

АСИМПТОТИКА НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ С УПРОЧНЕНИЕМ

Канд. физ.-мат. наук, доц. НИФАГИН В. А.

Белорусский национальный технический университет

Для решения нелинейных задач механики сплошных сред широко применялись варианты метода возмущения, сводящие исходную задачу к итерационной последовательности линейных задач. Так, метод упругих решений [1, 2] использовался для решения задач теории пластичности в рамках деформационной теории малых упругопластических деформаций. В теории течения применялся метод разложения по параметру нагружения [3, 4], редуцирующий физически-нелинейную краевую задачу в неголономной постановке к последовательности связанных линейных задач с фиктивными массовыми силами.

В то же время решения, полученные на основе метода разложения по параметру нагружения, будут обладать существенной погрешностью для малой окрестности сингулярных точек границы области. Это связано с тем, что при данном подходе базовым является линейное решение (первый член разложения). В то время как в окрестности угловой точки главную роль представляет нелинейная часть диаграммы деформирования (кубический член). Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности особой точки предполагает разработку другого варианта метода, где первый член решения получается на основе кубического слагаемого закона деформирования, а остальные члены ряда выступают в качестве поправок к нему. Варианты такого подхода были проиллюстрированы для тел с трещинами при различных определяющих соотношениях теорий пластичности [5] и использовании локальных характеристик совместно с критериями разрушения [6], а также при построении эффективных алгоритмов численного анализа полных решений путем сращения асимптотических полей напряжений вблизи угловой точки и на удалении от нее.

Рассмотрим задачу о вдавливании жесткого полубесконечного штампа в упругопластическую полуплоскость силой P . Трение в области контакта отсутствует. Материал полуплоскости рассматривается при условиях степенного упрочнения, несжимаемости и плоской деформации. Декартову систему координат ξ_i ($i = \overline{1,3}$) отнесем к окрестности угловой точки штампа (ось ξ_1 направлена вдоль границы нижней полуплоскости S , которую занимает среда).

Предположим, что состояние вблизи угловой точки контролируется параметром нагружения K . Последний может иметь смысл коэффициента интенсивности напряжений в упругой области, окружающей малую пластическую зону. Тогда единственным независимым параметром задачи с размерностью длины является величина K^2/G^2 , поэтому искомые функции могут зависеть от нагрузки лишь посредством безразмерных переменных:

$$x_i = \frac{\xi_i G^2}{K^2} \quad (i = \overline{1,2}); \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1},$$

переходя к которым запишем определяющие соотношения теории течения с упрочнением:

$$\delta e_r = \delta s_r + \delta F(T) s_r; \quad \delta e_{r\varphi} = \delta s_{r\varphi} + \delta F(T) s_{r\varphi}. \quad (1)$$

Здесь компоненты тензоров и девиаторов деформаций и напряжений связаны формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij}; \quad e_r + e_\varphi = 0; \quad s_r + s_\varphi = 0; \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi); \\ s_r &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi); \quad s_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

а функция упрочнения имеет вид

$$F(T) = A_3 T^2 = \frac{A_3}{2} (s_r^2 + s_\phi^2 + 2s_{r\phi}^2), \quad A_3 = 2A_2 G^2. \quad (3)$$

где A_2 – постоянная материала, характеризующая нелинейность диаграммы деформирования.

Учитывая представления для приращений напряжений и деформаций, отвечающие увеличению параметра K :

$$\delta e_{ij} = e_{ij,K} \delta K = e_{ij,r} \delta r; \quad \delta s_{ij,K} \delta K = s_{ij,r} \delta r, \quad (4)$$

введем функцию напряжений $\Phi(r, \varphi)$ в виде полного разложения по параметру нагружения в окрестности особой точки, включающего наряду с главной, и правильную часть

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \Psi_k(\varphi) r^{\lambda_k}. \quad (5)$$

Обобщение метода разложения по параметру нагружения заключается в том, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ ($\lambda_{k+1} > \lambda_k > 0$) подлежит определению наряду с функциями $\Psi_k(\varphi)$.

