

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

Канд. физ.-мат. наук ГАБАСОВА О. Р.

Белорусский национальный технический университет

В последние годы гибридные системы встречаются во многих приложениях [1]. Они привлекают внимание многих исследователей. Данная работа примыкает к [2]. В отличие от них в ней поведение непрерывной и дискретной частей гибридной системы рассматривается в непрерывном времени. Получена формула Коши и обоснован метод сведения задачи оптимального управления к задаче линейного программирования.

Постановка задачи. Пусть $T = [t_*, t^*]$ – промежуток управления, $h_u = h_v / M$, $h_v = (t^* - t_*) / N$ – периоды квантования времени, k, M, N – натуральные числа; $M = kN$, $T_u = \{t_*, t_* + h_u, \dots, t^* - h_u\}$, $T_v = \{t_*, t_* + h_v, \dots, t^* - h_v\}$; $H_x \in R^{m \times n_x}$, $H_y \in R^{m \times n_y}$, $\text{rank}(H_x, H_y) = m < n = n_x + n_y$; $g \in R^m$; $u_*, u^* \in R^{r_u}$; $v_*, v^* \in R^{r_v}$; $c_x \in R^{n_x}$, $c_y \in R^{n_y}$; $x_0 \in R^{n_x}$, $y_0 \in R^{n_y}$; $A_x(t) \in R^{n_x \times n_x}$, $A_{xy}(t) \in R^{n_x \times n_y}$, $B_x(t) \in R^{n_x \times r_u}$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные функции; $A_y(t) \in R^{n_y \times n_y}$, $A_{yx}(t) \in R^{n_y \times n_x}$, $B_y(t) \in R^{n_y \times r_v}$, $t \in T$, – непрерывные функции.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u, v) = c'_x x(t^*) + c'_y y(t^*) \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_x(t)x + A_{xy}(t)y + B_x(t)u; \\ y(t) = A_y(t)y(t - h_v) + A_{yx}(t)x(t) + B_y(t)v(t), t \in T; \end{cases} \quad (2)$$

$$x(t_*) = x_0; y(t) = y_0(t), t \in [t_*, t_* + h_v], y(t_*) = y_0; \quad (3)$$

$$H_x x(t^*) + H_y y(t^*) = g; \quad (4)$$

$$u(t) \in U = \{u \in R^{r_u} : u_* \leq u \leq u^*\}, \quad (5)$$

$$v(t) \in V = \{v \in R^{r_v} : v_* \leq v \leq v^*\}, t \in T.$$

Здесь $x = x(t) \in R^{n_x}$ – состояние непрерывной части системы в момент времени t , $y = y(t) \in R^{n_y}$ – состояние дискретной части системы, $u = u(t) \in R^{r_u}$; $v = v(t) \in R^{r_v}$ – значения управляющих воздействий.

Задачу (1)–(5) будем исследовать в классе дискретных управляющих воздействий $u(t)$, $v(t)$, $t \in T : u(t) = u(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h_u]$, $\tau \in T_u$; $v(t) = v(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h_v]$, $\tau \in T_v$. Каждой паре управляющих воздействий $(u(\cdot) = (u(t), t \in T), v(\cdot) = (v(t), t \in T))$, соответствует единственная траектория $(x(t), y(t), t \in T)$, описываемая непрерывной функцией $x(t)$, $t \in T$, и кусочно-непрерывной функцией $y(t)$, $t \in T$. Пару $(u(\cdot), v(\cdot))$ назовем программой, если на ней выполняются (5) и соответствующая ей траектория системы (2), (3) удовлетворяет ограничениям (4). Программа $(u^0(\cdot), v^0(\cdot))$ называется оптимальной, если она доставляет критерию качества (1) максимальное значение.

