

КОРНЕВОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПАРАМЕТРОМ

Канд. техн. наук, доц. *НЕСЕНЧУК А. А.*

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

При проектировании систем автоматического управления (САУ) всегда встает проблема создания такой ее конструкции, которая наилучшим образом обеспечивала бы робастную устойчивость [1] и требуемые показатели качества. Поддержка определенного запаса устойчивости САУ в условиях изменения ее параметров является одним из важнейших вопросов, решаемых в рамках этой проблемы. Существуют различные подходы к определению запаса устойчивости. И. М. Горовиц [2] исследует устойчивость систем с обратной связью с переменными коэффициентами передачи и другими параметрами, изменяющимися в пределах заданных границ, используя графический подход, который состоит в отображении областей изменения варьируемого параметра на плоскость Найквиста. В [3] предложен вычислительный метод точного определения запаса устойчивости многоконтурной системы при изменении действительного параметра. Он состоит в вычислении верхней и нижней границ устойчивости, сходящихся в одной точке. Истинное изображение области параметров аппроксимируется при помощи ее разбиения на ряд подобластей семейством выпуклых оболочек, являющихся изображениями этих подобластей. Верхняя и нижняя границы определяются при пересечении выпуклыми оболочками начала координат. Метод определения запаса устойчивости на входе и выходе многомерного объекта предложен в [4]. В основу метода положен H_∞ подход. Анализ устойчивости систем при параметрических возмущениях выполняется в [5]. Запасы устойчивости здесь рассматриваются как показатели чувствительности к параметрическим возмущениям. Отмечается, что при малых значениях запасов устойчивости система может потерять устойчивости при параметрических возмущениях. Исследуются причины малых запасов устойчивости по фазе

и модулю для систем оптимального и модального управления. В качестве меры запаса устойчивости могут также использоваться отклонения параметров системы от определенных номинальных значений. Например, в [1] формулируются условия гурвицевой устойчивости характеристического полинома, определяются максимально возможные отклонения параметров системы от установленного номинала.

В данной работе рассматривается метод решения задачи определения запаса устойчивости линейных САУ, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, при линейной зависимости коэффициентов характеристического уравнения системы от некоторого неопределенного параметра системы K , изменяющегося в пределах бесконечного интервала действительных значений, $K \in [-\infty, +\infty]$.

Постановка задачи. Изменение любого параметра САУ влечет за собой изменение корней характеристического уравнения системы, т. е. ее динамических свойств. Проследить это изменение можно, построив в комплексной плоскости корней кривую корневого годографа Теодорчика – Эванса (КГТЭ) [6], который представляет собой траекторию корней характеристического уравнения при изменении параметра системы в пределах бесконечного интервала действительных чисел.

Запишем характеристическое уравнение линейной стационарной системы управления в виде [6]

$$\phi(s) + K\psi(s) = 0, \quad (1)$$

где K – изменяющийся (свободный) параметр (коэффициент), например общий коэффициент усиления системы, $-\infty < K < +\infty$; $s = \sigma + i\omega$, s – комплексное переменное (оператор Лапласа); σ – коэффициент затухания колебаний системы; ω – угловая частота колебаний; $\phi(s)$, $\psi(s)$ – целые функции;

$$\phi(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n;$$

$$\psi(s) = c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \dots + c_{m-1} s + c_m.$$

Тогда на основании (1) получим уравнение корневого годографа

$$K = -\frac{\phi(s)}{\psi(s)} = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega), \quad (2)$$

где $u(\sigma, \omega)$, $v(\sigma, \omega)$ – гармонические функции двух действительных переменных σ и ω ;

$$u(\sigma, \omega) = -\frac{E(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) + \omega^2 F(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega)}{P^2(\sigma, \omega) + \omega^2 R^2(\sigma, \omega)}; \quad (3)$$

$$v(\sigma, \omega) = -\frac{F(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) - \omega^2 E(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega)}{P^2(\sigma, \omega) + \omega^2 R^2(\sigma, \omega)}. \quad (4)$$

Здесь $E(\sigma, \omega)$, $F(\sigma, \omega)$, $P(\sigma, \omega)$ и $R(\sigma, \omega)$ – полиномы двух независимых переменных σ и ω , называемые базовыми [6].

