

УДК 681.51.033.01

**ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ВИБРАЦИЙ
НА ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМЫ**

В процессе эксплуатации оборудование, системы управления и аппаратура энергетических систем часто подвергаются воздействию вибраций в виде случайных ускорений конструкции изделий, что может являться причиной их отказов. Источниками вибраций могут быть работающие силовые установки или внешние кинематические воздействия, например со стороны соответствующих транспортных агрегатов. Экспериментально установлено [1], что вибрации являются случайным процессом $X(t)$, корреляционная функция которого, как правило, аппроксимируется выражением

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0 \tau + \gamma \sin \omega_0 |\tau|), \quad (1)$$

где D_x – дисперсия процесса $X(t)$; γ – параметр, показывающий, что преобладает в корреляционной функции (1): убывание по экспоненциальному закону или периодические колебания с частотой ω_0 . В общем случае $|\gamma| \leq \frac{\alpha}{\omega_0}$. При

$\gamma = \frac{\alpha}{\omega_0}$ стационарный случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией (1) дифференцируем, дисперсия его производной конечна, а спектральная плотность определяется выражением

$$S_x(\omega) = \frac{2D_x \alpha}{\pi} \frac{\beta^2}{\beta^4 + 2(\alpha^2 - \omega_0^2)\omega^2 + \omega^4}, \quad (2)$$

где $\beta^2 = \alpha^2 + \omega_0^2$.

Случайный процесс с корреляционной функцией вида (1) описывается линейной моделью (формирующим фильтром) второго порядка с аддитивным шумом [2]

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = N \quad (3)$$

или в форме Коши с обозначениями $X = X_1$, $\dot{X} = X_2$:

$$\dot{X}_1 = X_2; \quad (4)$$

$$\dot{X}_2 = -2\xi\omega_0 X_2 - \omega_0^2 X_1 + N, \quad (5)$$

где ξ – коэффициент затухания, $\xi = \frac{1}{\alpha}$; N – белый шум с интенсивностью G .

Отрицательное влияние процесса $X(t)$ (вибраций) проявляется в превышении им некоторого допустимого уровня C , определенного для конкретного элемента системы (электронного или механического устройства). Превышение реализацией процесса $X(t)$ уровня C называют выбросом случайного процесса [3].

Среднее число положительных выбросов $X(t)$ за уровень C на интервале $[0, T]$ является случайной величиной и определяется следующим образом:

$$N_c(T) = \int_0^T \dot{X}(t) \delta[X(t) - C] [\dot{X}(t)] dt. \quad (6)$$

Подынтегральная функция в (6) вследствие свойств дельта-функции $\delta[X(t) - C]$ и единичной ступенчатой функции $1[\dot{X}(t)]$ равна нулю всюду, кроме тех точек, где случайный процесс $X(t)$ пересекает уровень C . В точках пересечения процессом $X(t)$ уровня C интеграл скачком возрастает на единицу. Следовательно, интеграл (6) равен числу положительных пересечений случайным процессом $X(t)$ уровня C на интервале $[0, T]$.

Математическое ожидание случайной величины $N_c(T)$ вычисляется по формуле

$$M[N_c(T)] = \int_0^T \int_0^\infty N_c[T, X(t), \dot{X}(t)] \times f(X, \dot{X}, t) dX d\dot{X}, \quad (7)$$

где $f(X, \dot{X}, t)$ – двумерная плотность вероятности случайного процесса $X(t)$ и его производной $\dot{X}(t)$.

Подставляя формулу (6) в (7) и пользуясь известным правилом интегрирования произведения произвольной функции на дельта-функцию, проинтегрируем (7) по переменной X

$$M[N_c(T)] = \int_0^T dt \int_0^\infty \dot{X}(t) f(C, \dot{X}, t) d\dot{X}. \quad (8)$$

Для случайного процесса, стационарного в узком смысле, внутренний интеграл не зависит от времени, поэтому выражение (8) можно записать в следующем виде:

$$M[N_c(T)] = T \int_0^{\infty} \dot{X}(t) f(C, \dot{X}) d\dot{X}. \quad (9)$$

Разделив среднее число выбросов на интервале $[0, T]$ (9) на длину интервала, получим интенсивность числа выбросов

$$\lambda_c(T) = \frac{1}{T} M[N_c(T)] = \int_0^{\infty} \dot{X} f(C, \dot{X}) d\dot{X}. \quad (10)$$

