

УДК 624.04

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В., инж. ЩЕТЬКО Н. С.

*Белорусский национальный технический университет,
РУП «Институт БелНИИС»*

В прошлом веке были досконально исследованы многие вопросы линейной динамики элементов строительных конструкций, в том числе и задачи линейных колебаний стержней и балок [1–4]. Однако эти исследования, несмотря на богатство в содержании, зачастую весьма ограничены в возможностях качественного изучения нелинейных систем.

Строительные конструкции являются во многом нелинейными системами. Это обстоятельство указывает на необходимость выполнения нелинейного анализа, отправной точкой для которого могут быть решения, полученные в рамках линейной теории.

Нелинейным системам свойственны некоторые общие отличительные особенности, такие как: неизохронность свободных колебаний, неоднозначность зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты гармонической вынуждающей силы, возможность существования автоколебательных режимов, реализация которых зависит от начальных условий [5–7]. Эти явления имеют место при практических расчетах, а также в работе реальных конструкций и не могут быть объяснены в рамках линейной теории.

Вовлечение нелинейностей в модели конструкций позволяет более точно проанализировать систему, запроектировать конструкцию либо оценить работу существующих конструкций и систем.

Традиционно принято ограничивать учет нелинейностей в динамике элементов строительных конструкций рассмотрением так называемой геометрической нелинейности протяженных конструкций. На это ориентированы

и программные комплексы, используемые для расчетов зданий и сооружений [8–11]. В отечественной и зарубежной литературе вопросы учета физической нелинейности строительных конструкций, подверженных динамическим воздействиям, не освещены в должной мере.

Задачи физически нелинейной динамики конструкций, рассмотренные в других областях науки [12, 13], не могут быть полностью приемлемы для расчетов строительных конструкций, но могут быть полезными при выборе направления и методов исследований и позволить уточнить известные решения с учетом нелинейных свойств, присущих строительным конструкциям. Отмеченное направление, по мнению авторов, может представлять определенный теоретический и практический интерес.

В качестве объектов исследования выбраны однопролетные балочные конструкции. Материал – один из основных конструкционных традиционно применяющихся в строительстве: металл, железобетон, древесина.

Балка является одним из основных конструктивных элементов, способным обеспечить адекватное моделирование многих объектов, таких как колонны, ригели, здания, мосты.

Важной задачей прикладной теории нелинейных колебаний является задача определения начальных условий, при которых система будет совершать устойчивые колебания. В случае превышения найденных величин эти же условия будут являться условиями неограниченного роста (срыва) амплитуд [14]. Цель настоящих исследований – определение особенностей нелинейных колебаний, обусловленных физической нелинейностью материала конструкций,

а именно: начальной энергии системы, необходимой для существования устойчивых свободных нелинейных колебаний балок, зависимости периода от начальной энергии однопролетных балок из металла, железобетона, древесины при характерных условиях опирания, а также определение степени влияния нелинейности на характеристики колебаний.

Для описания работы элементов изгибаемых конструкций актуально применение уравнений, содержащих мягкую упругую силу, что соответствует известному в практике понижению жесткости конструкции с ростом деформаций.

При решении уравнений с мягкой нелинейностью, описывающих колебания балок [15–18], авторами отмечена чувствительность решения к начальным условиям, что выразилось в резком неограниченном росте амплитуд в определенных интервалах изменения начальных условий даже при незначительных вариациях последних. Эти явления объясняются наличием нелинейных членов в разрешающем уравнении и отмечены рядом исследователей вопросов теории нелинейных колебаний [6, 19].

Устойчивость нелинейных колебаний однопролетных балок. При анализе поведения нелинейных колебательных систем удобно воспользоваться фазовыми диаграммами (плоскостями), объединяющими совокупность фазовых траекторий, отражающих состояние автономной системы, определяемой обобщенными координатами и обобщенными скоростями, т. е. $f(y, \dot{y})$. Опираясь на понятие фазовой плоскости, можно получить важные заключения относительно качественного характера движения [20].

Как уже отмечено в [15, 16], задачи нелинейной (с учетом физической нелинейности материала) динамики строительных конструкций с одной степенью свободы сводятся к решению уравнения Дюффинга с мягкой нелинейностью. Данное уравнение более точно описывает процессы деформирования, происходящие в системе, чем используемые в настоящее время линейные модели [1, 2].