Функция (2) позволяет осуществлять отображение некоторых образов, заданных в плоскости K варьируемого параметра, на плоскость s комплексного переменного, а это означает, что она определяет корневые годографы уравнения (1) в плоскости комплексного переменного s , порождаемые вариацией параметра K .

Поскольку запас устойчивости динамической системы определяется расстоянием от границы асимптотической устойчивости (оси $i\omega$) до ближайшего к этой оси корня (доминирующего корня) системы, то, очевидно, с изменением параметра K запас устойчивости системы будет меняться. В этой связи ставится задача определения запаса устойчивости системы в условиях вариации параметра K . Очевидно также, что в рассматриваемом случае характер изменения запаса устойчивости можно проследить по кривой корневого годографа системы. Поэтому для решения задачи используем корневой подход [6, 7].

Метод расчета запаса устойчивости. Опишем кривую корневого годографа КГТЭ системы уравнением [6]

$$f(\sigma, \omega) = F(\sigma, \omega)P(\sigma, \omega) - E(\sigma, \omega)R(\sigma, \omega) = 0. \quad (5)$$

Как известно, условием асимптотической устойчивости линейной системы является рас-

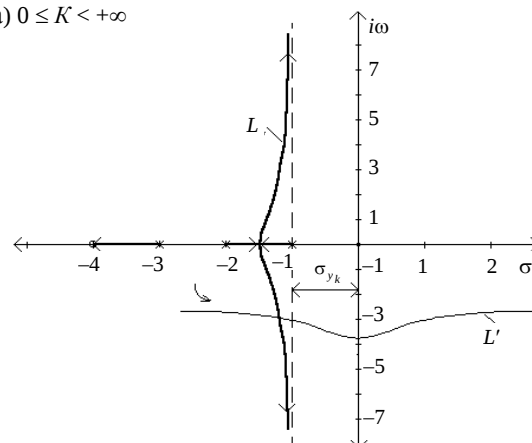
положение корней ее характеристического уравнения в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, поскольку общим решением однородного уравнения, соответствующего неоднородному дифференциальному уравнению динамики САУ, является функция

$$x = \alpha_1 e^{s_1 t} + \alpha_2 e^{s_2 t} + \dots + \alpha_n e^{s_n t},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – постоянные коэффициенты; $s_1, s_2, \dots, s_n$ – корни соответствующего характеристического уравнения; t – время.

В случае выполнения этого условия определим запас устойчивости σ_{yk} системы как наименьшее расстояние от мнимой оси собственных частот $i\omega$ до кривой корневого годографа (5), расположенной в комплексной плоскости (например, кривая L на рис. 1).

а) $0 \leq K < +\infty$



б) $-\infty < K \leq 0$

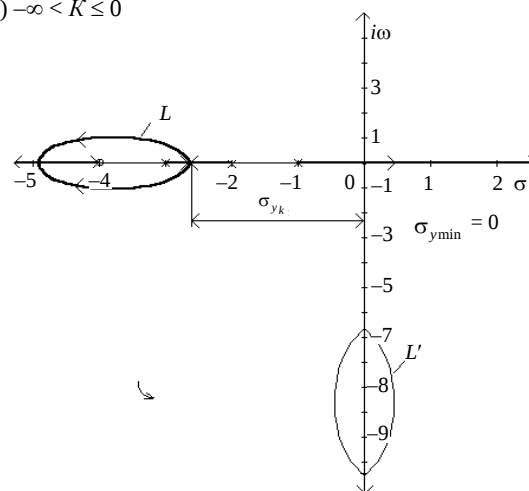


Рис. 1. Корневой годограф САУ класса [3; 1] и повернутый годограф

Задача определения запаса устойчивости решается на основе анализа кривой корневого годографа. В этой связи могут быть два случая:

а) все корни лежат на действительной оси.

Анализ кривой корневого годографа при $K \in [-\infty, +\infty]$ в этом случае не требуется, поскольку определение параметров системы, при которых запас устойчивости не меньше допустимого, не вызывает затруднений.

