УДК 517.977

ПРИНЦИП ε-МАКСИМУМА В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМОЙ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ГАБАСОВА О. Р.

Белорусский национальный технический университет

1. Пусть T – промежуток управления, $h_u = h_\upsilon / M$, $h_\upsilon = (t^* - t_*)/N$ – периоды квантования времени (M, N – натуральные числа); $T_u = \{t_*, t_* + h_u, \ldots, t^* - h_u\}$, $T_\upsilon = \{t_*, t_* + h_\upsilon, \ldots, t^* - h_\upsilon\}$; $H_x \in \mathbb{R}^{m\times n_x}, H_y \in \mathbb{R}^{m\times n_y}$, $rank(H_x, H_y) = m \le n_x + n_y$; $g \in \mathbb{R}^m$; $u_*, u^* \in \mathbb{R}$, $\upsilon_*, \upsilon^* \in \mathbb{R}$; $c_x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $c_y \in \mathbb{R}^{n_y}$; $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_y}$; $A(t) \in \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathbb{R}$, $b_x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $A_y(t) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $b_y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $t \in T$, – непрерывные функции; $u(\cdot) = (u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} :\ u_* \le u \le u^*\},\ t \in T)$ – дискретное в прямом времени[1] с периодом квантования h_u управляющее воздействие непрерывной части гибридной системы; $\upsilon(\cdot) = (\upsilon(t) \in V = \{\upsilon \in \mathbb{R} : \upsilon_* \le \upsilon \le \upsilon^*\},\ t \in T_\upsilon)$ – управляющее воздействие дискретной части гибридной системы.

В классе управляющих воздействий $(u(\cdot), \upsilon(\cdot))$ рассмотрим линейную задачу оптимизации гибридной системы [1]:

$$J(u,\upsilon) = c'_x x(t^*) + c'_y y(t^*) \to \max_{u(\cdot),\upsilon(\cdot)}; \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A_x(t)x + A_{xy}(t)y + b_x(t)u, \ \ t \in T; x(t_*) = x_0; \\ y(t + h_\upsilon) = A_y(t)y(t) + h_\upsilon b_y(t)\upsilon(t), \ t \in T_\upsilon; y(t_*) = y_0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$H_x x(t^*) + H_y y(t^*) = g. \qquad (3)$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние непрерывной части системы в момент времени t; $y = y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – то же дискретной части системы; $(x(t),\ y(t))$ – то же гибридной системы; $u(t),\ \upsilon(t)$ – значения управляющих воздействий в момент t.

Под *траекторией* системы (2), соответствующей управляющим воздействиям $(u(\cdot), \upsilon(\cdot))$, будем понимать единственную пару из непрерывной функции $x(\cdot) = (x(t),\ t \in T)$ и дискретной с периодом квантования h_υ в прямом времени функции $y(\cdot) = (y(t),\ t \in T)$, которые удовлетворяют (2).

Управляющие воздействия $(u(\cdot),\ \upsilon(\cdot))$ назовем *программой* гибридной системы, если на соответствующей им траектории $(x(\cdot),\ y(\cdot))$ системы (2) выполняются ограничения (3). Программа $(u^0(\cdot),\ \upsilon^0(\cdot))$ называется *оптимальной*, если на ней критерий качества (1) достигает максимального значения: $J(u^0(\cdot),\ \upsilon^0(\cdot)) = \max_{u(\cdot),\upsilon(\cdot)} J(u(\cdot),\ \upsilon(\cdot))$, где максимум вычисляется по всем программам. *Субоптимальную* (*ε-оптимальную*) программу $(u^\varepsilon(\cdot), \upsilon^\varepsilon(\cdot))$ определим неравенством $J(u^0(\cdot), \upsilon^0(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot), \upsilon^\varepsilon(\cdot)) \le \varepsilon$.

Как известно [2], в теории оптимального управления важную роль играют критерии оптимальности и субоптимальности. Целью дан-

[1] Функция $f(t),\ t \in T = [t_*, t^*]$, называется *дискретной* в *прямом* (*обратном*) времени с периодом квантования $h = (t^* - t_*)/N_0$ (N_0 – натуральное число), если $f(t) = f(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h[$, $\tau \in \{t_*, t_* + h, \ldots, t^* - h\}$ ($f(t) = f(\tau)$, $t \in]\tau - h,\ \tau]$, $\tau \in \{t_* + h, \ldots, t^*\}$).

ной статьи является получение критериев субоптимальности и оптимальности для программ задачи (1)–(3).

