

## РЕШЕНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

*Докт. физ.-мат. наук, проф. КУЛИКОВ И. С.,  
магистрант ШИРВЕЛЬ П. И.*

*Белорусский национальный технический университет*

Одним из главных факторов, определяющих работоспособность ядерного реактора АЭС, являются температурные условия работы его тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ), имеющих, как правило, форму длинных цилиндров. Жесткость условий работы ТВЭЛов (большие тепловые и радиационные нагрузки, высокое внешнее давление теплоносителя) предполагает повышенные требования к ним. Это требует от механики деформируемого твердого тела развития методов определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тел цилиндрической геометрии, учитывающих влияние нелинейных деформаций.

Одной из причин появления напряжений в сплошном теле является именно неравномерный нагрев. Заметим, что ТВЭЛы активной зоны реактора работают при высоких температурах. Поэтому расчетно-теоретическое исследование НДС ТВЭЛов и включает в себя в первую очередь определение температурных полей и возникающих термонапряжений. При этом предполагаем, что теплофизические и механические характеристики материала остаются неизменными (или меняются в соответствии с полем температуры). Это относится и к прочностным свойствам материала. Абсолютное значение и характер распределения поля температуры определяются мощностью внутреннего тепловыделения, теплофизическими свойствами материала и условиями теплосъема с поверхности цилиндра. Заметим, что ТВЭЛы чаще всего представляют собой длинные ци-

линдры с произвольным поперечным сечением. Это позволяет принять методы плоской задачи термоупругости для анализа термонапряженного состояния. Все поперечные сечения ТВЭЛа эквивалентны, за исключением тех, которые расположены вблизи концов. Такая идентичность сечений вытекает из принципа Сен-Венана. Так как поперечное сечение цилиндрического ТВЭЛа существенно меньше его длины, данная система находится в состоянии плоской деформации и все сечения деформируются одинаково и только в своей плоскости, т. е. все сечения расположены в одних и тех же условиях.

Исследуем неосесимметричное НДС однородного бесконечно длинного, сплошного цилиндра (рис. 1), находящегося в неравномерном температурном поле  $T(r, \theta)$  и подвергающегося действию приложенной нагрузки  $P$  (внешнее давление) с учетом деформации тепловой ползучести. В реальности это модель НДС топливного цилиндрического сердечника ТВЭЛа активной зоны реактора АЭС. Уравнение равновесия для такой модели имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами тензора напряжений зависимостями (2):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta + \sigma_z) - \varepsilon_r^T + \varepsilon_r^c; \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r + \sigma_z) - \varepsilon_\theta^T + \varepsilon_\theta^c; \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_r + \sigma_\theta) - \varepsilon_z^T + \varepsilon_z^c; \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{\theta r} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta} + \varepsilon_{r\theta}^c.
 \end{aligned}
 \quad (2)$$

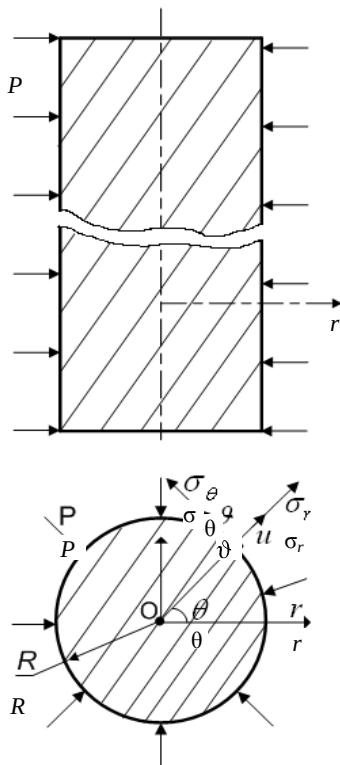


Рис. 1. Модель топливного сердечника

Предполагая условие плоского деформирования, принимаем:  $\varepsilon_z = 0$ ;  $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = 0$ . Тогда из (2) имеем  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{r\theta}$ . Так как деформация ползучести происходит при постоянном объеме материала, компоненты  $\varepsilon^c$  связаны условием несжимаемости:  $\varepsilon_r^c + \varepsilon_\theta^c + \varepsilon_z^c = 0$ . Использование условия несжимаемости упрощает запись выражений для главных напряжений. В результате компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\
 &\times ((1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - \varepsilon_r^T(1+\nu) - \varepsilon_r^c(1-2\nu));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\
 &\times ((1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - \varepsilon_r^T(1+\nu) - \varepsilon_\theta^c(1-2\nu)); \\
 \sigma_z &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \times \\
 &\times \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) - \varepsilon_r^T(1+\nu) + (\varepsilon_r^c + \varepsilon_\theta^c)(1-2\nu); \\
 \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{r\theta} - \varepsilon_{r\theta}^c.
 \end{aligned}
 \quad (3)$$

Действующее на цилиндр неоднородное температурное поле обуславливает появление термонапряжений, физическая сущность которых связана с неоднородной температурной деформацией различных участков цилиндра. В условиях неоднородного температурного поля горячие участки стремятся расширяться, а соседние холодные участки не допускают этого. Поэтому горячие участки материала цилиндра находятся в состоянии сжатия, а холодные области материала – в состоянии растяжения.