Уравнение имеет следующий вид [18]:

$$M \ddot{y} + ry - \nu y^3 = 0. \quad (1)$$

Либо после преобразования

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - \alpha^2 y^3 = 0, \quad (2)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r}{M}}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\nu}{M}}.$$

Интеграл энергии уравнения (1) имеет вид [21]

$$\frac{1}{2} \dot{y}^2 + U = C, \quad (3)$$

где U – потенциальная энергия; C – полная энергия системы.

В (1) $ry - \nu y^3 = R(y)$ – восстанавливающая упругая сила. Ее работа определяет количество потенциальной энергии системы

$$U = \frac{ry^2}{2} + \frac{\nu y^4}{4}. \quad (4)$$

Тогда из выражения (3) определяем y как

$$y = \pm \sqrt{2(C - U)}. \quad (5)$$

Схемы графиков изменения U от y и \dot{y} от y представлены на рис. 1. Отметим, что график зависимости \dot{y} от y подобен фазовому портрету и отражает фазовые траектории, соответствующие предельно допустимым значениям начальных условий.

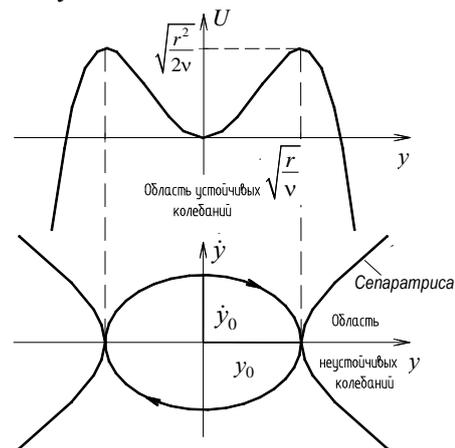


Рис. 1. Схема зависимости энергии системы от начального отклонения и эллипс «критических» значений начальных условий, вызывающих нелинейные колебания одиночной массы с нарастающей амплитудой

Сепаратриса отделяет область начальных условий, которым соответствуют периодиче-

ские движения, от области начальных условий, которым соответствуют неограниченные движения.

Уравнение эллипса экстремальных значений начальных условий в нашем случае имеет вид

$$\frac{\dot{y}_0^2}{y_0^2} + \frac{y_0^2}{y_0^2} = 1. \quad (6)$$

Критическое значение начальная потенциальная энергия приобретает при начальном отклонении

$$y_0 = \sqrt{\frac{r}{v}}. \quad (7)$$

Критическое значение начальной скорости консервативной системы $\dot{y}_0 = \sqrt{\frac{r^2}{Mv}}$ находим из условия

$$\frac{M\dot{y}_0^2}{2} = U_{\max}. \quad (8)$$

Точка с координатами $\left(\sqrt{\frac{r}{v}}, \frac{r^2}{2v}\right)$ на графике зависимости U от y получила название вершины энергетического барьера.

Для иллюстрации приведенных рассуждений рассмотрим шестиметровую однопролетную балку из основных конструктивных материалов – металла, железобетона, древесины.

Закон деформирования материала балки представим в виде

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma^2} \varepsilon^3, \quad (9)$$

где σ – предел прочности; E – начальный модуль упругости материала балки.

Размеры сечений и характеристики материалов:

1. Металлическая двутавровая балка 30Б2: с $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\sigma = 4 \cdot 10^8$ Па.

2. Железобетонная балка прямоугольного поперечного сечения.

Примем допущение, что рабочее армирование балки симметричное, т. е. жесткость в противоположных направлениях вертикальной плоскости одинакова. Это позволит избежать

расчетных сложностей, вызванных особенностями нелинейных колебаний железобетонных изгибаемых конструкций (часть из которых обозначена в (4)), проследить некоторые общие закономерности и сделать соответствующие выводы. Для железобетонной балки приняты следующие характеристики: $E = 3,5 \cdot 10^{10}$ Па; $\sigma = 2 \cdot 10^7$ Па; $b = 0,5$ м; $h = 0,22$ м.

3. Балка из деревянного бруса квадратного поперечного сечения: $E = 1,1 \cdot 10^{10}$ Па; $\sigma = 9 \cdot 10^6$ Па; $b = 0,36$ м; $h = 0,36$ м.

