

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВАЛИКО-КОЛЬЦЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ С ОДНИМ ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

ЛАПАНОВИЧ И. О.

Белорусский национальный технический университет

Механика неголономных систем как раздел аналитической механики оформилась в 1894 г. [1]. Герц ввел разделение связей и механических систем на голономные и неголономные. Такая необходимость возникла в связи с тем, что аналитическая механика Лагранжа оказалась неприемлемой к задачам качения твердого тела по плоскости без проскальзывания.

В настоящее время неголономная механика располагает стройной теорией, которая позволила перейти к решению технически сложных и актуальных проблем теории автоматического управления, гироскопических устройств, теории дифференцирующих и интегрирующих устройств и ряда других.

При составлении уравнений движения валико-кольцевых механизмов (ВКМ) в [2] использованы уравнения неголономной механики в форме Рауса, являющейся комбинацией Ла-

гранжевых методов обобщенных координат и неопределенных множителей. Методический интерес представляет вывод уравнений исследуемого объекта на основе общих теорем динамики об изменении количества движения и кинетического момента системы. Общие теоремы динамики, устанавливая связь между динамическими величинами, характеризующими движение системы, и действующими силами как активными, так и реакциями связей, допускают наглядную физическую интерпретацию. Причем связи могут быть любыми.

В качестве динамической модели ВКМ принимаем динамическую систему звеньев, представленных на рис. 1, образующих неголономную кинематическую пару вал – кольцо, допускающую два независимых движения при двух условиях неинтегрируемых связей.

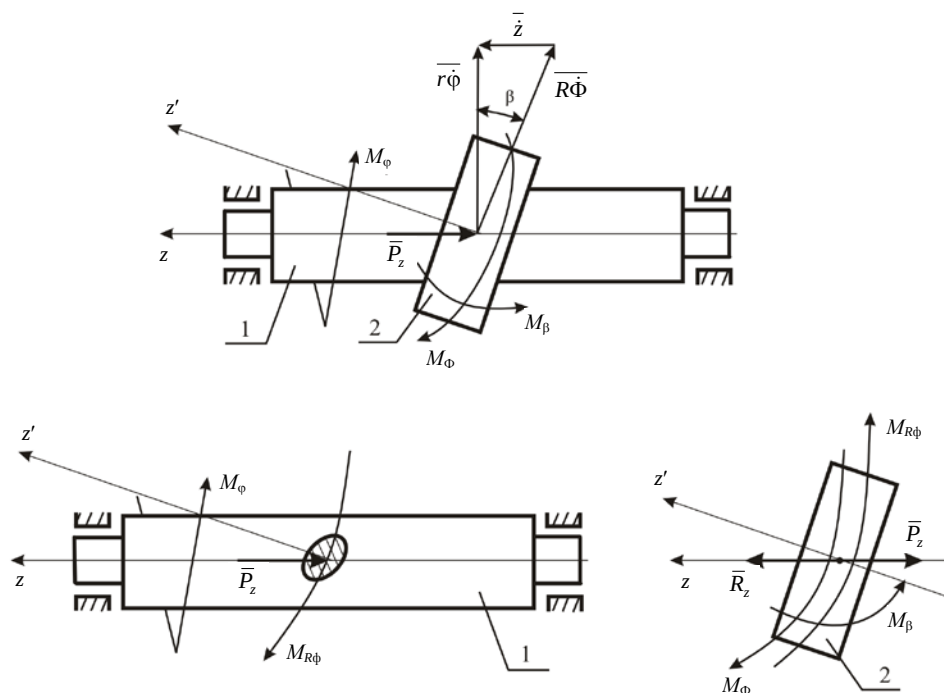


Рис. 1. Схема нагружения силами динамической модели валико-кольцевого механизма:
1 – вал; 2 – кольцо

Следуя принципу освобожденности от связей, рассмотрим движение отдельно вала 1 и кольца 2, изображенных на рис. 1, под действием активных, реактивных и инерционных сил. Разрывая кинематическую пару «вал – кольцо» и относя силы трения, реализующие неголономные связи, к категории активных, запишем уравнения движения вала и кольца, продолжая считать каждое из них звеном приведения для соответствующей части ВКМ. Вал совершает простое вращательное движение по независимой координате φ . Кольцо совершает сложное движение, которое можно представить состоящим из поступательного движения вместе с центром масс кольца по координате z и вращения по координате Φ . Кроме того, кольцо может совершать движение верчения по независимой координате β .