В (3) компоненты тензора деформации связаны с компонентами вектора перемещений геометрическими уравнениями (соотношения Коши):

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}; \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{\vartheta}{r} \right),
 \end{aligned}
 \quad (4)$$

где  $u, \vartheta$  – компоненты вектора перемещения в радиальном и окружном направлениях.

Объемные (температурные) деформации в цилиндре определим следующим образом:  $\varepsilon_r^T = \varepsilon_\theta^T = \varepsilon_z^T = \varepsilon_{r\theta}^T = \varepsilon^T = \alpha T(r, \theta)$ , где  $T(r, \theta)$  – заданная функция в [1, 2]. Соответственно для цилиндра  $T(r, \theta) = Ts(\theta) + \frac{q_v}{4\lambda} (R^2 - r^2)$ , где  $R$  – радиус цилиндра;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала цилиндра;  $q_v$  – тепловыделение в единице объема материала;  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала цилиндра;  $Ts(\theta)$  – температура поверхности цилиндра, определяется из задачи теплообме-

на между теплоносителем и поверхностью цилиндра.

Зададим механические (необратимые) деформации температурной ползучести. При известном законе изменения интенсивности скорости ползучести  $\dot{\epsilon}_u = f(\sigma_u, t, T, \Phi)$  деформации ползучести на каждом временном шаге определим из выражений (5):

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijn}^c &= \epsilon_{ij(n-1)}^c + \Delta_n \epsilon_{ij}^c; \\ \Delta_n \epsilon_{ij}^c &= \dot{\epsilon}_{ij(n-1)}^c \Delta_n t; \\ \dot{\epsilon}_{ij(n-1)}^c &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{u(n-1)}^c}{\sigma_{u(n-1)}^c} s_{ij}; \\ \dot{\epsilon}_u^c &= f(\sigma_u, t, T, \Phi); \\ \sigma_u &= \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}},\end{aligned}\quad (5)$$

где  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$ ;  $\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{3}$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $i, j = r, \theta$ ;  $\Phi = \phi t$  – интегральный нейтронный поток;  $\phi$  – плотность нейтронного потока;  $t$  – время. Отметим, что в случае одноосного напряженного состояния согласно (5) интенсивность скорости ползучести равна скорости ползучести материала:  $\dot{\epsilon}_{ii}^c = \dot{\epsilon}_u^c = f(\sigma_u, t, T, \Phi) = A \sigma_{ii}^m$ , что значительно упрощает процедуру расчета деформаций ползучести.

Учитывая соотношения Коши (4), перейдем от деформаций к перемещениям в полученных выражениях (3) и, подставляя эти соотношения в уравнения равновесия (1), получаем систему уравнений равновесия, выраженную через перемещения (6):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u + \frac{1}{2r(1-\nu)} \times \\ \times \left( \frac{1-2\nu}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} 4\nu - 3 \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) = \\ = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial \epsilon^T}{\partial r} + \frac{1-2\nu}{(1-\nu)r} \left( \frac{\partial \epsilon^T}{\partial \theta} + \epsilon_\theta^c - \epsilon_r^c - \frac{\partial \epsilon_{r\theta}^c}{\partial \theta} - \frac{\partial \epsilon_r^c}{\partial r} r \right); \\ \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \vartheta + \frac{1}{r(1-2\nu)} \times \\ \times \left( \frac{2(1-\nu)}{r} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-4\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \\ = 2 \frac{\partial \epsilon^T}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon^T}{\partial \theta} + \frac{4}{r} \epsilon_{r\theta}^c. \end{cases} \quad (6)$$

Определение НДС поставленной задачи сводится к решению системы уравнений равновесия (6) со следующими граничными условиями:

$$u = 0 \text{ при } r = 0. \quad (7)$$

Ввиду симметрии напряженно-деформированного состояния относительно радиальной плоскости, так как температурное поле цилиндра симметрично ( $0 \leq \theta \leq \theta^0$ ), справедливы также условия:

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \theta^0, \quad (8)$$

где  $\theta^0$  может принимать различные значения в зависимости от закона распределения температуры по периметру (период функции распределения температуры).