Формула Коши. Для решения задачи (1)–(5) сначала построим формулу Коши, выражающую зависимость положения $(x(t), y(t))$ системы (2) от начального состояния (3) и управляющих воздействий (5). Пусть $t \in T$, $T(t) = [t_*, t]$, $(u(s), v(s))$, $s \in T(t)$, – управляющие воздействия, $(x(s), y(s))$, $s \in T(t)$, – соответствующая им траектория системы (2) с начальным условием (3). В силу (2) имеет место тождество

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_x(s)x(s) + A_{xy}(s)y(s) + B_x(s)u(s) \\ A_y(s)y(s-h_v) + A_{yx}(s)x(s) + B_y(s)v(s) \end{pmatrix}, s \in T(t).$$

Умножим обе части тождества на пока неопределенную матричную функцию

$$F(t, s) = \begin{bmatrix} F_x(t, s) \in R^{n_x \times n_x}, & F_{xy}(t, s) \in R^{n_x \times n_y} \\ F_{yx}(t, s) \in R^{n_y \times n_x}, & F_y(t, s) \in R^{n_y \times n_y} \end{bmatrix}, s \in T(t). \quad (6)$$

Проинтегрируем (6) в пределах от t_* до t :

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^t F_x(t, s) \frac{dx(s)}{ds} ds + \int_{t_*}^t F_{xy}(t, s) y(s) ds &= \int_{t_*}^t F_x(t, s) [A_x(s)x(s) + A_{xy}(s)y(s) + B_x(s)u(s)] ds + \\ &+ \int_{t_*}^t F_{yx}(t, s) [A_y(s)y(s-h_v) + A_{yx}(s)x(s) + B_y(s)v(s)] ds; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^t F_{yx}(t, s) \frac{dx(s)}{ds} ds + \int_{t_*}^t F_y(t, s) y(s) ds &= \int_{t_*}^t F_{yx}(t, s) [A_x(s)x(s) + A_{xy}(s)y(s) + B_x(s)u(s)] ds + \\ &+ \int_{t_*}^t F_y(t, s) [A_y(s)y(s-h_v) + A_{yx}(s)x(s) + B_y(s)v(s)] ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуем (7), (8), считая функции $F_x(t, s)$, $F_{yx}(t, s)$, $s \in T(t)$, дифференцируемыми по s :

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^t F_x(t, s) \frac{dx(s)}{ds} ds &= F_x(t, t)x(t) - F_x(t, t_*)x(t_*) - \int_{t_*}^t \frac{\partial F_x(t, s)}{\partial s} x(s) ds; \\ \int_{t_*}^t F_{yx}(t, s) \frac{dx(s)}{ds} ds &= F_{yx}(t, t)x(t) - F_{yx}(t, t_*)x(t_*) - \int_{t_*}^t \frac{\partial F_{yx}(t, s)}{\partial s} x(s) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

После элементарных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^t F_{xy}(t, s) A_y(s) y(s-h_v) ds &= \int_{t_*-h_v}^{t-h_v} F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y(s) ds = \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y_0(t) dt + \\ &+ \int_{t_*}^{t-h_v} F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y(s) ds = [F_{xy}(t, s) = 0, s \in (t, t+h_v)] = \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) \times \\ &\times y_0(t) dt + \int_{t_*}^t F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y(s) ds; \\ \int_{t_*}^t F_y(t, s) A_y(s) y(s-h_v) ds &= \int_{t_*-h_v}^{t-h_v} F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y(s) ds = \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) \bar{y}_0(s) ds + \\ &+ \int_{t_*}^{t-h_v} F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y(s) ds = [F_y(t, s) = 0, s \in (t, t+h_v), F_y(t, t+h_v) = 0; \bar{y}_0(s) = (y_0(s), s \in (t_*-h_v, t_*)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\bar{y}_0(t_*) = y_0)] = \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) \bar{y}_0(s) ds + \int_{t_*}^t F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y(s) ds.$$

Подставим (9), (10) в (7), (8) и запишем результат в виде:

$$\begin{aligned} F_x(t, t) x(t) &= F_x(t, t_*) x(t_*) - F_{xy}(t, t) y(t) + \int_{t_*}^t \left[\frac{\partial F_x(t, s)}{\partial s} + F_x(t, s) A_x(s) + F_{xy}(t, s) A_{yx}(s) \right] x(s) ds + \\ &+ \int_{t_*}^t [F_x(t, s) A_{xy}(s) - F_{xy}(t, s) + F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v)] y(s) ds + \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y_0(s) ds + \\ &+ \int_{t_*}^t [F_x(t, s) B_x(s) u(s) + F_{xy}(t, s) B_y(s) v(s)] ds; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^t (-F_{yx}(t, s) A_{xy}(s) + F_y(t, s) - F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v)) y(s) ds &= -F_{yx}(t, t) x(t_*) + F_{yx}(t, t_*) x(t_*) + \\ &+ \int_{t_*}^t \left[\frac{\partial F_{yx}(t, s)}{\partial s} + F_{yx}(t, s) A_x(s) + F_y(t, s) A_{yx}(s) \right] x(s) ds + \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) \bar{y}_0(s) ds + \\ &+ \int_{t_*}^t [F_{yx}(t, s) B_x(s) u(s) + F_y(t, s) B_y(s) v(s)] ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть функция (5) удовлетворяет соотношениям

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F_x(t, s)}{\partial s} &= -F_x(t, s) A_x(s) - F_{xy}(t, s) A_{yx}(s), s \in [t_*, t]; F_x(t, t) = E; \\ F_{xy}(t, s) &= F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) + F_x(t, s) A_{xy}(s), s \in [t_*, t]; F_{xy}(t, s) = 0, s \in [t, t+h_v]; \\ \frac{\partial F_{xy}(t, s)}{\partial s} &= -F_{xy}(t, s) A_x(s) - F_y(t, s) A_{yx}(s), s \in [t_*, t]; F_{yx}(t, t) = 0; \\ F_y(t, s) &= F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) + F_{yx}(t, s) A_{xy}(s) + E \delta(t, s), s \in [t_*, t]; \\ F_y(t, s) &= 0, s \in (t, t+h_v); F_y(t, t+h_v) = 0, \end{aligned} \right. \quad (13)$$

где $\delta(t, s)$, $s \in T(t)$, — δ -функция Дирака ($\delta(t, s) = 0$, если $s \neq t$).

Тогда соотношения (11), (12) примут вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= F_x(t, t_*) x(t_*) + \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_{xy}(t, s+h_v) A_y(s+h_v) y_0(s) ds + \int_{t_*}^t [F_x(t, s) B_x(s) u(s) + F_{xy}(t, s) B_y(s) v(s)] ds; \\ y(t) &= F_{yx}(t, t_*) x(t_*) + \int_{t_*-h_v}^{t_*} F_y(t, s+h_v) A_y(s+h_v) \bar{y}_0(s) ds + \int_{t_*}^t [F_{yx}(t, s) B_x(s) u(s) + F_y(t, s) B_y(s) v(s)] ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Перейдем к другой, эквивалентной, форме соотношений (13), (14), которая более удобна для вычислений. Сделаем замену независимой

переменной $s = t + t_* - \tau$ и обозначим $\Phi(t, \tau) = F(t, t + t_* - \tau)$. В новых обозначениях соотношения (13) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_x(t, \tau)}{\partial \tau} &= \Phi_x(t, \tau)A_x(t + t_* - \tau) + \Phi_{xy}(t, \tau)A_{yx}(t + t_* - \tau), \tau \in [t_*, t]; \Phi_x(t, t_*) = E; \\ \Phi_{xy}(t, \tau) &= \Phi_{xy}(t, \tau - h_v)A_y(t + t_* - \tau + h_v) + \Phi_x(t, \tau)A_{xy}(t + t_* - \tau), \tau \in T(t); \\ \Phi_{xy}(t, \tau) &= 0, \tau \in [t_* - h_v, t_*];\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{yx}(t, \tau)}{\partial \tau} &= \Phi_{yx}(t, \tau)A_x(t + t_* - \tau) + \Phi_y(t, \tau)A_{yx}(t + t_* - \tau), \tau \in [t_*, t]; \Phi_{yx}(t, t_*) = 0; \\ \Phi_y(t, \tau) &= \Phi_y(t, \tau - h_v)A_y(t + t_* - \tau + h_v) + \Phi_{yx}(t, \tau)A_{xy}(t + t_* - \tau) + E\delta(t, t + t_* - \tau), \tau \in T(t); \\ \Phi_y(t, t_* - h_v) &= 0, \Phi_y(t, \tau) = 0, \tau \in [t_* - h_v, t_*].\end{aligned}\quad (16)$$