Из соотношений (1)–(5), а также формул, представляющих компоненты напряжений через функцию напряжений, получим:

$$\begin{aligned} s_r &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (\Psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k) \Psi_k) r^{\lambda_k - 2}; \\ s_{r\phi} &= \sum_{k \geq 0} (1 - \lambda_k) \Psi_k' r^{\lambda_k - 2}; \\ F(T) &= \frac{A_3}{4} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} a_{kl} r^{\lambda_k + \lambda_l - 4}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ke} &= \Psi_k'' \Psi_l'' - 2\lambda_l(2 - \lambda_l) \Psi_l \Psi_k'' + 4(1 - \lambda_k)(1 - \lambda_l) \times \\ &\times \Psi_k' \Psi_l' + \lambda_k \lambda_l (2 - \lambda_k)(2 - \lambda_l) \Psi_k \Psi_l. \end{aligned} \quad (7)$$

При отсутствии в теле зон разгрузки из (1) находим

$$\begin{aligned} e_{r,r} &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (\lambda_k - 2) (\Psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k) \Psi_k) r^{\lambda_k - 3} + \\ &+ \frac{A_3}{8} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \alpha_{klm} r^{\lambda_{klm} - 7}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} e_{r\phi,r} &= \sum_{k \geq 0} (1 - \lambda_k) (\lambda_k - 2) \Psi_k' r^{\lambda_k - 3} + \\ &+ \frac{A_3}{4} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{klm} r^{\lambda_{klm} - 7}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{klm} &= (\lambda_k + \lambda_l - 4) (\Psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m) \Psi_m) a_{kl}; \\ \beta_{klm} &= (\lambda_k + \lambda_l - 4) (1 - \lambda_m) \Psi_m' a_{kl}; \\ \mu_{klm} &= \lambda_k + \lambda_l + \lambda_m. \end{aligned}$$

Дифференцируя по r условие совместности деформаций в цилиндрической системе координат и подставляя в него представления (6)–(8), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (2 - \lambda_k) (\Psi_k^{(4)} - (3\lambda_k^2 - 5\lambda_k + 4) \Psi_k'' - \lambda_k^2 (2 - \lambda_k) \Psi_k) \times \\ \times r^{\lambda_k - 3} + \frac{A_3}{4} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} ((\mu_{klm} - 3)(\mu_{klm} - 7) \alpha_{klm} - \\ - \alpha_{klm}' + 4(\mu_{klm} - 5) \beta_{klm}') r^{\mu_{klm} - 7} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что из-за сингулярности напряжений при $r \rightarrow 0$ показатель $\lambda_0 < 3$. Сравнивая первые слагаемые в (9) ($k = l = m = 0$), имеем неравенство

$$\lambda_0 - 3 > \mu_{000} - 7 \quad (\mu_{000} = 3\lambda_0),$$

поэтому в (9) следует требовать выполнения условия

$$\alpha_{000}' - 4(\mu_{000} - 5) \beta_{000}' - (\mu_{000} - 3)(\mu_{000} - 7) \alpha_{000} = 0. \quad (10)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (10) дополним краевыми условиями на свободной поверхности $L''(\varphi = 0)$ полуплоскости. С учетом $\sigma_\phi = \sigma_{r\phi} = 0$ получим граничные условия

$$\Psi_0(0) = 0; \quad \Psi_0'(0) = 0. \quad (11)$$

На участке $L'(\varphi = \pi)$ при отсутствии трения в области контакта

$$\Psi_0'(\pi) = 0. \quad (12)$$

Из условия несжимаемости и кинематических уравнений находим четвертое краевое условие

$$\Psi_0'''(\pi) = 0. \quad (13)$$

Таким образом, однородная граничная задача (10)–(13) является задачей определения собственного значения λ_0 и соответствующей собственной функции нелинейного дифференциального оператора.

Причем значение λ_0 , соответствующее не-тривиальному решению, отыскивается как из энергетических соображений [7], так и путем численного анализа.

