

где $q = \max_{x \in [-1,1]} |q(x)|$. Учитывая (17), получаем неравенство

$$\|K(u)\| \leq |\lambda| \frac{q}{\pi} |u|,$$

с помощью которого легко доказывается следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть выполняется неравенство $|\lambda| \leq \lambda_0 < \frac{\pi}{2q}$. Тогда последовательность

(20) при любой функции $u_0 \in C^*$ сходится к единственному решению уравнения (18) u^* . При этом имеет место оценка

$$|u^* - u| \leq \frac{\lambda_0 \left(\frac{2q}{\pi}\right)^n}{1 - \lambda_0 \frac{2q}{\pi}} \max_{x \in [-1,1]} |u_1(x) - u_0(x)|. \quad (21)$$

Примечание. Если $u_0(x) = f(x)$, то неравенство (21) можно записать в виде

$$|u^*(x) - u_n(x)| \leq \frac{\lambda_0^{n+1} \left(\frac{2q}{\pi}\right)^{n+1}}{1 - \lambda_0 \frac{2q}{\pi}} \max_{x \in [-1,1]} |f(x)|. \quad (22)$$

Последовательность (20) на каждом шаге дает приближенное решение уравнения (18) с оценками погрешности (21), (22).

ВЫВОД

Методом последовательных приближений проведено исследование одного сингулярного интегродифференциального уравнения с интегралом, понимаемым в смысле главного значения по Коши, и одного интегрального уравнения с логарифмическим ядром. Соответствующие итерационные последовательности дают приближенные решения таких уравнений с оценками погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич, М. И. Теория струй идеальной жидкости / М. И. Гуревич. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
2. Пыхтеев, Г. Н. Общая и основная краевые задачи плоских струйных установившихся течений и соответствующие им нелинейные уравнения / Г. Н. Пыхтеев // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 2. – С. 32–44.
3. Пыхтеев, Г. Н. Некоторые методы решения одного нелинейного интегродифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости / Г. Н. Пыхтеев // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 2. – С. 72–86.
4. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
5. Александров, В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.

Поступила 14.04.2008

УДК 629.11.001.24:531.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА

Канд. техн. наук, доц. ЧЕПЕЛЕВА Т. И.

Белорусский национальный технический университет

Метод математического моделирования успешно используется для задач, возникающих при проектировании производства и производственных процессов. При установке нового оборудования могут быть кратковременные сбои производства. Сбои производства могут

быть и по ряду других причин – выход из строя оборудования, перегрузка складов и т. п. Наиболее важной задачей на стадии проектирования производственного комплекса является задача синхронизации отдельных элементарных актов процесса производства, согласования

их работы во времени. Для этого необходимо выбрать такие значения параметров процесса производства, которые в дальнейшем обеспечивали бы согласованную во времени работу всех элементов, рабочих блоков производства. В настоящее время нет общего метода решения данной задачи.

Метод моделирования позволяет проверить, действительно ли выбранные значения параметров обеспечивают достаточно гибкую синхронизацию процессов производства.

Если качество синхронизации процессов производства не достигается, то метод моделирования «подсказывает» о выборе параметров, подлежащих корректировке. Судя по параметрам, можно получить информацию о причинах срыва процессов производства или нарушениях технологических режимов, возникающих в результате неудовлетворительной синхронизации.

По результатам моделирования оценивается производительность отдельных элементов, узлов и линий блоков производства.

Следует заметить, что методом математического моделирования проводится дальнейшее отличие оптимальных размеров от отдельных деталей до объемов местных складов, чтобы не было опозданий в работе передачи процессов производства, срывов в работе, простоев оборудования.

Критерием оптимальности объемов производства может служить минимум суммарных потерь от простоя отдельных блоков производства до возможности нарушения режимов процесса порой из-за нехватки оборудования (карманов производства) или долго существующего устаревшего оборудования.