Таким образом, на основе указанных теорем динамики следует составить четыре уравнения вида:

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = Q_\varphi; \\ m \frac{d\dot{z}}{dt} = Q_z; \\ I_2 \frac{d\dot{\Phi}}{dt} = Q_\Phi; \\ I_3 \frac{d\dot{\beta}}{dt} = Q_\beta, \end{cases} \quad (1)$$

где $\dot{\varphi}$, $\dot{z}$, $\dot{\Phi}$, $\dot{\beta}$ – скорости вала и кольца по соответствующей обобщенной координате; I_1 – приведенный к валу ВКМ момент инерции всех вращающихся звеньев от вала двигателя до вала ВКМ включительно; m – приведенная к кольцу масса поступательно перемещающихся частей каретки; I_2 , I_3 – приведенные моменты инерции кольца относительно соответствующих осей; Q_φ , Q_z , Q_Φ , Q_β – обобщенные силы.

Уравнения (1) необходимо дополнить уравнениями неголономных связей вида:

$$\begin{cases} \dot{z} - r\dot{\varphi}u_{21} = 0; \\ R\dot{\Phi} - r\dot{\varphi}u_{31} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Обобщенные силы Q определяются из уравнений элементарных работ действующих сил:

$$\begin{cases} Q_\varphi d\varphi = M_\varphi d\varphi - R_z dz - M_{R_\varphi} d\Phi; & (3a) \\ Q_z dz = R_z dz - P_z dz; & (3б) \\ Q_\Phi d\Phi = M_{R_\Phi} d\Phi - M_\Phi d\Phi; & (3в) \\ Q_\beta d\beta = M_\beta d\beta, & (3г) \end{cases}$$

где M_φ , M_Φ , M_β , P_z – внешние активные силы; M_{R_φ} , R_z – внутренние реакции связей.

Из уравнений (3а), (3б), (3в) посредством уравнений (2), выражающих условия, налагаемые на вариации координат дифференциальными связями, требуется исключить вариации зависимых координат $d\Phi$, dz . В результате получаем значения обобщенных сил:

$$\begin{cases} Q_\varphi = M_\varphi - R_z ru_{21} - M_{R_\varphi} \frac{r}{R} u_{31}; \\ Q_z = R_z - P_z; \\ Q_\Phi = M_{R_\Phi} - M_\Phi; \\ Q_\beta = M_\beta. \end{cases} \quad (4)$$

Продифференцировав по времени уравнения связи (2), выразим значение ускорения перемещения кольца $\ddot{z}$

$$\ddot{z} = ru_{21}\ddot{\varphi} + r\dot{u}_{21}\dot{\varphi} \quad (5)$$

и углового ускорения вращения кольца $\ddot{\Phi}$:

$$\ddot{\Phi} = \frac{r}{R} u_{31}\ddot{\varphi} + \frac{r}{R} \dot{u}_{31}\dot{\varphi}. \quad (6)$$

С учетом (5), (6) и значений обобщенных сил (4) уравнения движения (1) приобретают вид:

$$I_1\ddot{\varphi} = M_\varphi - R_z ru_{21} - M_{R_\varphi} \frac{r}{R} u_{31}; \quad (7a)$$

$$mru_{21}\ddot{\varphi} + mr\dot{u}_{21}\dot{\varphi} = R_z - P_z; \quad (7б)$$

$$I_2 \frac{r}{R} u_{31}\ddot{\varphi} + I_2 \frac{r}{R} \dot{u}_{31}\dot{\varphi} = M_{R_\Phi} - M_\Phi; \quad (7в)$$

$$I_3\ddot{\beta} = M_\beta. \quad (7г)$$

Решая совместно уравнения (7а), (7б), (7в), после соответствующих преобразований получим систему дифференциальных уравнений, составленных относительно углового ускорения ведущего вала $\ddot{\varphi}$ и ускорения разворота кольца $\ddot{\beta}$:

$$\begin{cases} \left(I_1 + mr^2 u_{21}^2 + I_2 \frac{r^2}{R^2} u_{31}^2 \right) \ddot{\varphi} + \\ + \left(mr^2 u_{21} \dot{u}_{21} + I_2 \frac{r^2}{R^2} u_{31} \dot{u}_{31} \right) \dot{\varphi} = \\ = M_\varphi - P_z ru_{21} - M_\Phi \frac{r}{R} u_{31}; \\ I_3 \ddot{\beta} = M_\beta. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогичный ход рассуждений, но с учетом неголономных связей в форме (2) приводит

к уравнениям движения исследуемого механизма, составленным относительно ведомого управляемого кольца в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{I_1}{r^2} u_{12}^2 + m + \frac{I_2}{R^2} \left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^2 \right] \ddot{z} + \\ & + \left[\frac{I_1}{r^2} u_{12} \dot{u}_{12} + \frac{I_2}{R^2} \left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right) \left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^{\cdot} \right] \dot{z} = \\ & = \frac{M_{\Phi}}{r} u_{12} - P_z - \frac{M_{\Phi}}{R} \frac{u_{12}}{u_{13}}, \\ & I_3 \ddot{\beta} = M_{\beta}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Уравнения (8), (9) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Эти уравнения необходимо преобразовать, так как они содержат несколько переменных коэффициентов, что осложняет дальнейшие исследования.

