предыдущих слоев к текущему и «пробегая» вдоль кривой θ_j, методом прогонки от $j=0$ до $j=m$ осуществляем вычисления u_j^{i+1} по первому уравнению равновесия и ϑ_j^{i+1} – по второму, до $i=n-1$. Таким образом, находим численное неосесимметричное решение задачи. Зная вектор перемещения точек цилиндра u_j^{i+1} и ϑ_j^{i+1}, по (4) и (3) можем построить тензоры деформаций и напряжений в любой точке по периметру цилиндра с дальнейшим пересчетом характеристик НДС через промежуток Δt для учета температурной ползучести по (5).

В Ы В О Д

Окончательное суждение об описанном НДС цилиндра может быть сделано лишь после соответствующих реакторных и других испытаний, однако проектирование можно существенным образом облегчить путем использования подобных оценочных расчетов термонапряжений, позволяющих сразу же в какой-то мере приблизиться к наиболее рациональным конструкциям. Между тем топливные материалы подвергаются и нейтронному облучению, которое существенно меняет характеристики материала. Речь идет о радиационном распухании материалов, которое является принципиально новым явлением и свойственно только элементам конструкций ядерной энергетики. Поэтому расчетно-теоретическое обоснование НДС моделей топливных сердечников остается неполным без учета облучения. Отсюда вытекает необходимость моделирования расчета НДС длинного сплошного цилиндра, в котором будет рассматриваться поведение материалов ТВЭЛов при облучении. А полученные в работе выражения и предложенная численная схема решения задачи определения неосесимметричного НДС длинного цилиндра, подверженного неравномерному нагреву в условиях температурной ползучести, может послужить основой для разработки и проведения подобных практических расчетов на прочность.

Рис 3

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Куликов, И. С.** Прочность элементов конструкций при облучении / И. С. Куликов, Нестеренко, Б. Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1990. – 144 с.

2. **Куликов, И. С.** Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И. С. Куликов, Б. Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1984. – 104 с.

3. **Тимошенко, С. П.** Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М., 1979. – 551 с.

4. **Ширвель, П. И.** О неосесимметричном НДС неравномерно нагретого длинного сплошного цилиндра, подверженного нейтронному облучению / П. И. Ширвель, И. С. Куликов // Машиностроение: респ. межвед. сб. – Минск, 2008. – Вып. 24. – Т. 1. – С. 185–191.

5. **Яненко, Н. Н.** Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195 с.

6. **Вольмир, А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа / А. С. Вольмир. – М., 1976. – 416 с.

7. **Годунов, С. К.** Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1973. – 440 с.

Поступила 03.03.2009

УДК 517.4

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА КАК ЧАСТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Канд. физ.-мат. наук ГАХОВИЧ А. С.

Белорусский национальный технический университет

В [1] предложена общая формальная схема построения интегральных преобразований, а в [2] получены преобразования Фурье, Лапласа и Лапласа – Карсона как простейшие реализации указанной схемы. Данная работа посвящена применению общей схемы для построения преобразования Меллина.

Общая идея указанной схемы заключается в следующем. Пусть в множестве функций действительного переменного $f(t)$ с произвольной областью определения a, b задан некоторый линейный оператор *T*. Ставится задача нахождения на множестве функций $f(t)$ линейного обратимого отображения *L*: $f(t) \to F(u)$ с множеством значений, совпадающим с множеством функций $F(u)$, определенных в общем случае на линии *l* плоскости комплексного переменного, и удовлетворяющих соотношению

$$L\ Tf(t)\ = k(u)F(u),$$

где $k(u)$ – некоторая фиксированная функция. Другими словами, отображение *L* находим из условия, чтобы применение оператора *T* к «оригиналу» $f(t)$ было равносильно обычному алгебраическому умножению «изображения» $F(u)$ на фиксированную функцию $k(u)$.

Как показано в [1], в случае оператора *T* дифференциального типа искомое отображение и ему обратное представляют собой взаимно обратную пару интегральных преобразований:

$$L\ \ f(t)\ \equiv \int_a^b f(t)\psi(u;\ t)dt = F(u); \qquad (1)$$

$$L^{-1}\ \ F(u)\ \equiv \int_l F(u)\varphi(u;t)du = f(t) \qquad (2)$$

с ядрами $\varphi(u;\ t)$ и $\psi(u;\ t)$, являющимися собственными функциями операторов *T* и ему сопряженного T^*, соответствующими собственному значению $k(u)$. Собственные функции операторов определяются с точностью до множителей, зависящих в данном случае от *u*:

$$\varphi(u;\ t) = c_1(u)\varphi_u(t); \quad \psi(u;\ t) = c_2(u)\psi_u(t),$$

где $\varphi_u(t)$ и $\psi_u(t)$ – фиксированные собственные функции. Выбирая конкретный вид одного из сомножителей, например $c_1(u)$, второй сомножитель $c_2(u)$ находим непосредственным подсчетом из формул (1), (2) при некоторых $f(t)$ и $F(u)$, удобных для вычислений. При выборе различных $c_1(u)$ получаем эквивалентные отображения *L*, являющиеся различными модификациями одного и того же интегрального преобразования.