Принимая, что в начале координат  $\epsilon_r \approx \epsilon_\theta$ , и учитывая условие (8), получаем:

$$\vartheta = 0 \text{ при } r = 0; \quad (9)$$

$$\sigma_r = -P \text{ при } r = 0. \quad (10)$$

Отметим, что аналитическое решение задачи термоупругости удастся построить лишь в исключительно редких случаях. В основном это относится к линейным уравнениям механики для классических геометрических форм. Большинство же природных физических процессов описывается нелинейными уравнениями. Аналитическое решение подобных уравне-

ний известно лишь для единичных случаев. Поэтому решение нелинейных задач сводится к использованию численных методов, т. е. к тем результатам, которые получены после приближения-замены исходного уравнения в области существования решения. Главное преимущество этих методов заключается в том, что они позволяют получить решение задачи в любом случае (и тогда, когда неизвестно аналитическое решение). Заметим, что частные случаи решения уравнения теплопроводности для различных тел как с источниками теплоты, так и без них, рассмотрены во многих работах. Однако эти решения могут быть получены лишь в том случае, если функция распределения источников теплоты допускает интегрирование уравнения. Примером может служить вывод формул для термических напряжений в полом цилиндра [3]. Недостаток таких решений температурных задач состоит еще и в том, что эти формулы получены из интегральных соотношений, выведенных применительно к телам, не испытывающим внешних нагрузок и влияния температурной ползучести. В действительности же топливный сердечник испытывает напряжение не только вследствие нагрева, но и из-за действия внешнего давления со стороны газового зазора и ползучести материала. Поэтому аналитические интегральные формулы решения нельзя принять для проводимого расчета.

Для интегрирования уравнений (6) используем метод конечных разностей. В частности, в [4] предлагался численный метод решения подобной задачи. Суть разработанного метода состоит в следующем. На первом этапе разрешаем неосесимметричную задачу конечно-разностным методом при значении  $\sigma_r = -P$ , равных

нулю. Для этого в области изменения переменных  $0 \leq \theta \leq \theta^0$ ,  $0 \leq r \leq R$  строим сетку из линий  $\theta = \text{const}$  и  $r = \text{const}$  (рис. 2).

$i \rightarrow r$

Разобьем отрезок  $[0, R]$  равноотстоящими точками:  $r_0 = 0$ ,  $r_n = R$ ,  $r_i = ih_r$ ,  $h_r = \frac{R}{n}$ ,  $i = -1, 0, 1, \dots, n$ . Аналогично отрезок  $[0, \theta^0]$  равноотстоящими точками:  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_m = \theta^0$ ;  $\theta_j = jh_\theta$ ,  $h_\theta = \frac{\theta^0}{m}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , где  $h_r$  и  $h_\theta$  – шаги сетки в радиальном и окружном направлениях. Выпишем неявную разностную схему с весовыми коэффициентами [5]. Это значит, что для вычисления производных по  $\theta$  в точке  $r_i$  разностной схемы используются значения сеточных функций на  $(n + 1)$ -м и  $(n - 1)$ -м слоях по радиусу. Так,  $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) = h_\theta^{-2} \Lambda_2(\alpha u_j^{i+1} + \beta u_j^{i-1})$ , причем  $\alpha + \beta = 1$ . Производные по радиусу и угловой координате аппроксимируем конечно-разностными выражениями. Для первого уравнения системы (6) имеем:

$$\frac{2\nu - 1}{2r^2(1 - \nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + F_1(u, \vartheta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}; \quad (11)$$

$$F_1(u, \vartheta) = - \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u + \frac{1}{2r(1 - \nu)} \times \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} (4\nu - 3) \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) - C_1(\epsilon^H) \right); \quad (12)$$

$$C_1(\epsilon^H) = \frac{1 - 2\nu}{r(1 - \nu)} \times \left( \frac{\partial \epsilon^T}{\partial \theta} + \epsilon_\theta^c - \epsilon_r^c - \frac{\partial \epsilon_r^c}{\partial \theta} - \frac{\partial \epsilon_r^c}{\partial r} r \right) + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial \epsilon^T}{\partial r}; \quad (13)$$

