огранович, М. И. Горбунов-Посадов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1966. № 3. С. 11–14.

6. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1975. 576 с.
7. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. М.: Наука, 1970. 939 с.
8. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.
9. Дмитриева, К. В. Перемещения в плоском клине со свободными гранями от действия распределенной нагрузки / К. В. Дмитриева, С. В. Босаков // НИРС-2003: VIII Республ. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов. Минск: БНТУ, 2003. Ч. 4: Архитектура, строительство, транспортные коммуникации, аграрно-технические и аграрно-инженерные науки. С. 66.
10. Босаков, С. В. Расчет плит на весомой полуплоскости / С. В. Босаков // Известия Академии наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. 1997. № 1. С. 108–114.
11. Корноухов, Н. В. Избранные труды по строительной механике / Н. В. Корноухов. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1963. 321 с.
12. Босаков, С. В. Конструктивно-нелинейный расчет горизонтально нагруженной жесткой стенки в упругой среде / С. В. Босаков, К. В. Дмитриева // Строительство и архитектура: материалы XI междунар. науч.-техн. межвуз. семинара «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь», Брест, 25–27 ноября 2004 г. Брест: БрГТУ, 2004. Ч. 1. С. 121–126.
13. Программа «Лира 9.2». Руководство пользователя. Основы / Е. Б. Стрелец-Стрелецкий [и др.]. Киев: Изд-во «Факт», 2005. 140 с.
14. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова. М.: Стройиздат, 1973. 627 с.
15. Дмитриева, К. В. Расчет горизонтально нагруженной физически нелинейной стенки в упругой среде с учетом конструктивной нелинейности / К. В. Дмитриева // Строительная наука и техника. 2006. № 5. С. 31–36.

Поступила 04.07.2016

Подписана в печать 06.09.2016

Опубликована онлайн 29.11.2016

REFERENCES

1. Shashkin K. G. (2012) Finite Elements Method in Geomechanics: Modern Outlook. *Chislennyye Metody Raschetov v Prakticheskoy Geotekhnike: Sb. Statei Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf.* [Numerical Methods for Calculations in Practical Geotechnics: Collected Works of International Scientific-Research Conference]. Saint-Petersburg, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 76–86 (in Russian).
2. Slivets K. V., Bogdanov V. V. (2008) Collaboration Analysis of Wall and Soil Mass. *Geotekhnika: Nauchnye i*

- Prikladnye Aspekty Stroitelstva Nadzemnykh i Podzemnykh Sooruzhenii: Mezhvuz. Temat. Sb. Tr.* [Geotechnics: Scientific and Applied Aspects for Construction of Overhead and Underground Structures. Interuniversity Thematic Collection of Works]. Saint-Petersburg, Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, 76–80 (in Russian).
3. Hasan Hasenin Flayh (2001) *Interaction of Anchor Structures “Wall in the Ground” with Soil Mass*. Moscow. 193 (in Russian).
 4. Lazareva I. V. (1976) Calculation of Flexible Wall Dipped in the Ground While Using Finite Elements Method. *Osnovaniia, Fundamenty i Mekhanika Gruntov* [Basement, Foundation and Soil Mechanics], (2), 27–29 (in Russian).
 5. Ogranovich A. B., Gorbunov-Posadov M. I. (1966) Calculation of Foundation Wall for Horizontal Loading with Due Account of Discontinuity Aperture in Basement. *Osnovaniia, Fundamenty i Mekhanika Gruntov* [Basement, Foundation and Soil Mechanics], (3), 11–14 (in Russian).
 6. Timoshenko S. P., Goodier J. (1975) *Elastic Theory*. Moscow, Nauka. 576 (in Russian).
 7. Lurie A. I. (1970) *Theory of Elasticity*. Moscow, Nauka. 939 (in Russian).
 8. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculation of Beams and Plates on Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroyizdat. 240 (in Russian).
 9. Dmitrieva K. V., Bosakov S. V. (2003) Displacement in Flat Wedge with Free Edges Due to the Action of the Distributed Loading. *NIRS-2003: VIII Respubl. Nauch.-Tekhn. Konf. Studentov i Aspirantov. Ch. 4: Arkhitektura, Stroitelstvo, Transportnye Kommunikatsii, Agrarno-Tekhnicheskie i Agrarno-Inzhenernye Nauki* [NIRS-2003 [Scientific-Research Works of Students]: VIII Republican Scientific-Research Conference of Undergraduate and Postgraduate Students. Part 4: Architecture, Construction, Transport Communication, Agriculture-Technical and Agriculture-Engineering Sciences]. Minsk: BNTU [Belarusian National Technical University], 66 (in Russian).
 10. Bosakov S. V. (1997) Calculations for Plates on Loaded Half-Plane. *Vestsi Akademii Navuk Belarusi. Ser. Fiz.-Tekhn. Nauk.* [Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Series of Physical-Engineering Sciences], (1), 108–114 (in Russian).
 11. Kornoukhov N. V. (1963) *Selected Works on Construction Mechanics*. Kiev, Publishing House of UkSSR [Ukrainian Soviet Socialist Republic] Academy of Sciences. 321 (in Russian).
 12. Bosakov S. V., Dmitrieva K. V. (2004) Design-Nonlinear Calculation of Horizontally Loaded Rigid Wall in Elastic Medium. *Stroitelstvo i Arkhitektura: Mater. XI Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Mezhvuz. Seminara «Perspektivy Razvitiia Novykh Tekhnologii v Stroitelstve i Podgotovke Inzhenernykh Kadrov Respubliki Belarus».* Ch. 1 [Construction and Architecture: Proceedings of XI International Scientific and Technical Inter-University Workshop “Development Prospects of New Technologies in Construction and Training of Engineering Personnel in the Republic of Belarus”. Part 1]. Brest, Brest State Technical University, 121–126 (in Russian).
 13. Strelets-Streletskii E. B., Bogovis V. E., Genzerskii Iu. V., Geraimovich Iu. D., Marchenko D. V., Titok V. P., Gorodetskii A. S. (2005) *Programme “Lira 9.2”. Operating Manual. Fundamentals*. Kiev, Publishing House “Fakt”. 140 (in Russian).
 14. Gorbunov-Posadov M. I., Malikva T. A. (1973) *Calculation of Structures on Elastic Basement*. Moscow, Stroyizdat. 627 (in Russian).
 15. Dmitrieva K. V. (2006) Calculation of Horizontally Loaded and Physically Non-Linear Wall in the Elastic Medium with Due Account of Constructive Nonlinearity. *Stroitel'naya Nauka i Tekhnika* [Construction Science and Equipment], (5), 31–36 (in Russian).

Received: 04.07.2016

Accepted: 06.09.2016

Published online: 29.11.2016