Производственные процессы можно рассматривать в различные промежутки времени как непрерывными, так и дискретными. Особое внимание уделяется срывам производства, некоторым нежелательным импульсным «всплескам» производства. Процесс производства можно описать в таких негативных ситуациях аналитически особыми сингулярными единичными функциями и дельта-функциями. Примером таких функций является единичная ступенчатая функция Хевисайда (рис. 1) [1]

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

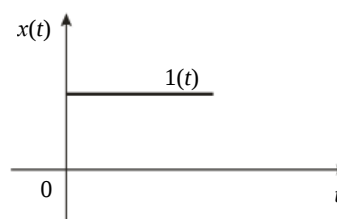


Рис. 1

Для описания отдельных моментов производственного процесса более удобно пользоваться смещенными единичными функциями (рис. 2, 3):

$$x(t) = 1(t \pm \alpha) = \begin{cases} 0, & t \leq \pm \alpha; \\ 1, & t \geq \pm \alpha; \end{cases} \quad (1)$$

$$x(t) = 1(-t) = \begin{cases} 0, & t > 0; \\ 1, & t \leq 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$x(t) = 1(-t \pm \alpha) = \begin{cases} 0, & t > \pm \alpha; \\ 1, & t \leq \pm \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

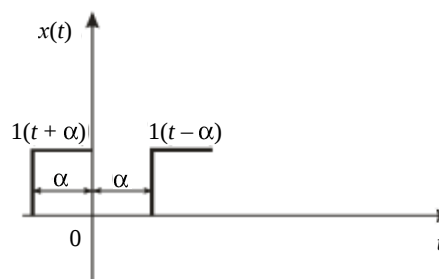


Рис. 2

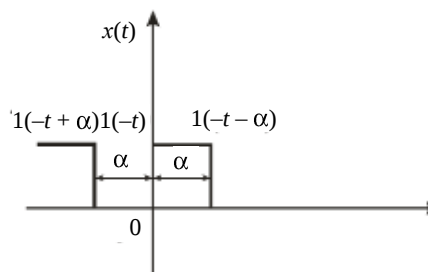


Рис. 3

Производственные процессы вида (2), (3) – это процессы с отрицательной амплитудой. Они, как правило, изображают задержки производства, имеют импульсный характер. Приме-

ним к импульсному процессу производства прямое преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} S(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) e^{\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = \\ &= \frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} = \frac{1}{\alpha+i\omega}; \\ S(i\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_k(\alpha\omega) = \frac{1}{i\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, экспоненциальный импульсный производственный процесс переходит в единичный скачок. Спектр неединичного скачка будет иметь вид

$$S_c(\omega) = \frac{c}{\omega}, \text{ где } x(t) = c1(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ c, t \geq 0. \end{cases}$$

Откуда следует теорема о запаздывании производственных процессов.

Теорема 1. Если процесс производства запаздывает по времени на величину α , то огибающая спектра амплитуд смещенных скачков производственного процесса совпадает с $S(\omega)$:

$$\begin{aligned} S_{\alpha}(\omega) &= S(\omega) = \frac{1}{\omega}; \\ S_{\alpha}(i\omega) &= S(i\omega) e^{\pm i\alpha\omega} = \frac{1}{i\omega} e^{\pm i\alpha\omega}. \end{aligned}$$

Определение. Дельта-функцией, или функцией Дирака, дельта-процесса производства называется производная единичной функции вида

$$x(t) = \delta(t) = 1'(t) = \begin{cases} 0, t < 0; \\ \infty, t = 0; \\ 0, t > 0. \end{cases}$$

Замечание. Следует отметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1(t) dt = \infty.$$

Теорема 2. Смещение дельта-процесса на величину α не изменяет его площади.

Доказательство. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \alpha) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(U) dU = 1.$

Если $t - \alpha = U$, то $dt = dU$, а $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 1'(t) dt = 1(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1(\infty) - 1(-\infty) = 1, \text{ учитывая,}$$

что $\delta(t) = \delta(-t)$ (четность дельта-функции).