В уравнения (8) входят взаимосвязанные параметры u_{21} и u_{31} . Выразив u_{31} в функции u_{21} посредством уравнений связи (2), находим

$$u_{31} = \frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{1 + \tan^2 \beta} = \sqrt{1 + u_{21}^2}. \quad (10)$$

Продифференцировав уравнения (2), замечаем, что:

$$u_{31} \dot{u}_{31} = u_{21} \dot{u}_{21}. \quad (11)$$

С учетом (10), (11) уравнения движения ВКМ (8) принимают вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[I_1 + I_2 \frac{r^2}{R^2} + \left(m r^2 + I_2 \frac{r^2}{R^2} \right) u_{21}^2 \right] \ddot{\phi} + \\ & + \left(m r^2 + I_2 \frac{r^2}{R^2} \right) u_{21} \dot{u}_{21} \dot{\phi} = \\ & = M_{\Phi} - P_z r u_{21} - M_{\Phi} \frac{r}{R} \sqrt{1 + u_{21}^2}; \\ & I_3 \ddot{\beta} = M_{\beta}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Переменные коэффициенты системы уравнений (9) целесообразно выразить функцией одного переменного u_{12} . Посредством уравнений связи (2) находим:

$$u_{13} = \cos \beta = \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta}} = \frac{u_{12}}{\sqrt{1 + u_{12}^2}};$$

$$\left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^{\cdot} = (\operatorname{ctg} \beta)^{\cdot} = -\frac{1}{\sin^2 \beta};$$

$$u_{13} \dot{u}_{12} = -\cos \beta \frac{1}{\sin^2 \beta};$$

$$\left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^{\cdot} = \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\cos \beta} \right)^{\cdot} = \left(\frac{1}{\sin \beta} \right)^{\cdot} = -\cos \beta \frac{1}{\sin^2 \beta}. \quad (13)$$

Значения переменных составляющих в коэффициентах при $\ddot{z}$, $\dot{z}$, $\frac{M_{\Phi}}{R}$ приобретают вид:

$$\frac{u_{12}}{u_{13}} = \sqrt{1 + u_{12}^2}; \quad \left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^2 = 1 + u_{12}^2; \quad \left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^{\cdot} = u_{13} \dot{u}_{12};$$

$$\frac{u_{12}}{u_{13}} \left(\frac{u_{12}}{u_{13}} \right)^{\cdot} = u_{12} \dot{u}_{12}. \quad (14)$$

С учетом (13), (14) система уравнений движения ВКМ (9) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[m + \frac{I_2}{R^2} + \left(\frac{I_1}{r^2} + \frac{I_2}{R^2} \right) u_{12}^2 \right] \ddot{z} + \\ & + \left(\frac{I_1}{r^2} + \frac{I_2}{R^2} \right) u_{12} \dot{u}_{12} \dot{z} = \\ & = \frac{M_{\Phi}}{r} u_{12} - P_z - \frac{M_{\Phi}}{R} \sqrt{1 + u_{12}^2}; \\ & I_3 \ddot{\beta} = M_{\beta}. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Таким образом, вывод уравнений движения валико-кольцевого механизма на основе общих теорем динамики подтверждает результат, полученный на основе уравнений Рауса.

Дифференциальные уравнения движения исследуемого объекта с переменными коэффициентами преобразованы к виду (12), (15), удобному для решения задач анализа и синтеза.

ВЫВОД

Анализ полученных уравнений движения неголономной системы позволяет сделать вывод, что динамику переходных процессов валико-кольцевого механизма определяют не только действующие силы, массы и их начальные состояния, но и закон изменения первых кинематических передаточных функций и скорость их изменения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герц, Г. Принципы механики, изложенные в новой связи / Г. Герц; изд. подгот. А. Т. Григорьян, Л. С. Полак; под общ. ред. И. И. Артоболевского; пер. с нем. В. Ф. Котова, А. В. Сулимо-Самуйло. – М.: Академия наук СССР, 1959. – 386 с.
2. Лапанович, И. О. Математическая модель механической системы с валико-кольцевым механизмом на основе уравнений Рауса / И. О. Лапанович // Вестник БНТУ. – 2007. – № 2. – С. 23–25.

Поступила 10.01.2007