В качестве начальных условий примем отклонение $y_0 = 0,02$ м и скорость $v_0 = 0,1$ м/с. Для всех балок распределенная масса приведена к сосредоточенной, обозначенной как M .

Размеры сечений обеспечивают равное значение начальной изгибной жесткости каждой из трех балок на уровне $B = 1,5410^7$ Н·м².

Проанализируем три характерных типа опирания балки (рис. 2).

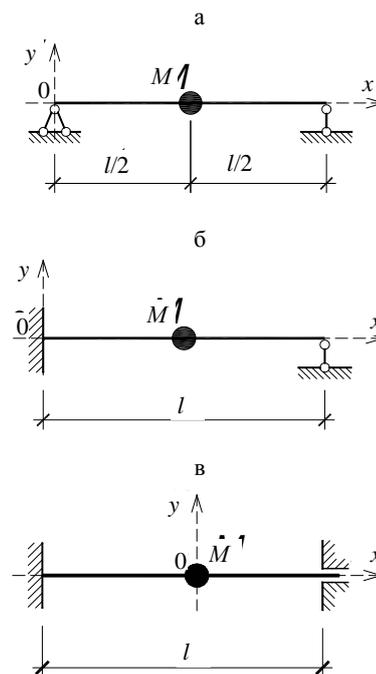


Рис. 2. Три типа опирания однопролетной балки с одной степенью свободы

Уравнения движения составляются с использованием принципа Даламбера. Задачи решаются энергетическими методами. После нахождения потенциальной энергии изгиба балки на основании теоремы Кастилиано [2] определяется нелинейная сила упругости. Ход решения подробно освещен в [15–18, 22].

В качестве координатных функций используются фундаментальные балочные функции [18, 23], удовлетворяющие всем граничным условиям. Предварительно ограничимся рассмотрением изгибной формы колебаний.

Графическое отображение полученных решений представлено на рис. 3.

Полученные значения параметров r и v сведены в табл. 1.

Из представленных данных (рис. 3, табл. 1) следует, что при повышении общей вертикальной жесткости балок, обусловленной условиями закрепления (при переходе от свободного опирания к защемлению), прослеживается тенденция снижения значений начальных «критических» условий. Это соответствует меньшему

количеству потенциальной энергии и скорейшему преодолению энергетического барьера, что легко проследить по графикам зависимости U от y .

Для металлической балки область предельно допустимых значений начальных условий находится за пределами допустимых по жесткости и условиям нормальной эксплуатации [24, 25]. Высота энергетического барьера металлической балки значительно превышает величину, полученную для железобетонной балки и балки из деревянного бруса, что можно объяснить большим значением погонной жесткости двутавровой балки по сравнению с двумя другими.