Теорема 3. При увеличении производственного процесса в $\delta(t)$ раз получается дельтаобразный процесс производства (неединичный, импульсный) с достаточно большой амплитудой и нулевой длительностью, площадь которого

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x(t) \delta(t) dt = x(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = x(0).$$

Теорема 4. Увеличение производственного процесса в $\delta(t \pm \alpha)$ раз приводит к выделению (фильтрации) из $x(t)$ мгновенного отсчета в момент времени t , равной величине смещения α :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t \pm \alpha) dt = x(\pm \alpha).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t \pm \alpha) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(U \pm \alpha) \delta(U) dU = \\ &= x(0 \pm \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(U) dU = x(\pm \alpha), \end{aligned}$$

где $t \pm \alpha = U$, $t = U \pm \alpha$, $dt = dU$ (рис. 4).

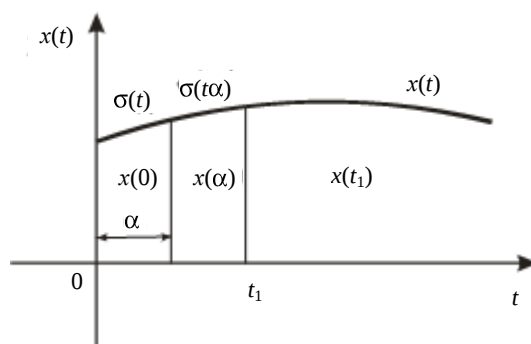


Рис. 4

Теорема 5. Единичный импульс комплексного спектра процесса производства совпадает со своим модулем: $S(i\omega) = S(\omega) = 1$.

Доказательство. Найдем спектр единичного импульса процесса производства

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega 0} \int_{-\infty}^{+0} \delta(t) dt = 1.$$

Спектр амплитуд процесса производства $S(\omega)$ изображен на рис. 5.

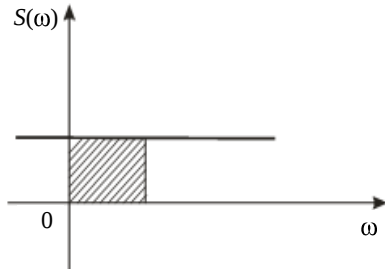


Рис. 5

Теорема 6. Если спектр дельта-процесса производства ограничен некоторой частотой ω_0 , то процесс производства может быть описан функцией отсчета вида

$$x(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t},$$

которая с увеличением абсолютного значения аргумента изменяется по закону затухающего синуса, а спектр смещенного единичного импульса процесса производства $\delta(t - \alpha)$

$$e^{-i\omega\alpha} = S_\alpha(i\omega), \quad \alpha = \text{const.}$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из определения спектра процесса производства из непосредственного разложения экспоненциальной функции по синусам и косинусам (рис. 6).

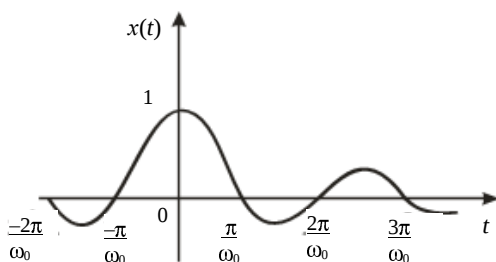


Рис. 6

Представим процесс производства как последовательность прямоугольных импульсов длительностью α_i .

Теорема 7. Функциональная зависимость периодической последовательности прямоуголь-

ных импульсов производственных процессов представима в виде

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c \left(1(t - m\Delta t) - 1\left(t - m + \frac{1}{p}\right)\Delta t \right),$$

если задана скважность импульсов процесса производства $p = \frac{\Delta t}{\alpha_n}$.

Доказательство. Изобразим графически последовательность прямоугольных импульсов длительностью α_n (рис. 7).