2. Согласно [1] состояние гибридной системы (2) в момент t^* можно вычислить по формуле Коши

$$x(t^*) = F_x(t^*, t_*)x_0 +$$

$$+\left[F_{xy}(t^*, t_* + h_\upsilon)A_y(t_*)h_\upsilon + \int_{t_*}^{t_*+h_\upsilon} F_x(t^*, \mu)A_{xy}(\mu)d\mu\right]y_0 +$$

$$+\int_{t_*}^{t^*} F_x(t^*, \mu)b_x(\mu)u(\mu)d\mu +$$

$$+h_\upsilon^2 \sum_{s\in T_\upsilon} F_{xy}(t^*, s+h_\upsilon)b_y(s)\upsilon(s); \qquad (4)$$

$$y(t^*) = F_y(t^*, t_* + h_\upsilon)A_y(t_*)y_0 +$$
$$+h_\upsilon \sum_{s\in T_\upsilon} F_y(t^*, s+h_\upsilon)b_y(s)\upsilon(s),$$

где функция $F_x(t^*, s) \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x}$, $s\in T$, дифференцируема по s, функции $F_y(t^*, s)\in \mathbb{R}^{n_y\times n_y}$, $F_{xy}(t^*, s) \in \mathbb{R}^{n_x\times n_y}$, $s\in T_\upsilon$, дискретны в обратном времени с периодом квантования $h_\upsilon -$ компоненты фундаментальной матрицы решений гибридной системы (2), удовлетворяющие уравнениям:

$$\frac{\partial F_x(t^*, s)}{\partial s} = -F_x(t^*, s)A_x(s), \ \ s\in T;$$

$$F_{xy}(t^*, s-h_\upsilon) = F_{xy}(t^*, s)A_y(s-h_\upsilon) + \qquad (5)$$

$$+\frac{1}{h_\upsilon}\int_{s-h_\upsilon}^{s} F_x(t^*, \mu)A_{xy}(\mu)d\mu, \ \ s\in T_\upsilon;$$

$$F_y(t^*, s-h_\upsilon) = F_y(t^*, s)A_y(s-h_\upsilon), \ \ s\in T_\upsilon;$$

$$F_x(t^*, t^*) = E, F_y(t^*, t^*) = E, \ F_{xy}(t^*, t^*) = 0. \ \ (6)$$

Подставив выражения (4) в (1)–(3), получим задачу линейного программирования, эквивалентную исходной задаче:

$$\sum_{\tau\in T_u} c_u(\tau)u(\tau) + \sum_{s\in T_\upsilon} c_\upsilon(s)\upsilon(s) \to \max;$$
$$\sum_{\tau\in T_u} d_u(\tau)u(\tau) + \sum_{s\in T_\upsilon} d_\upsilon(s)\upsilon(s) = \tilde{g}; \qquad (7)$$
$$u_* \le u(t) \le u^*, \ t\in T_u; \ \upsilon_* \le \upsilon(s) \le \upsilon^*, s\in T_\upsilon.$$

Здесь

$$c_u(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+h_u} c_x' F_x(t^*, \mu)b_x(\mu)d\mu, \ \ \tau\in T_u;$$

$$c_\upsilon(s) = c_x' F_{xy}(t^*, s+h_\upsilon)b_y(s)h_\upsilon^2 + c_y' F_y(t^*, s+h_\upsilon)\times$$
$$\times b_y(s)h_\upsilon, \ \ s\in T_\upsilon;$$

$$d_u(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+h_u} H_x F_x(t^*, \mu)b_x(\mu)d\mu, \tau\in T_u;$$

$$d_\upsilon(s) = H_x F_{xy}(t^*, s+h_\upsilon)h_\upsilon^2 b_y(s) +$$
$$+H_y F_y(t^*, s+h_\upsilon)\ b_y(s)h_\upsilon, s\in T_\upsilon;$$
$$\tilde{g} = g - (H_x F_x(t^*, t_*)x_0 +$$
$$+H_x\ \ [F_{xy}(t^*, t_* + h_\upsilon)A_y(t_*)h_\upsilon + \qquad (8)$$
$$+\int_{t_*}^{t_*+h_\upsilon} F_y(t^*, \mu)A_{xy}(\mu)d\mu]y_0 \ + H_y F_y(t^*, t_* + h_\upsilon)y_0).$$

Принцип ε-максимума для задачи (1)–(3) получим с помощью критерия ε-оптимальности [3] планов задачи (7), учтя динамическую природу последней. Для этого введем необходимые понятия.