Для гауссова процесса, обозначив $f(X, \dot{X}) = f(X, \dot{X}, t)$, имеем

$$f(X, \dot{X}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{D_x D_{\dot{x}}(1-r^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \left[\frac{(X-m_x)^2}{D_x} - \frac{2r(X-m_x)(\dot{X}-m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}} + \frac{(\dot{X}-m_{\dot{x}})^2}{D_{\dot{x}}} \right]\right), \quad (11)$$

$m_x, m_{\dot{x}}$ – математические ожидания; $D_x, D_{\dot{x}}$ – дисперсии процессов $X(t)$ и $\dot{X}(t)$; r – коэффициент корреляции $X(t)$ и $\dot{X}(t)$ соответственно;

$$r = r_{x\dot{x}} = \frac{R_{x\dot{x}}}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}}, \quad (12)$$

$R_{x\dot{x}}$ – корреляционный момент (момент связи) $X(t)$ и $\dot{X}(t)$.

Подставляя в (10) выражение для плотности вероятности $f(X, \dot{X})$ (11), в котором параметр X заменен на C , получим

$$\lambda_c(T) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\dot{X}}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}(1-r^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)} \times \left[\frac{(C-m_x)^2}{D_x} - \frac{2r(C-m_x)(\dot{X}-m_{\dot{x}})}{\sqrt{D_x D_{\dot{x}}}} + \frac{(\dot{X}-m_{\dot{x}})^2}{D_{\dot{x}}} \right]\right) d\dot{X}. \quad (13)$$

Для процесса, описываемого уравнениями (4), (5), дифференциальные уравнения для математических ожиданий и корреляционных

моментов, входящих в выражение (13), имеют вид:

$$\dot{m}_x(t) = \dot{m}_1 = m_2; \quad m_x(0) = m_{x0}; \quad (14)$$

$$\dot{m}_{\dot{x}}(t) = \dot{m}_2 = -2\xi\omega_0 m_2 - \omega_0^2 m_1; \quad \dot{m}_{\dot{x}}(0) = \dot{m}_{\dot{x}0}; \quad (15)$$

$$\dot{D}_x(t) = \dot{\theta}_{11} = 2\theta_{12}; \quad D_x(0) = D_{x0}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_{x\dot{x}}(t) &= \dot{\theta}_{12} = \theta_{22} - 2\xi\omega_0\theta_{12} - \omega_0^2\theta_{11}; \\ R_{x\dot{x}}(0) &= R_{x\dot{x}0}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{D}_{\dot{x}}(t) &= \dot{\theta}_{22} = -4\xi\omega_0\theta_{22} - 2\omega_0^2\theta_{12} + G; \\ D_{\dot{x}}(0) &= D_{\dot{x}0}. \end{aligned} \quad (18)$$

В установившемся режиме при $m_x = m_{\dot{x}} = R_{x\dot{x}} = 0$:

$$D_x = \theta_{11} = \frac{G}{4\xi\omega_0^3}; \quad D_{\dot{x}} = \theta_{22} = \frac{G}{4\xi\omega_0}. \quad (19)$$

Тогда (при $m_x = m_{\dot{x}} = r = 0$) интеграл (13) легко вычисляется и интенсивность выбросов определяется по формуле

$$\lambda_c(T) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_{\dot{x}}}{D_x}} \exp\left(-\frac{C^2}{2D_x}\right). \quad (20)$$

При достаточно большом значении C ($C \geq 3\sigma_x$; $\sigma_x = \sqrt{D_x}$) выбросы стационарного процесса $X(t)$ становятся редкими явлениями, а интервалы между выбросами будут настолько велики по сравнению с длительностью выбросов, что сечения случайного процесса, разделенные такими интервалами, будут практически независимыми. При таких предположениях закон распределения числа выбросов будет близок к пуассоновскому закону, для которого

$$P_m = P\{N_c(t) = m\} = \frac{(\lambda_c t)^m}{m!} \exp(-\lambda_c t), \quad (21)$$

где P_m – вероятность того, что число положительных выбросов за уровень C случайного процесса $X(t)$ на интервале $[0, t] \subset T$ равно числу m .