Функция $k(u)$ из соображений удобств практических приложений, простоты и симметрии взаимно обратных преобразований (1) и (2) выбирается, как правило, равной $\pm u$ либо $\pm u^2$.

Для вывода аналогичных выражений интегральных преобразований (1), (2) достаточно сопряженности операторов *T* и T^* на множестве соответствующих собственных функций:

$$T\varphi_u(t);\ \psi_u(t)\ =\ \varphi_u(t);\ T^*\psi_u(t)\ .$$

Переходим к конкретной реализации описанной схемы. Рассмотрим множество функций $f(t)$, определенных на $(0; +\infty)$ и удовлетворяющих условиям, которые будем налагать по мере необходимости. Пусть в качестве *T* на указанном множестве функций задан оператор $T = t\dfrac{d}{dt}.$ Сопряженный оператор, очевидно, имеет вид $T^* = -\dfrac{d}{dt}t.$

Собственные функции операторов *T* и T^*, соответствующие собственному числу $k(u)$ при фиксированном *u*, имеют следующие аналитические выражения:

$$\varphi_u(t) = t^{k(u)};\ \ \psi_u(t) = t^{-k(u)-1}.$$

Тогда искомое интегральное преобразование согласно (1) запишется в виде

$$F(u) = c_2(u)\int_0^{+\infty} f(t)t^{-k(u)-1}dt\ .$$

Положив для простоты $k(u) = -u$, будем иметь:

$$F(u)=c_2(u)\int_0^{+\infty} f(t)t^{u-1}dt \qquad (3)$$

и

$$\varphi_u(t)=t^{-u}.$$

Если комплексную переменную u представить в виде $u=\delta+i\tau$ и для рассматриваемых функций $f(t)$ потребовать выполнения условия $f(t)t^{\delta_0-1}\in L_1(0;+\infty)$ при некотором δ_0, то нетрудно заметить, что «изображение» $F(u)$, вычисляемое по (3), будет определено в плоскости комплексного переменного u на вертикальной прямой $u=\delta_0+i\tau,\ \tau\in(-\infty;+\infty)$. Тогда обратное преобразование L^{-1} согласно (2) принимает вид

$$f(t)=\int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty} F(u)c_1(u)t^{-u}du,$$

Таким образом, имеем следующую взаимно обратную пару интегральных преобразований:

$$F(u)=c_2(u)\int_0^{\infty} f(t)t^{u-1}dt; \qquad (4)$$

$$f(t)=\int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty} F(u)c_1(u)t^{-u}du, \qquad (5)$$

в которых остается уточнить сомножители $c_1(u)$ и $c_2(u)$.

Мы вправе произвольно распорядиться одним из сомножителей. Положим, например, $c_1(u)=\dfrac{1}{2\pi i}$ и выберем в качестве изображения $F(u)$ любую функцию, для которой интеграл, стоящий в правой части формулы (5), вычисляется достаточно просто. Пусть $F(u)$ совпадает с гамма-функцией Эйлера, т. е. $F(u)=\Gamma(u)$. Тогда при $\mathrm{Re}\,u=\delta_0>0$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty}\Gamma(u)t^{-u}du=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname*{Res}_{(-n)}(\Gamma(u)t^{-u})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n=e^{-t},$$

т. е. $f(t)=e^{-t}$, так как $\Gamma(u)$ имеет простые полюсы в точках $u=-n,\ n=0,1,\ldots$, с вычетами, соответственно равными $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Из (4) находим искомое значение $c_2(u)$

$$c_2(u)=\frac{\Gamma(u)}{\int_0^{\infty} e^{-t}t^{u-1}dt}=1.$$

Итак, окончательно получаем пару взаимнообратных интегральных преобразований Меллина:

$$F(u)=\int_0^{\infty} f(t)t^{u-1}dt;$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_0-i\infty}^{\delta_0+i\infty}F(u)t^{-u}du$$

для функций $f(t)$, удовлетворяющих условию: $f(t)t^{\delta_0-1}\in L_1(0;+\infty)$.

ВЫВОД

Полученные результаты могут быть использованы для построения различных интегральных преобразований, широко применяемых во многих областях науки и техники при решении дифференциальных и интегральных уравнений, описывающих тот или иной реальный физический процесс.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гахович, А. С.** К вопросу об интегральных преобразованиях / А. С. Гахович // Весці АН БССР, сер. фіз.-мат. навук. – 1987. – № 6.

2. **Гахович, А. С.** Простейшая реализация общей схемы построения интегральных преобразований / А. С. Гахович. – ВИНИТИ. – № 6245. – В-88. – Деп. 03.09.1988.

Поступила 21.11.2008