3. Пусть $D = (D(T_u), D(T_\upsilon)), D(T_u) = (d_u(\tau), \tau\in T_u), D(T_\upsilon) = (d_\upsilon(s), s\in T_\upsilon)$; $T_{u\text{оп}} \subset T_u$, $T_{\upsilon\text{оп}} \subset T_\upsilon$, $|T_{u\text{оп}}| + |T_{\upsilon\text{оп}}| = m, -$ произвольные множества; $T_{\text{оп}} = \{T_{u\text{оп}}, T_{\upsilon\text{оп}}\}$; $D_{\text{оп}} = D(T_{\text{оп}}) = (d_u(\tau), \tau\in T_{u\text{оп}}$; $d_\upsilon(s), s\in T_{\upsilon\text{оп}})$.

Множество $T_{\text{оп}}$ называется *опорой* задачи (1)–(3), если не вырождена матрица $D_{\text{оп}}$, т. е. $\det D_{\text{оп}} \ne 0$.

Следуя [3], подсчитаем вектор потенциалов $\nu\in R^m$

$$\nu' = c_{\text{оп}}' D_{\text{оп}}^{-1},$$

где $c_{\text{оп}} = (c_u(\tau), \ \tau\in T_{u\text{оп}};\ c_\upsilon(s), \ s\in T_{\upsilon\text{оп}})$.

Совокупность $(\Delta_u(\tau), \ \tau\in T_u; \ \Delta_\upsilon(s), \ s\in T_\upsilon)$ с компонентами:

$$\Delta_u(\tau) = c_u(\tau) - \nu' d_u(\tau), \tau \in T_u;$$
$$\Delta_\upsilon(s) = c_\upsilon(s) - \nu' d_\upsilon(s), s \in T_\upsilon, \quad (9)$$

назовем копрограммой исходной задачи (1)–(3), сопровождающей опору $T_{\text{оп}}$.

Подставив (8) в (9), получим:

$$\Delta_u(\tau) = \int_\tau^{\tau+h_u} c'_x F_x(t^*, \mu) b_x(\mu) d\mu -$$
$$-\nu' \int_\tau^{\tau+h_\upsilon} H_x F_x(t^*, \mu) b_x(\mu) d\mu =$$
$$= \int_\tau^{\tau+h_u} (c'_x - \nu' H_x) F_x(t^*, \mu) b_x(\mu) d\mu, \tau \in T_u;$$

$$\Delta_\upsilon(s) = [c'_x F_{xy}(t^*, s+h_\upsilon) h_\upsilon^2 + c'_y F_y(t^*, s+h_\upsilon) -$$
$$-\nu' (H_x F_{xy}(t^*, s+h_\upsilon) h_\upsilon^2 + H_y F_y(t^*, s+h_\upsilon) h_\upsilon)] \times$$
$$\times b_y(s) = [(c'_x h_\upsilon^2 F_{xy}(t^*, s+h_\upsilon) + c'_y F_y(t^*, s+h_\upsilon) h_\upsilon -$$
$$-\nu' H_x h_\upsilon^2 F_{xy}(t^*, s+h_\upsilon) - \nu' H_y F_y(t^*, s+h_\upsilon)) \times$$
$$\times A_y(s) + h_\upsilon (c'_x - \nu' H_x) \times$$
$$\times \int_s^{s+h_\upsilon} F_x(t^*, \mu) A_{xy}(\mu) d\mu] b_y(s), \ s \in T_\upsilon. \quad (10)$$

Введем функции:

$$\psi_x(\cdot) = (\psi_x(\tau) \in R^{n_x}, \ \tau \in T),$$
$$\psi_y(\cdot) = (\psi_y(s) \in R^{n_y}, \ s \in T_\upsilon);$$
$$\psi'_x(\tau) = (c'_x - \nu' H_x) F_x(t^*, \tau), \ \tau \in T;$$
$$\psi'_y(s) = (c'_x F_{xy}(t^*, s) h_\upsilon^2 + c'_y F_y(t^*, s) -$$
$$-\nu' (H_x F_{xy}(t^*, s) h_\upsilon^2 + H_y F_y(t^*, s) h_\upsilon), \ s \in T_\upsilon. \quad (11)$$

Поскольку из (5), (6) следуют соотношения:

$$\dot\psi'_x(\tau) = (c'_x - \nu' H_x) \partial F_x(t^*, \tau) / \partial\tau =$$
$$= (c'_x - \nu' H_x)(-F_x(t^*, \tau) A_x(\tau)) = -\psi'_x(\tau) A_x(\tau);$$
$$\psi'_y(s) = (c'_x F_{xy}(t^*, s) h_\upsilon^2 + c'_y F_y(t^*, s) -$$
$$-\nu' (H_x F_{xy}(t^*, s) h_\upsilon^2 + H_y F_y(t^*, s) h_\upsilon) =$$
$$= \psi'_y(s+h_\upsilon) A_y(s) + h_\upsilon \int_s^{s+h_\upsilon} \psi'_x(\mu) A_{xy}(\mu) d\mu, \ s \in T_\upsilon;$$