Из (16) видно, что значения функции $\Phi_y(t, \tau), \tau \in T(t)$, в точках $\mu \in T_\mu = \{t_*, t_* + h_v, \dots, t_* + \mu^* h_v\}$, $\mu^* = [(t - t_*)/h_v]$ содержит импульсную составляющую $\Phi_y^*(t, \mu)\delta(t, t_* + t - \mu)$. Матричная функция $\Phi_y^*(t, \mu), \mu \in T_\mu$, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\Phi_y^*(t, \mu) &= \Phi_y^*(t, \mu - h_v)A_y(t + t_* - \mu + h_v), \\ \mu \in T_\mu; \Phi_y^*(t, t_*) &= E.\end{aligned}\quad (17)$$

Сужение функции $\Phi_y(t, \tau), t \in T(t)$, на множество $T \setminus T_\mu$ обозначим через $\Phi_y^0(t, \tau), \tau \in T \setminus T_\mu$. Оно удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\Phi_y^0(t, \tau) &= \Phi_y^0(t, \tau - h_v)A_y(t + t_* - \tau + h_v) + \\ &+ \Phi_{yx}(t, \tau)A_{xy}(t + t_* - \tau), \tau \in T \setminus T_\mu,\end{aligned}\quad (18)$$

с начальным условием $\Phi_y^0(t, \tau) = 0, \tau \in [t_* - h_v, t_*]$.

Функция $\Phi_{yx}(t, \tau), \tau \in T(t)$, на промежутках непрерывности является решением уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{yx}(t, \tau)}{\partial \tau} &= \Phi_{yx}(t, \tau)A_x(t + t_* - \tau) + \\ &+ \Phi_y^0(t, \tau)A_{yx}(t + t_* - \tau), \tau \in T(t),\end{aligned}\quad (19)$$

с начальным условием $\Phi_{yx}(t, t_*) = 0$.

В точках $\mu \in T_\mu$ она совершает скачки:

$$\Phi_{yx}(t, \mu + 0) = \Phi_{yx}(t, \mu - 0) + \Phi_y^*(t, \mu)A_{yx}(t + t_* - \mu).$$

В итоге формула Коши (14) примет вид:

$$x(t) = \Phi_x(t, t)x(t_*) + \int_{t_* - h_v}^{t_*} \Phi_{xy}(t, t + t_* - s - h_v) \times$$

$$\begin{aligned}\times A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \int_{t_*}^t [\Phi_x(t, t + t_* - s)B_x(s)u(s) + \\ + \Phi_{xy}(t, t + t_* - s)B_y(s)v(s)]ds;\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}y(s) &= \Phi_{yx}(t, t)x(t_*) + \Phi_y^*(t, t_* + h_v)A_y(t_* + h_v)y_0 + \\ &+ \int_{t_* - h_v}^{t_*} \Phi_y^0(t, t + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \\ &+ \int_{t_*}^t \Phi_y(t, t + t_* - s)B_x(s)u(s)ds + \\ &+ \sum_{\mu=t_*}^{\mu^*} \Phi_y^*(t, \mu)B_y(t + t_* - \mu)v(t + t_* - \mu) + \\ &+ \int_{t_*}^t \Phi_y^0(t, t + t_* - s)B_y(s)v(s)ds.\end{aligned}$$

Опишем процедуру вычисления функций (15)–(19). Учитывая тождество $\Phi_{xy}(t, \tau) = 0, \tau \in T(t)$, решаем однородное уравнение $\partial \Phi_x(t, \tau)/\partial \tau = \Phi_x(t, \tau)A_x(t + t_* - \tau), \tau \in T(t)$ с начальным условием $\Phi_x(t, t_*) = E$ и находим $\Phi_x(t, \tau), \tau \in [t_*, t_* + h_v]$. Затем, подставив найденную функцию $\Phi_x(t, \tau), \tau \in [t_*, t_* + h_v]$, во второе уравнение (15), вычисляем $\Phi_{xy}(t, \tau), \tau \in [t_*, t_* + h_v]$. Повторив описанную процедуру на последующих промежутках, вычислим $\Phi_x(t, \tau), \Phi_{xy}(t, \tau), \tau \in T(t)$.