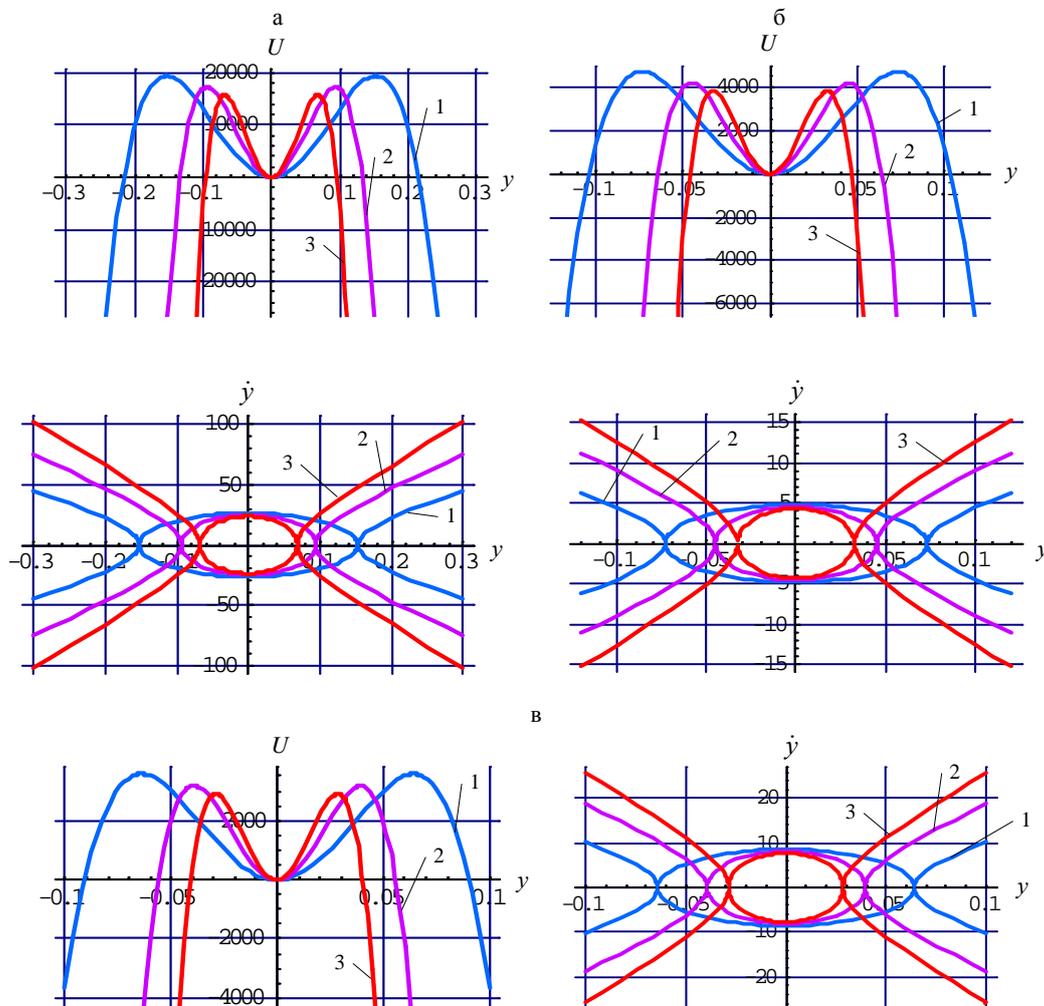


Рис. 3. Графики зависимостей потенциальной энергии однопролетной балки от начального отклонения и эллипс критических значений начальных условий, вызывающих нелинейные колебания одиночной массы с нарастающей амплитудой: а – металлическая балка; б – железобетонная балка; в – балка из деревянного бруса; 1 – показано решение для свободно опертой балки; 2 – то же для опертой с одной и защемленной с другой стороны; 3 – для защемленной балки

Таблица 1

Параметры нелинейных колебаний балок с одной степенью свободы

Тип опирания (рис. 2)	а	б	в
Металлическая балка. Двухтавровое поперечное сечение 30Б2			
$r, 1/c^2$	$3,32E + 06$	$7,77E + 06$	$1,35E + 07$
$\nu, 1/(m^2 \cdot c^2)$	$1,43E + 08$	$8,80E + 08$	$2,93E + 09$
Железобетонная балка. Прямоугольное поперечное сечение 0,22×0,5 м			
$r, 1/c^2$	$3,50E + 06$	$8,19E + 06$	$1,43E + 07$
$\nu, 1/(m^2 \cdot c^2)$	$6,50E + 08$	$4,00E + 09$	$1,33E + 10$
Балка из деревянного бруса. Квадратное поперечное сечение 0,36×0,36 м			
$r, 1/c^2$	$3,47E + 06$	$8,12E + 06$	$1,41E + 07$
$\nu, 1/(m^2 \cdot c^2)$	$8,42E + 08$	$5,18E + 09$	$1,73E + 10$

Для железобетонной балки и балки из деревянного бруса значения погонной жесткости отличаются не более чем на 15 %, что подтверждается графиками б и в рис. 3. Завышенное (на 45 %) значение «критической» скорости балки из деревянного бруса по сравнению с железобетонной балкой является следствием различий в массовых характеристиках материалов.

В численных экспериментах обнаружено также (рис. 4), что с ростом начальных условий, а, следовательно, и напряжений в конструкции возрастает вклад нелинейной составляющей (9) в разрешающем уравнении (1) в колебания балок. Это, в свою очередь, приво-

дит к увеличению погрешности линейного решения.

На основании полученных зависимостей проанализируем влияние количества начальной энергии системы, определяемое начальными условиями, на период свободных нелинейных колебаний однопролетных балок.