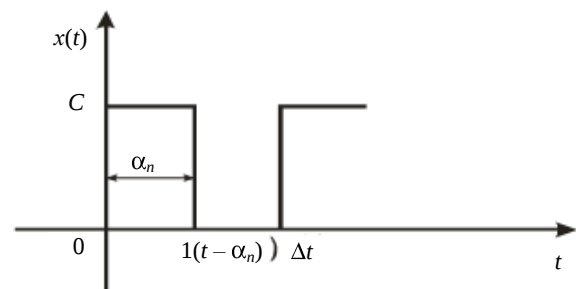


Рис. 7

Импульс последовательности производственных процессов в начале координат будет иметь вид

$$x_i(t) = c(1(t) - 1(t - \alpha_n)),$$

а следующий за ним процесс можно описать так

$$x_{i+1}(t) = c(1(t - \alpha_n) - 1(t - \Delta t - \alpha_n))$$

и т. д. Заметим, что n -й импульс, начало которого $t = n\Delta t$, где Δt – период, будет иметь вид

$$x_n(t) = c(1(t - n\Delta t) - 1(t - n\Delta t - \alpha_n)).$$

Пусть $p = \frac{\Delta t}{\alpha_n}$, тогда

$$x_m(t) = c \left(1(t - m\Delta t) - 1\left(t - m + \frac{1}{p}\right)\Delta t \right);$$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c \left(1(t - m\Delta t) - 1\left(t - m + \frac{1}{p}\right)\Delta t \right)$$

Теорема 8. Если известна длительность α одиночного прямоугольного импульса процесса производства, то математически процесс про-

изводства представим в виде суммы двух одинаковых скачков производства

$$x(t) = c \left(1 \left(t + \frac{\alpha}{2} \right) - 1 \left(t - \frac{\alpha}{2} \right) \right),$$

со спектром импульса $c\alpha \frac{\sin\left(\omega \frac{\alpha}{2}\right)}{\omega \frac{\alpha}{2}}$ и модулем

спектра $S(\omega) = \frac{c\alpha}{Sa\left(\omega \frac{\alpha}{2}\right)}$, дающего уравнение

оггибающей сплошного спектра амплитуд процесса производства, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Доказательство. Поскольку спектр единичного скачка $S(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-i\frac{\pi}{2}}$, то, применив теоремы о сумме и запаздывании процесса производства, получим

$$\begin{aligned} S(i\omega) &= c \left(\frac{1}{i\omega} e^{\frac{i\omega\alpha}{2}} - \frac{1}{i\omega} e^{-\frac{i\omega\alpha}{2}} \right) = \\ &= \frac{c}{i\omega} 2i \sin \frac{\omega\alpha}{2} = c\alpha \frac{\sin\left(\omega \frac{\alpha}{2}\right)}{\omega \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда $S(\omega) = \frac{c\alpha}{Sa\left(\omega \frac{\alpha}{2}\right)}$ (рис. 8).

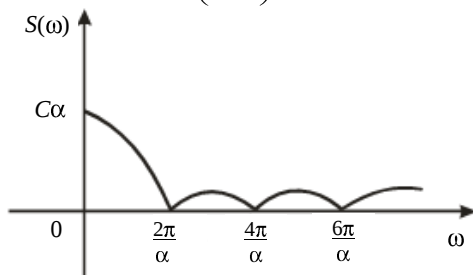


Рис. 8

Замечание. Геометрическая интерпретация рассмотренного скачкообразного производственного процесса длительностью α есть заштрихованная область (рис. 9).

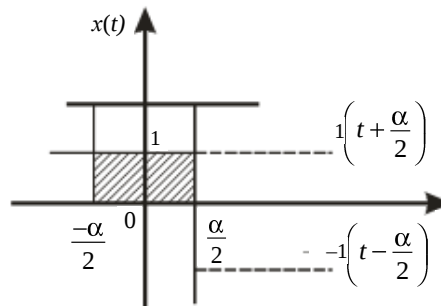


Рис. 9

ВЫВОД

Предложенные математические модели, описывающие аналитически и графически негативные явления (задержки, срывы) процессов производства, могут быть использованы на стадии проектирования производства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершова, В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск: Вышэйш. шк., 1976. – 256 с.

Поступила 17.07.2008