Вероятность отсутствия выбросов P_0 и вероятность хотя бы одного выброса P_1 на интер-

вале $[0, t] \subset T$ на основании (21) определяются по формулам:

$$P_0 = \exp(-\lambda_c t); \quad P_1 = 1 - \exp(-\lambda_c t). \quad (22)$$

Выражения (19)–(22) позволяют оценить вероятностные характеристики случайного процесса с корреляционной функцией вида (1), описывающей воздействие вибраций на элементы системы в установившемся режиме. Например, при параметрах вибраций $\alpha = 150$ 1/с; $\omega_0 = 200$ 1/с и времени работы системы $t = 20$ с при значениях $C = 3\sigma_x$; $4\sigma_x$; $5\sigma_x$ согласно (20) интенсивности выбросов соответственно равны $\lambda_c(T) = 0,44400$; $0,01360$; $0,00016$. Вероятность хотя бы одного выброса (выхода из строя чувствительного элемента системы), вычисленная по формуле (21), для трех уровней составит: $P_1(C = 3\sigma_x) = 0,9998$; $P_1(C = 4\sigma_x) = 0,2381$; $P_1(C = 5\sigma_x) = 0,0032$.

Таким образом, очевидно, что уровень $5\sigma_x$ в данном случае является вполне подходящим, так как при нем вероятность нежелательного положительного выброса является допустимо малой.

Если условием работоспособности элемента системы является нахождение $X(t)$ в диапазоне $[h, C]$, где h – допустимый уровень отрицательных выбросов $X(t)$, то, кроме вычисления $\lambda_c(T)$, необходимо определять интенсивность отрицательных выбросов $\lambda_h(T)$. При этом для вычисления среднего числа отрицательных выбросов $M[N_h(T)]$ по формуле (9) следует интервал интегрирования брать $(\infty, 0]$.

При исследовании переходных режимов работы системы необходимо рассматривать нестационарный процесс (4), (5). Некоторую трудность при этом представляет вычисление интеграла (13) (при $r \neq 0$). В данном случае необходимо решать уравнения для моментов (14)–(18) и численно интегрировать (13) при

верхнем пределе интеграла, равном теоретически максимально возможному значению $\dot{X}_{\max}$.

На рис. 1 представлена зависимость интенсивности выбросов λ_c от текущего времени $t = t_c$. Моделирование проводилось в среде MathCad при следующих значениях параметров, характеризующих систему: $\alpha = 1,4$; $\omega_0 = 10$; $G = 1$; $C = 0,01$; $m_{x0} = 0,01$; $\dot{m}_{x0} = 0,01$; $D_{x0} = 0,01$; $D_{\dot{x}0} = 0,1$; $\dot{X}_{\max} = 7 \sigma_x$.

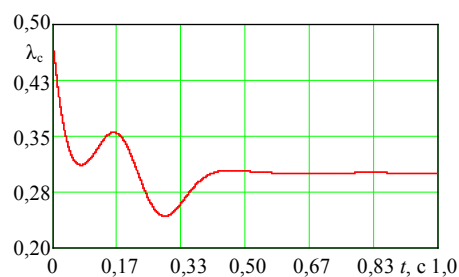


Рис. 1. Изменение интенсивности выбросов в переходном режиме

ВЫВОД

Предлагаемый подход позволяет на основе экспериментально определенных статистических характеристик вибраций и заданных эксплуатационных параметров элементов системы, подверженных воздействию вибраций, определить диапазон работоспособности и вероятностные характеристики безотказной работы системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пупков, К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления. – Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / К. А. Пупков, Н. В. Егупов. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. – 640 с.
2. Казаков, И. Е. Анализ стохастических систем в пространстве состояний / И. Е. Казаков, С. В. Мальчиков. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
3. Тихонов, В. И. Выбросы случайных процессов / В. И. Тихонов. – М.: Наука, 1970. – 186 с.

Поступила 23.03.2009