Зависимость периода свободных колебаний от начальной энергии системы. Выражение начальной энергии уравнения Дюффинга (1) в безразмерном виде имеет следующий вид:

$$e = \frac{v_0}{r} \sqrt{\nu M}. \quad (10)$$

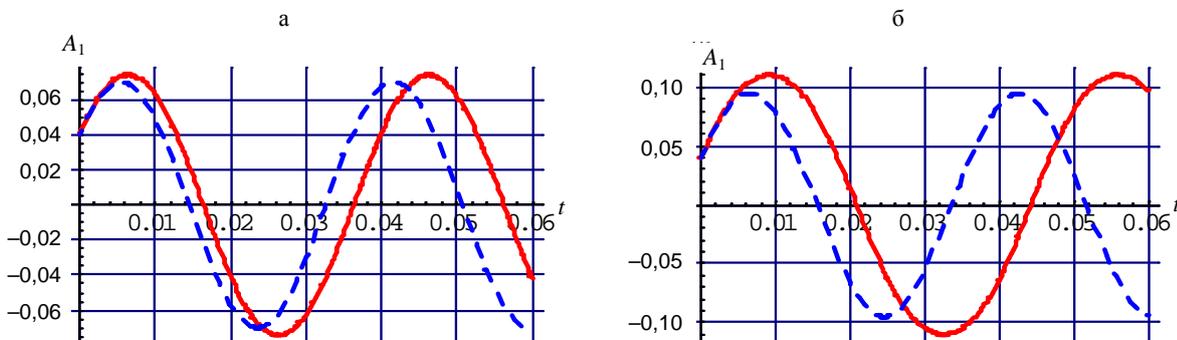


Рис. 4. Свободные колебания (металлической свободно опертой) балки: сплошной линией показаны нелинейные колебания, пунктирной – линейные; а – $y_0 = 0,044$ м, $v_0 = 10$ м/с; б – $0,04$ м, 15 м/с

По данным [5], период собственных колебаний уравнения (1) определяется выражением

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2e^2}}} K\left(\frac{e\sqrt{2}}{1+\sqrt{1-2e^2}}\right), \quad (11)$$

где $K(m)$ – полный эллиптический интеграл [26].

Формула (11) отражает такое свойство нелинейных колебательных систем, как неизохронность.

Согласно (11) переход к аperiodическому движению произойдет, когда $T = \infty$ или

$$\frac{e\sqrt{2}}{1+\sqrt{1-2e^2}} = 1, \text{ так как } K(1) = \ln \infty.$$

После ряда преобразований находим корни аргумента полного эллиптического интеграла $K(m)$:

$$e(4e - 2\sqrt{2}) = 0; \quad e_1 = 0; \quad e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (12)$$

Тогда

$$\frac{v_0}{r} \sqrt{vM} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (13)$$

На рис. 5 представлен график зависимости безразмерного периода колебаний металлической свободно опертой балки от безразмерной энергии. Нулевому значению энергии соответствует величина периода 2π . Максимальное значение энергии – $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

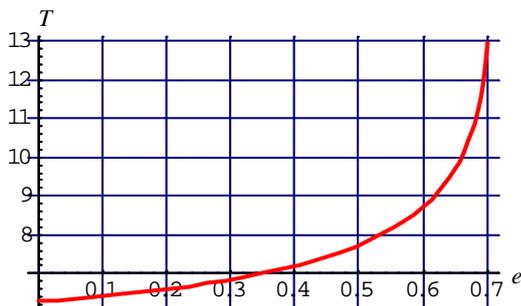


Рис. 5. График зависимости $T - e$ для собственных колебаний металлической свободно опертой балки

Выражение (13) описывает движение по сепаратрисе. Отметим, что (11) не очень удобная формула, так как учитывает только влияние $v_0 -$

начальной скорости отклонения, однако может быть полезна при решении определенного класса задач.

Известно также следующее решение для периода свободных колебаний [27]:

$$T(C) = \sqrt{2M} \int_{-y(C)}^{y(C)} \frac{dy}{\sqrt{C-U(y)}}. \quad (14)$$

Зависимость (14) определена через значения начальных отклонений, но не учитывает скорость.