б) не все корни лежат на действительной оси.

В соответствии с отмеченным ранее определим запас устойчивости как расстояние крайней правой точки кривой корневого годографа от мнимой оси $i\omega$. Для этого необходимо выполнить следующее.

1. Поворот графика функции (5) (кривая L на рис. 1), описывающей корневой годограф, на 90° против часовой стрелки. Повернутый годограф показан на рисунке штриховой линией L' .

2. Исследование повернутой функции $f_1(\sigma, \omega)$ на экстремум. Очевидно, что расстояние от точки максимума этой функции до действительной (горизонтальной) оси и будет представлять собой искомый запас устойчивости системы.

Запишем в общем виде уравнение корневого годографа после поворота графика функции $f(\sigma, \omega)$

$$f_1(\sigma, \omega) = 0. \quad (6)$$

Функция (6) представляет собой полином n -й степени относительно двух независимых переменных σ и ω . Проведем исследование этой функции на экстремум при помощи первой производной. Для этого необходимо определить производную $f_1'(\sigma, \omega) = \frac{df_1}{d\sigma}$. Вычисление производной осложняется тем, что функция (6) является неявной. Поэтому ее первая производная может быть получена только в виде дробно-рациональной функции, которую представим следующим образом:

$$f_1'(\sigma, \omega) = \frac{f_2(\sigma, \omega)}{f_3(\sigma, \omega)}, \quad (7)$$

где f_2 и f_3 – некоторые полиномы от σ и ω .

Приравняв производную (7) нулю, получим уравнение

$$f_2(\sigma, \omega) = 0. \quad (8)$$

Ясно, что (8) не позволяет непосредственно определить координаты (σ и ω) точки максимума функции (6). Поэтому для вычисления точки максимума составим следующую систему уравнений (6) и (8):

$$\begin{cases} f_1(\sigma, \omega) = 0; \\ f_2(\sigma, \omega) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Имеем два результатных уравнения (9), каждое из которых представляет собой многочлен относительно двух независимых переменных σ и ω . Расположим их по степеням σ и составим соответствующий результат

$$\begin{aligned} & \text{Rez}(f_1, f_2) = \\ & \begin{vmatrix} a_0(\omega) & a_1(\omega) & \dots & a_{l-1}(\omega) & a_l(\omega) \\ & a_0(\omega) & \dots & a_{l-1}(\omega) & a_l(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & a_0(\omega) & a_1(\omega) & \dots & a_{l-1}(\omega) & a_l(\omega) \\ \beta_0(\omega) & \beta_1(\omega) & \dots & \beta_{k-1}(\omega) & \beta_k(\omega) \\ & \beta_0(\omega) & \dots & \beta_{k-1}(\omega) & \beta_k(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \beta_0(\omega) & \beta_1(\omega) & \dots & \beta_{k-1}(\omega) & \beta_k(\omega) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a_0(\omega), a_1(\omega), \dots, a_l(\omega); \beta_0(\omega), \beta_1(\omega), \dots, \beta_k(\omega)$ – полиномы независимого переменного ω .

Раскрыв результат (10) и приравняв его нулю, на что мы имеем право, поскольку уравнения (9) имеют общие корни, получим следующее уравнение относительно ω степени, не превосходящей lk :

$$a(\omega) = 0. \quad (11)$$

Решив (11) и выбрав минимальное значение корня, получим искомый запас устойчивости системы.

Описанная методика позволяет простыми средствами на основании корневых траекторий характеристического уравнения системы определить запас ее устойчивости $\sigma_{y_k} = \omega_{\min}$.

Примеры.

1. Рассмотрим систему автоматического управления, передаточная функция разомкнутой системы которой

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Для рассматриваемой системы уравнение корневого годографа имеет следующий вид:

$$f(\sigma, \omega) = \sigma^3 + 9\sigma^2 + \sigma\omega^2 + \omega^2 + 24\sigma + 19 = 0.$$

Соответствующий корневой годограф приведен на рис. 1. Рис. 1а соответствует положительному, а рис. 1б – отрицательному годографу. На рисунках полюсы заданной передаточной функции $G(s)$ разомкнутой системы обозначены крестиками, нули – кружками. Тонкой линией показана кривая L' корневого годографа после поворота годографа на 90° , иными словами, повернутый годограф. Очевидно, что приведенное выше уравнение корневого годографа описывает ветви годографа, расположенные в комплексной плоскости s .