Для разрешимости этой задачи должны выполняться дополнительные условия. Из (7) следует, что функции $\alpha_{klm}(\varphi)$, $\beta_{klm}(\varphi)$ зависят от $\Psi_n(\varphi)$ с индексами $\min\{k, l, m\} \leq n \leq \max\{k, l, m\}$.

Тогда для непротиворечивости уравнения (10) необходимо

$$\lambda_0 - 3 = \mu_{100} - 7 (\mu_{100} = \mu_{010} = \mu_{001} = 2\lambda_0 + \lambda_1).$$

Откуда $\lambda_1 = 4 - \lambda_0$. Итак, для $\Psi_1(\varphi)$ имеем вместе с граничными условиями (11)–(13) неоднородную краевую задачу

$$(2 - \lambda_0) \left(\Psi_0^{(4)} - (3\lambda_0^2 - 5\lambda_0 + 4) \Psi_0'' + \lambda_0^2 (2 - \lambda_0) \Psi_0 \right) + \frac{A_3}{4} \sum_{k+l+m=1} ((\mu_{klm} - 3)(\mu_{klm} - 7)\alpha_{klm} - \alpha'_{klm} + 4(\mu_{klm} - 5)\beta'_{klm}).$$

В общем случае для разрешимости уравнения (9) при любом k необходимо удовлетворить равенству

$$\lambda_n - 3 = \mu_{klm} - 7 \quad (k + l + m = n + 1),$$

т. е.

$$\lambda_n = 2n(2 - \lambda_0) + \lambda_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Окончательно вид рекуррентной последовательности краевых задач для отыскания $\Psi_n(\varphi)$ при любом n будет

$$(2 - \lambda_n) \left(\Psi_n^{(4)} - (3\lambda_n^2 - 5\lambda_n + 4) \Psi_n'' + \lambda_n^2 (2 - \lambda_n) \Psi_n \right) - \frac{A_3}{4} \sum_{k+l+m=n+1} (\alpha'_{klm} - 4(\mu_{klm} - 5)\beta'_{klm} - (\mu_{klm} - 3)(\mu_{klm} - 7)\alpha_{klm}) = 0;$$

$$\Psi_n(0) = 0, \quad \Psi_n'(0) = 0;$$

$$\Psi_n'(\pi) = 0, \quad \Psi_n'''(\pi) = 0.$$

Посредством (14) заключаем, что $\lambda_n > 1$ при $n \geq 1$, поэтому в разложениях для s_r и $s_{r\varphi}$ из (6) сингулярными являются лишь первые члены ($n = 0$).

ВЫВОД

Разработка современных математических методов в механике сплошных сред со сложной реологией может служить теоретической основой создания эффективных алгоритмов расчета упругопластических полей напряжений и деформаций для оценки прочности конструктивных изделий, а также использоваться в системах автоматизированного проектирования для задач машиностроения, приборостроения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин, А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. Ильюшин, А. А. Пластичность. Упругопластические деформации. Ч. 1 / А. А. Ильюшин. – М.: Логос, 2004.
3. Ибрагимов, В. А. Деформация упрочняющейся упругопластической плоскости с криволинейным отверстием / В. А. Ибрагимов, В. А. Нифагин // Теоретич. и прикл. механика. – Минск: Вышэйш. шк., 1989. – Вып. 16. – С. 40–55.
4. Ибрагимов, В. А. Контактная задача для упрочняющейся упругопластической полуплоскости / В. А. Ибрагимов, В. А. Нифагин // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. – 1990. – С. 30–34.
5. Ибрагимов, В. А. Об асимптотике напряженного состояния около конца трещины в упруго-пластической среде / В. А. Ибрагимов, Н. Е. Тарасюк // Изд-во АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5.
6. Черепанов, Г. П. О сингулярных решениях в теории упругости / Г. П. Черепанов // Механика твердого деформированного тела. – Л., 1979. – С. 467–479.
7. Черепанов, Г. П. Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике. ПММ / Г. П. Черепанов. – 1977. – Т. 41. – Вып. 3.

Поступила 7.07.2008