то функции (11) являются решением *сопряженной системы*

$$\begin{cases} \dot\psi'_x(\tau) = -\psi'_x(\tau) A_x(\tau), \tau \in T; \\ \psi'_y(s) = \psi'_y(s+h_\upsilon) A_y(s) + h_\upsilon \int_s^{s+h_\upsilon} \psi'_x(\mu) A_{xy}(\mu) d\mu, \\ s \in T_\upsilon, \end{cases} \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\psi'_x(t^*) = c'_x - \nu' H_x, \ \psi'_y(t^*) = c'_y h_\nu - \nu' H_y. \quad (13)$$

Котраекторией, сопровождающей опору $T_{\text{оп}}$, назовем пару ($\psi_x(\cdot), \psi_y(\cdot)$), состоящую из непрерывной функции $\psi_x(\cdot)$ и дискретной в обратном времени с периодом квантования h_υ функции $\psi_y(\cdot)$, которые удовлетворяют сопряженной системе (12) с начальными условиями (13).

Компоненты копрограммы [3] с использованием котраектории принимают вид:

$$\Delta_u(\tau) = \int_\tau^{\tau+h_u} \psi'_x(\mu) b_x(\mu) d\mu, \ \tau \in T_u;$$
$$\Delta_\upsilon(s) = \psi'_y(s+h_\upsilon) b_y(s), \ s \in T_\upsilon.$$

Критерий субоптимальности для задачи линейного программирования (7) [3] на языке введенных понятий для задачи (1)–(3) звучит следующим образом.

Теорема (принцип ε-максимума). При любом $\varepsilon \geq 0$ для ε-оптимальности программы $(u(\cdot), \upsilon(\cdot))$ необходимо и достаточно существование такой опоры $T_{\text{оп}}$, при которой на сопровождающей ее котраектории $(\psi_x(\cdot), \ \psi_y(\cdot))$ выполняются условия квазимаксимума:

$$\int_\tau^{\tau+h_u} \psi'_x(\mu) b_x(\mu) d\mu \cdot u(\tau) =$$
$$= \max_{u \in U} \int_\tau^{\tau+h_u} \psi'_x(\mu) b_x(\mu) d\mu \cdot u - \varepsilon_u(\tau), \tau \in T_{\text{ин}} = T_u \setminus T_{u\text{оп}};$$

$$\psi'_y(s+h_\upsilon)b_y(s)\upsilon(s)=\max_{\upsilon\in V}\psi'_y(s+h_\upsilon)b_y(s)\upsilon-$$
$$-\varepsilon_\upsilon(s), s\in T_{\upsilon\text{н}}=T_\upsilon\setminus T_{\upsilon\text{оп}}; \quad (14)$$
$$\sum_{\tau\in T_{\text{ин}}}\varepsilon_u(\tau)+\sum_{s\in T_{\upsilon\text{н}}}\varepsilon_\upsilon(s)\le\varepsilon.$$

Доказательство основано на формуле приращения критерия качества и проводится аналогично доказательству соответствующего результата для задачи линейного программирования [3].

Из (14) при ε = 0 следует принцип максимума. Для оптимальности программы $(u(\cdot), \upsilon(\cdot))$ необходимо и достаточно существование такой опоры $T_{\text{оп}}$, при которой на сопровождающей ее котраектории $(\psi_x(\cdot), \psi_y(\cdot))$ выполняются условия максимума:

$$\int_\tau^{\tau+h_u}\psi'_x(s)b_x(s)ds\cdot u(\tau)=$$
$$=\max_{u\in U}\int_\tau^{\tau+h_u}\psi'_x(s)b_x(s)ds\cdot u, \tau\in T_{\text{ин}};$$

$$\psi'_y(s+h_\upsilon)b_y(s)\upsilon(s)=$$
$$=\max_{\upsilon\in V}\psi'_y(s+h_\upsilon)b_y(s)\upsilon, s\in T_{\upsilon\text{н}}.$$

4. Укажем на изменения, которые нужно внести в приведенные результаты для задачи (1)–(3) с многомерными управляющими воздействиями:

$$u(\cdot)=(u(t)\in U=\{u\in R^{r_u}: u_*\le u\le u^*\},\ t\in T),$$

$$\upsilon(\cdot)=(\upsilon(s)\in V=\{\upsilon\in R^{r_\upsilon}: \upsilon_*\le\upsilon\le\upsilon^*\},\ s\in T_\upsilon):$$