Из (17) находим $\Phi_y^*(t, \mu), \mu \in T_\mu$. Поскольку $\Phi_y^0(t, \tau) = 0, \tau \in [t_* - h_v, t_*]$, уравнение (19) на промежутке $[t_* - h_v, t_*]$ становится однородным.

Решаем его с начальным условием $\Phi_{yx}(t, t_*) = \Phi_y^*(t, t_*)A_{yx}(t)$. Подставив $\Phi_{yx}(t, \tau)$, $\tau \in [t_*, t_* + h_v]$, в (19), находим $\Phi_y^0(t, \tau)$, $\tau \in [t_*, t_* + h_v]$. Далее подставим $\Phi_y^0(t, \tau)$, $\tau \in [t_*, t_* + h_v]$, в (18), построим функцию $\Phi_{yx}(t, \tau)$, $\tau \in (t_* + h_v, t_* + 2h_v)$, удовлетворяющую уравнению (19) с

начальным условием $\Phi_{yx}(t, t_* + h_v) = \Phi_{yx}(t, t_* + h_v - 0) + \Phi_y^*(t, t_* + h_v)A_{yx}(t - h_v)$. Продолжая процедуру, строим $\Phi_y^0(t, \tau)$, $\Phi_{yx}(t, \tau)$, $\tau \in T \setminus T_\mu$.

Редукция задачи оптимального управления к задаче линейного программирования. Подставим формулу Коши (20) в критерий качества задачи (1)–(5):

$$\begin{aligned} c'_x x(t^*) + c'_y y(t^*) = & c'_x (\Phi_x(t^*, t_*)x(t_*) + \int_{t_* - h_v}^{t_*} \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \\ & + \int_{t_*}^{t^*} \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \int_{t_*}^{t^*} [\Phi_x(t^*, t^* + t_* - s)B_x(s)u(s)ds + \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s) \times \\ & \times B_y(s)v(s)]ds) + c'_y (\Phi_{yx}(t^*, t) x(t_*) + \Phi_y^*(t^*, t_* + h_v)A_y(t_* + h_v)y_0 + \int_{t_* - h_v}^{t_*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s - h_v) \times \\ & \times A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \int_{t_*}^{t^*} \Phi_y(t^*, t^* + t_* - s)B_x(s)u(s)ds + \sum_{\mu=t_*}^{\mu^*} \Phi_y^*(t^*, \mu)B_y(t^* + t_* - \mu)v(t^* + t_* - \mu) - \\ & - \int_{t_*}^{t^*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s)B_y(s)v(s)ds) \end{aligned} \quad (21)$$

и обозначим

$$\begin{aligned} c'_u(\tau) = & \int_{\tau}^{\tau + h_u} (c'_x \Phi_x(t^*, t^* + t_* - s) + c'_y \Phi_y(t^*, t^* + t_* - s))B_x(s)ds, c'_v(\tau) = \\ = & \int_{\tau}^{\tau + h_v} (c'_x \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s) + c'_y \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s))B_y(s)ds. \end{aligned}$$

Тогда критерий качества (21) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in T_u} c'_u u(\tau) + \sum_{\tau \in T_v} c'_v v(\tau) + c'_x \Phi_x(t^*, t) x(t_*) + c'_x \int_{t_* - h_v}^{t_*} \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \\ + c'_y \Phi_{yx}(t^*, t) x(t_*) + c'_y \Phi_y^*(t^*, t_* + h_v)A_y(t_* + h_v)y_0 + c'_y \int_{t_* - h_v}^{t_*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s - h_v)A_y(s + h_v)y_0(s)ds + \\ + \sum_{\mu=t_*}^{\mu^*} c'_y \Phi_y^*(t^*, \mu)B_y(t^* + t_* - \mu)v(t^* + t_* - \mu). \end{aligned} \quad (22)$$

Отбросим в (22) слагаемые, не зависящие от $u(\tau)$, $\tau \in T_u$, $v(\tau)$, $\tau \in T_v$, так как они не влияют на вид оптимальной программы. Тогда критерий качества (1) примет вид

$$\sum_{\tau \in T_u} c'_u u(\tau) + \sum_{\tau \in T_v} c'_v v(\tau) \rightarrow \max.$$