После поворота графика $f(\sigma, \omega)$ на 90° против часовой стрелки получим следующее аналитическое выражение для повернутой кривой

$$f_1(\sigma, \omega) = \omega^3 + 9\omega^2 + \omega\sigma^2 + \sigma^2 + 24\omega + 19 = 0. \quad (12)$$

Функция $f_1(\sigma, \omega)$ является неявной. Поэтому, определив функцию $\omega = \varphi(\sigma)$ и ее производную $\omega' = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma}$, выполним дифференцирование выражения (12), используя правила дифференцирования сложной функции:

$$3\omega^2\omega' + 18\omega\omega' + \omega'\sigma^2 + 2\sigma\omega + 2\sigma + 24\omega' = 0.$$

Тогда

$$\omega' = \frac{2\sigma\omega + 2\sigma}{3\omega^2 + 18\omega + \sigma^2 + 24} = 0, \quad 2\sigma\omega + 2\sigma = 0,$$

и следовательно:

$$f_2(\sigma, \omega) = 2\sigma\omega + 2\sigma = 0. \quad (13)$$

Запишем результатные уравнения (12) и (13):

$$\begin{cases} \omega^3 + 9\omega^2 + \omega\sigma^2 + \sigma^2 + 24\omega + 19 = 0; \\ 2\sigma\omega + 2\sigma = 0 \end{cases}$$

и составим соответствующий результат (10):

$$\operatorname{Re} z(f_1, f_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} (\omega+1) & 0 & (\omega^3 + 9\omega^2 + 24\omega + 19) \\ (2\omega+2) & 0 & 0 \\ 0 & (2\omega+2) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

После раскрытия результата (14)

$$\sigma^2(\omega+1) + (\omega^3 + 9\omega^2 + 24\omega + 19) = 0,$$

получим уравнение относительно ω

$$4\omega^5 + 44\omega^4 + 172\omega^3 + 304\omega^2 + 248\omega + 76 = 0. \quad (15)$$

Решив уравнение (15), получим следующие значения корней: $\omega_1 = -1$; $\omega_2 = -1$; $\omega_3 = -1,468$; $\omega_4 = -2,653$; $\omega_5 = -4,879$. Очевидно, что запас устойчивости системы определяется максимальными значениями корней: $\omega_1 = \omega_2 = -1$ и соответственно $\sigma_{y_k} = \sigma_{y_{\min}} = -1$ (рис. 1а). При $0 \leq K < +\infty$ он равен минимальному запасу устойчивости системы $\sigma_{y_{\min}}$ (рис. 1а). При $-\infty < K \leq 0$ (рис. 1б) запас устойчивости $\sigma_{y_k} = -2,653$, а минимальный запас устойчивости системы $\sigma_{y_{\min}} = 0$.

2. Определим запас устойчивости для САУ с передаточной функцией разомкнутой системы

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

Уравнение корневого годографа рассматриваемой системы, описывающее ветви годографа, расположенные в комплексной плоскости корней, имеет следующий вид:

$$f(\sigma, \omega) = \omega^2 + \sigma^2 + 6\sigma + 7 = 0.$$

Корневой годограф системы при изменении коэффициента усиления K от $-\infty$ до $+\infty$ показан на рис. 2 (положительный годограф).