1) в уравнениях (2) вместо векторных функций $b_x(t),\ t\in T;\ b_y(s),\ s\in T_\upsilon$, участвуют матричные функции $B_x(t)\in R^{n_x\times r_u},\ t\in T;\ B_y(s)\in R^{n_y\times r_\upsilon}$, $s\in T_\upsilon$; 2) скалярные функции $c_u(\tau), \tau\in T_u;\ c_\upsilon(s)$, $s\in T_\upsilon$, заменяются векторными функциями $c_u(\tau)\in R^{r_u},\ \tau\in T_u;\ c_\upsilon(s)\in R^{r_\upsilon},\ s\in T_\upsilon$; 3) векторные функции $d_u(\tau),\ \tau\in T;\ d_\upsilon(s),\ s\in T_\upsilon$, становятся матричными $D_u(\tau)=(D_{uj}(\tau),\ j\in J_u=\{1,2,\dots,r_u\}),\ D_{uj}(\tau)$ – j-й столбец матрицы $D_u(\tau),\ \tau\in T_u;\ D_\upsilon(s)=(D_{\upsilon j},\ j\in J_\upsilon=\{1,2,\dots,r_\upsilon\}),$ $D_{\upsilon j}(s)$ – j-й столбец матрицы $D_\upsilon(s),\ s\in T_\upsilon$; 4) вместо множеств $T_{u\text{оп}}$, $T_{\upsilon\text{оп}}$ вводятся множества $S_{u\text{оп}}\subset S_u=J_u\times T_u$, $S_{\upsilon\text{оп}}\subset S_\upsilon=J_\upsilon\times T_\upsilon$; опорой является совокупность $S_{\text{оп}}=\{S_{u\text{оп}}, S_{\upsilon\text{оп}}\}$, $|S_{\text{оп}}|=|S_{u_{\text{оп}}}|+|S_{\upsilon\text{оп}}|=m$, на которой не вырождена (опорная) матрица $D_{\text{оп}}=(D_{u\text{оп}}, D_{\upsilon\text{оп}})$, где $D_{u\text{оп}}=D(S_{u\text{оп}})=(D_{uj}(\tau),\ \{j,\tau\}\in S_{u\text{оп}})$, $D_{\upsilon\text{оп}}=$ $=D(S_{\upsilon\text{оп}})=(D_{\upsilon j}(s),\ \{j,s\}\in S_{\upsilon\text{оп}})$; 5) скалярная копрограмма заменяется векторной; 6) критерий ε-максимума примет вид:

$$\int_\tau^{\tau+h_u}\psi'_x(\mu)B_{xj}(\mu)d\mu u_j(\tau)=$$
$$=\max_{u_{*j}\le u_j\le u^*_j}\int_\tau^{\tau+h_u}\psi'_x(\mu)B_{xj}(\mu)d\mu u_j-$$
$$-\varepsilon_{uj}(\tau),\{j,\tau\}\in S_{u\text{н}}=S_u\setminus S_{u\text{оп}};$$
$$\psi'_y(s+h_\upsilon)B_{yj}(s)\upsilon_j(s)=$$
$$=\max_{\upsilon_{*j}\le\upsilon_j\le\upsilon^*_j}\psi'_y(s+h_\upsilon)B_{yj}(s)\upsilon_j-$$
$$-\varepsilon_{\upsilon j}(s),\{s,j\}\in S_{\upsilon\text{н}}=S_\upsilon\setminus S_{\upsilon\text{оп}};$$
$$\sum_{\{j,\tau\}\in S_{u\text{н}}}\varepsilon_{uj}(\tau)+\sum_{\{j,s\}\in S_{\upsilon\text{н}}}\varepsilon_{\upsilon j}(s)\le\varepsilon.$$

ВЫВОД

Получены критерии оптимальности и субоптимальности программ для линейной задачи оптимального управления гибридной системой.

Область практического применения: автоматика автомобилей, управление химико-технологическими процессами и энергетическими системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габасова, О. Р.** Оптимизация линейных гибридных систем управления / О. Р. Габасова // Вестник БНТУ. – 2007. – № 2. – С. 71–75.

2. **Математическая** теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

3. **Альсевич, В. В.** Оптимизация линейных экономических моделей. Статические задачи / В. В. Альсевич, Р. Габасов, В. С. Глушенков. – Минск: БГУ, 2000. – 210 с.

Поступила 10.10.2008