Для терминального ограничения проведем аналогичные преобразования:

$$\begin{aligned}
H_x x(t^*) + H_y y(t^*) = & H_x (\Phi_x(t^*, t_*) x(t_*) + \int_{t_*-h_v}^{t_*} \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v) A_y(s + h_v) y_0(s) ds + \\
& + \int_{t_*}^{t^*} \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v) A_y(s + h_v) y_0(s) ds + \int_{t_*}^{t^*} [\Phi_x(t^*, t^* + t_* - s) B_x(s) u(s) ds + \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s) \times \\
& \times B_y(s) v(s)] ds) + H_y \left(\Phi_{yx}(t^*, t) x(t_*) + \Phi_y^*(t^*, t_* + h_v) A_y(t_* + h_v) y_0 + \int_{t_*-h_v}^{t_*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s - h_v) \times \right. \\
& \times A_y(s + h_v) y_0(s) ds + \int_{t_*}^{t^*} \Phi_y(t^*, t^* + t_* - s) B_x(s) u(s) ds + \sum_{\mu=t_*}^{\mu^*} \Phi_y^*(t^*, \mu) B_y(t^* + t_* - \mu) v(t^* + t_* - \mu) - \\
& \left. - \int_{t_*}^{t^*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s) B_y(s) v(s) ds \right) = g.
\end{aligned}$$

$$\text{Обозначим: } D_u(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+h_u} (H_x \Phi_x(t^*, t^* + t_* - s) + H_y \Phi_y(t^*, t^* + t_* - s)) B_x(s) ds;$$

$$\begin{aligned}
D_v(\tau) = & \int_{\tau}^{\tau+h_v} (H_x \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s) + H_y \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s)) B_y(s) ds, \tilde{g} = g - (H_x \Phi_x(t^*, t) x(t_*) + \\
& + \int_{t_*-h_v}^{t_*} H_x \Phi_{xy}(t^*, t^* + t_* - s - h_v) A_y(s + h_v) y_0(s) ds + H_y \Phi_{yx}(t^*, t) x(t_*) + H_y \Phi_y^*(t^*, t_* + h_v) A_y(t_* + h_v) y_0 + \\
& + \int_{t_*-h_v}^{t_*} \Phi_y^0(t^*, t^* + t_* - s - h_v) A_y(s + h_v) y_0(s) ds + \sum_{\mu=t_*}^{\mu^*} H_y \Phi_y^*(t^*, \mu) B_y(t^* + t_* - \mu) v(t^* + t_* - \mu)).
\end{aligned}$$

Тогда терминальное ограничение (4) примет вид $\sum_{\tau \in T_u} D_u(\tau) u(\tau) + \sum_{\tau \in T_v} D_v(\tau) v(\tau) = \tilde{g}$. Значит, задача оптимального управления (1)–(5) эквивалентна задаче линейного программирования:

$$\sum_{\tau \in T_u} c'_u u(\tau) + \sum_{\tau \in T_v} c'_v v(\tau) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{\tau \in T_u} D_u(\tau) u(\tau) + \sum_{\tau \in T_v} D_v(\tau) v(\tau) = \tilde{g};$$

$$u_* \leq u(t) \leq u^*, t \in T_u; v_* \leq v(t) \leq v^*, t \in T_v.$$

Поэтому оптимальную программу можно вычислить с помощью любого метода линейного программирования [3].

ВЫВОД

Получена формула Коши для одного типа гибридных систем, которая используется для вычисления оптимальных программ в линейной терминальной задаче оптимального управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brockett, R. W.** Hybrid models for motion of control systems/ R. W. Brockett // In Essays on Control: Perspectives in the Theory and Applications. H. L. Trentelman [et al.]. – Birkhauser, 1993. – P. 29–53.
2. **Габасова, О.Р.** Оптимизация линейных гибридных систем управления / О. Р. Габасова // Вестник БНТУ. – 2007. – № 2. – С. 71–75.
3. **Табак, Д.** Оптимальное управление и математическое программирование / Д. Табак, Б. Куо. – М.: Наука, 1975. – 279 с.

Поступила 12.12.2007