В [18] авторами получены точные решения уравнения (1) для периода

$$T = \frac{4\sqrt{2}K(m)}{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}} \quad (15)$$

и амплитуды

$$A = \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}, \quad (16)$$

где $m = \frac{\omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}$, в которых учитыва-

ются значения обоих параметров, определяющих начальные условия и благодаря чему, по мнению авторов, их можно признать более корректными по сравнению с известными. Решения выражены через эллиптические функции. В выражениях (15), (16) введен коэффициент C_1 , который определяется с учетом коэффициента C_2 при заданных начальных условиях решением системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}} \operatorname{Sn}(u(0), m) = Z_0; \\ \sqrt{C_1} \operatorname{Cn}(u(0), m) \operatorname{Dn}(u(0), m) = v_0. \end{cases} \quad (17)$$

Коэффициент C_2 представлен в качестве множителя при величине U эллиптических функций Якоби [26] $\operatorname{Cn}(u, m)$, $\operatorname{Dn}(u, m)$ системы (17).

Начальные приближения для коэффициентов определяются как:

$$C_1 = Z_0^2 \left(\omega_0^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 Z_0^2 \right);$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \frac{4\sqrt{2}K(m)}{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}} \quad (18)$$

и уточняются решением системы (17).

Для графиков, представленных на рис. 4, по формулам (15)–(18) определены следующие значения:

а) $C_1 = 146,726351 \text{ м}^2/\text{с}^2$; $C_2 = 0,003511 \text{ с}$;
 $T = 0,039876 \text{ с}$; $A = 0,074178 \text{ м}$;

б) $C_1 = 271,726351 \text{ м}^2/\text{с}^2$; $C_2 = 0,002503 \text{ с}$;
 $T = 0,046769 \text{ с}$; $A = 0,110312 \text{ м}$.

Значение периода линейных колебаний для анализируемой системы составляет $T = 0,036129 \text{ с}$.

Погрешность вычисления относительно линейного решения для периода составляет от 9 % (для варианта а) до 23 % (для варианта б).

Все исследования проведены с использованием средств символьной математики и компьютерной алгебры Mathematica, Maple [20, 29], благодаря чему получены точные решения обозначенных выше задач.

Вклад нелинейности при рассмотрении свободных колебаний балок как консервативных систем повышается по мере увеличения значений начальных условий, что соответствует большим значениям напряжений в конструкции и, как следствие, росту погрешности линейного решения.

Факт снижения жесткости по мере роста напряжений в материале конструкции является известным в механике (статике) строительных конструкций, и полученные закономерности для колебаний балок имеют логическое объяснение.

Деградация жесткости конструкции может являться следствием не только нелинейности поведения материала под нагрузкой, но также деструктивных процессов, свойственных каждому из материалов: коррозии металла, гниения древесины, трещинообразования в растянутой зоне и дробления сжатой зоны железобетона.

На обозначенных свойствах нелинейных колебаний основаны получившие в последнее время широкое распространение методы диагностики конструкций [30], базирующиеся на анализе изменения колебаний конструкций.

Полученные авторами данные могут быть использованы и учтены при проектировании новых конструкций, а также для оценки динамических параметров и технического состояния существующих строительных конструкций зданий и сооружений.

Приведенные в настоящей работе решения справедливы для консервативных систем. Для более подробных практических расчетов элементов строительных конструкций необходимо учесть диссипативные свойства материалов, для чего полезно воспользоваться результатами, приведенными в [16].

ВЫВОДЫ

1. Построены графики начальных условий, определяющих область устойчивых нелинейных колебаний балок с одной степенью свободы с различными опорными закреплениями для характерных конструкционных материалов.

2. Определены значение количества начальной энергии, необходимого для существования устойчивых колебаний, а также зависимость безразмерного периода от величины безразмерной энергии балки.

3. Получены точные значения амплитуды и периода нелинейных колебаний с учетом двух параметров начальных условий по предложенным авторами формулам.