После поворота графика функции $f(\sigma, \omega)$ на 90° против часовой стрелки получим уравнение

$$f_1(\sigma, \omega) = \sigma^2 + \omega^2 + 6\omega + 7 = 0. \quad (16)$$

Производную функции (16) найдем аналогично рассмотренной в предыдущем примере производной функции (12) и приравняем нулю

$$-2\sigma + 2\omega\omega' + 6\omega' = 0.$$

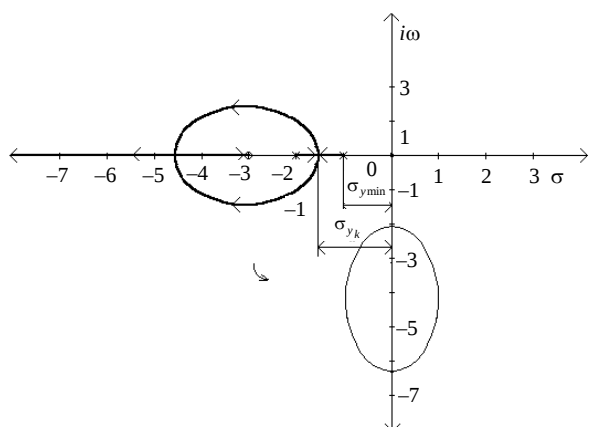


Рис. 2. Корневой годограф САУ класса [2; 1] и повернутый годограф

Тогда

$$\omega' = \frac{2\sigma}{2\omega + 6} = 0$$

и, следовательно:

$$f_2(\sigma, \omega) = 2\sigma = 0. \quad (17)$$

После составления системы результирующих уравнений $f_1(\sigma, \omega)$ (16) и $f_2(\sigma, \omega)$ (17):

$$\begin{cases} -\sigma^2 + \omega^2 + 6\omega + 7 = 0; \\ 2\sigma = 0 \end{cases}$$

сформируем соответствующий результат

$$\text{Rez}(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & (\omega^2 + 6\omega + 7) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

После раскрытия результата (18) получим следующее уравнение относительно ω :

$$\omega^2 + 6\omega + 7 = 0. \quad (19)$$

Корни уравнения (19) имеют следующие значения: $\omega_1 = -1,586$; $\omega_2 = -4,414$. Следовательно, при $0 \leq K < +\infty$ запас устойчивости системы $\sigma_{yk} = -1,586$, а минимальный запас устойчивости $\sigma_{ymin} = -1$ (рис. 2). Очевидно, что при $-\infty < K \leq 0$ минимальный запас устойчивости системы равен нулю, $\sigma_{ymin} = 0$ (рис. 2).

ВЫВОД

В статье рассмотрен аналитический метод расчета запаса устойчивости системы автоматического управления при изменении некоторого параметра K системы в пределах бесконечного интервала значений, $-\infty < K < +\infty$. Метод основан на использовании корневого подхода. Задача решается посредством формирования аналитического корневого годографа Теодорчика – Эванса заданной динамической системы. Запас устойчивости определяется как наименьшее расстояние от расположенной в комплексной плоскости корней кривой корневого годографа до границы асимптотической устойчивости системы. Для определения запаса устойчивости системы кривая сформированного корневого годографа поворачивается в плоскости собственных частот (корней) системы на 90° против часовой стрелки, и описывающая повернутый таким образом корневой годограф функция исследуется на экстремум. Запас устойчивости определяется координатами наивысшей точки экстремума (имеющей максимальное значение координаты σ) повернутой кривой корневого годографа. Рассмотрены примеры расчета запаса устойчивости динамических систем с соответствующими графическими иллюстрациями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк, Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М.: Наука, 2002.
2. Horowitz, I. M. Synthesis of Feedback Systems / I. M. Horowitz. – N.Y.: Academic, 1963.
3. De Gaston Raymond, P. E. Exact calculation of the multiloop stability margin / P. E. De Gaston Raymond, M. G. Safonov // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1988. – Vol. 33. – № 2. – P. 156–171.
4. Агафонов, П. А. Одновременное обеспечение запасов устойчивости на входе и выходе многомерного объекта на основе H_∞ подхода / П. А. Агафонов, В. Н. Честнов // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 9. – С. 110–119.
5. Александров, А. Г. Запасы устойчивости систем оптимального и модального управления / А. Г. Александров // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 8. – С. 4–17.
6. Римский, Г. В. Автоматизация исследований динамических систем / Г. В. Римский, В. В. Таборовец. – Минск: Наука и техника, 1978. – 336 с.
7. Несенчук, А. А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А. А. Несенчук. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2005. – 234 с.

Поступила 14.04.2008