4. Получены новые сведения о качественном характере колебаний элементов строительных конструкций, и представлена количественная оценка влияния нелинейности на колебательный процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев, В. А. Строительная механика: спец. курс «Динамика и устойчивость сооружений» / В. А. Киселев. – М.: Мир, 1980. – 548 с.
2. Ржаницын, А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1991. – 438 с.
3. Справочник по динамике сооружений / под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
4. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

6. **Найфэ, А.** Методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
7. **Пановко, Я. Г.** Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 255 с.
8. **Вычислительный** комплекс SCAD / В. С. Карпиловский [и др.]. – М.: АСВ, 2004. – 529 с.
9. **Программный** комплекс для расчета строительных конструкций на прочность, устойчивость и колебания STARK ES. Версия 4.2 (2006). Руководство пользователя. – М.: Еврософт, 2006. – 383 с.
10. **Симбиркин, В. Н.** Статический и динамический расчет железобетонных монолитных каркасов зданий с помощью программного комплекса STARK ES: учеб. пособие / В. Н. Симбиркин, С. О. Курнавина; под ред. Ю. П. Назарова. – М.: ФГУП «НИЦ “Строительство”», ООО «Еврософт», 2007. – 158 с.
11. **Moaveni, S.** Finite Element Analysis: Theory and Application With ANSYS Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999. – Mode of access: <http://www.proquest.com/> – Date of access: 2.08.2007.
12. **Kuiyin, Mei.** Nonlinear vibration of beam structures: analytical and explicit dynamics FEA evaluations // A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Kentucky, 2000. – Mode of access: <http://www.proquest.com/> – Date of access: 15.09.2007.
13. **Mahmood, M. Tabaddor.** Nonlinear vibration of beam and multibeam systems // Dissertation submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Engineering Mechanics, Sept. 24, 1996. – Mode of access: <http://www.proquest.com/> – Date of access: 4.12.2007.
14. **Вибрации** в технике: справ. в 6 т. / ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1979 – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / под ред. И. И. Блехмана. – М., 1979. – 351 с.
15. **Босаков, С. В.** К теории свободных колебаний балок из физически нелинейного материала / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БНТУ. – 2006. – № 1. – С. 10–14.
16. **Босаков, С. В.** Исследование свободных затухающих колебаний балок из физически нелинейного материала // С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БНТУ. – 2006. – № 1. – С. 134–138.
17. **Босаков, С. В.** Об одном свойстве зависимости «момент – кривизна» для балок и его использовании в инженерных расчетах // С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Строительная наука и техника. – 2006. – № 1. – С. 58–61.
18. **Босаков, С. В.** К теории нелинейных колебаний балок с одной степенью свободы / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БНТУ. – 2007. – № 3. – С. 5–9.
19. **Бидерман, В. Л.** Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
20. **David, Charles Hill.** Time delayed dynamical systems and the Duffing Equation. A dissertation submitted to the faculty of the university of North Carolina at Charlotte in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Applied Mathematics. Charlotte 2005. – Mode of access: <http://www.proquest.com/> – Date of access: 6.02.2008.
21. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 6-е изд. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
22. **Босаков, С. В.** Метод Рунге в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости / С. В. Босаков. – Минск: БГПА, 2000. – 144 с.
23. **Фаддеева, В. Н.** О фундаментальных функциях оператора x^{IV} / В. Н. Фаддеева // Труды математического института имени В. А. Стеклова. – 1949. – Т. XXVIII. – С. 157–159.
24. **Нагрузки** и воздействия: СНиП 2.01.07–85* / Минстрой России. – М.: ГИ ЦПП, 1996. – 44 с.
25. **ASCE STANDART/SEI 7 – 05.** Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures. USA, 2006. – Mode of access: <http://www.proquest.com/> – Date of access: 26.11.2007.
26. **Ленг, С.** Эллиптические функции / С. Ленг; пер. с англ. – М.: Наука, 1984. – 312 с.
27. **Ландау, Л. Д.** Серия «Теоретическая физика». Т. 1 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. – М., 1973. – 208 с.
28. **Гандер, В.** Решение задач в научных вычислениях с применением Maple и MATLAB / В. Гандер, И. Гржебичек. – М.: Вассамедиа, 2005. – 520 с.
29. **Кулешов, А. А.** Уравнения математической физики в системе Mathematica / А. А. Кулешов. – Минск: БГУ, 2004. – 294 с.
30. **Maeck, J.** Damage Assessment of Civil Engineering Structures by Vibration Monitoring. Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering, K. U. Leuven, Belgium, 2003. – Mode of access: <http://www.proquest.com/> – Date of access: 19.06.2007.

Поступила 3.03.2008