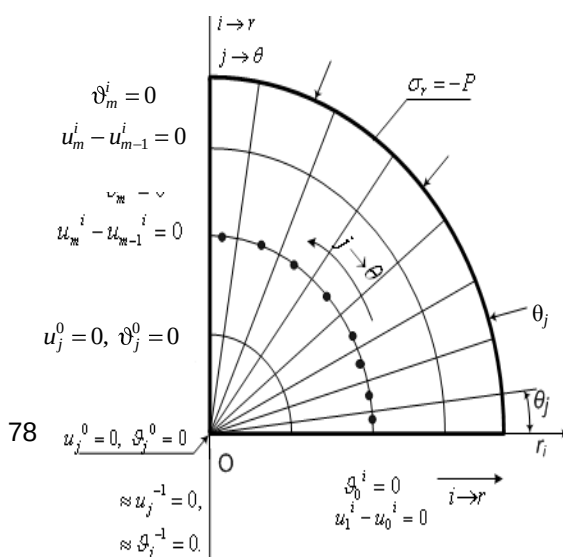


Рис. 2. Схема численного определения НДС

$$\frac{2\nu-1}{2r^2(1-\nu)}h_0^{-2}\Lambda_2(\alpha u_j^{i+1}+\beta u_j^{i-1})+F_1(u,\vartheta)=$$

$$=\frac{u_j^{i+1}-2u_j^i+u_j^{i-1}}{h_r^2}; \quad (14)$$

$$u_j^{i+1}-2u_j^i+u_j^{i-1}=\frac{2\nu-1}{2r^2(1-\nu)}\frac{h_r^2}{h_0^2}\Lambda_2\times$$

$$\times(\alpha u_j^{i+1}+\beta u_j^{i-1})+F_1(u,\vartheta)h_r^2; \quad (15)$$

$$\chi_1=\frac{2\nu-1}{2r^2(1-\nu)}\frac{h_r^2}{h_0^2}\alpha; \quad \chi_2=\frac{2\nu-1}{2r^2(1-\nu)}\frac{h_r^2}{h_0^2}\beta. \quad (16)$$

Соответствующая система, отвечающая первому уравнению равновесия (6), может быть записана в следующем виде:

$$\chi_1 u_{j+1}^{i+1}-(1+2\chi_1)u_j^{i+1}+\chi_1 u_{j-1}^{i+1}=$$

$$=-2u_j^i+u_j^{i-1}(1-\chi_2\Lambda_2)-F_{1j}^i(u,\vartheta)h_r^2. \quad (17)$$

Аналогично можно представить второе уравнение равновесия системы (6):

$$\xi_1 \vartheta_{j+1}^{i+1}-(1+2\xi_1)\vartheta_j^{i+1}+\xi_1 \vartheta_{j-1}^{i+1}=$$

$$=-2\vartheta_j^i+\vartheta_j^{i-1}(1-\xi_2\Lambda_2)-F_{2j}^i(u,\vartheta)h_r^2; \quad (18)$$

$$\xi_1=\frac{2(\nu-1)}{r^2(1-2\nu)}\frac{h_r^2}{h_0^2}\alpha; \quad \xi_2=\frac{2(\nu-1)}{r^2(1-2\nu)}\frac{h_r^2}{h_0^2}\beta; \quad (19)$$

$$F_2(u,\vartheta)=-\left(\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\vartheta+\frac{1}{r(1-2\nu)}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}(4\nu-3)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right)-C_2(\varepsilon^H); \quad (20)$$

$$C_2(\varepsilon^H)=2\alpha\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{2}{r_{i+1}}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\times$$

$$\times\alpha\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{4}{r_{i+1}}(\alpha T+\varepsilon_{r\theta}^c). \quad (21)$$

Слагаемые  $F_{1j}^i(u,\vartheta)$  нелинейные относительно  $u_j^i, \vartheta_j^i$ , поэтому для решения уравнений непосредственно неприменимы методы, развитые для линейных систем. Однако решение может быть построено по методу итераций [6]. На каждом шаге последовательных приближений величины  $F_{1j}^i(u,\vartheta)$  вычисляются по зна-

чениям сеточных функций, найденных в результате предыдущей итерации. В результате этого на каждом шаге итерационного процесса уравнения линейны. А начальное приближение для итерационного процесса находится путем экстраполяции уже вычисленных значений искоемых сеточных функций, относящегося к предыдущему радиусу.

Граничные условия (7)–(10) в разностной форме примут вид:

$$\left\{\begin{aligned} u_j^0=0, \quad \vartheta_j^0=0, \quad \vartheta_0^i=0, \quad \vartheta_m^i=0, \\ u_1^i-u_0^i=0, \quad u_m^i-u_{m-1}^i=0; \\ \frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{h_r}(1-\nu)+\nu\left(\frac{u_j^n}{R}+\frac{\vartheta_j^n-\vartheta_{j-1}^n}{Rh_0}\right)= \\ =\alpha T_j^n(1+\nu)+\varepsilon_r^{cn}(1-2\nu)-\frac{P(1+\nu)(1-2\nu)}{E}. \end{aligned}\right. \quad (22)$$

Начальная система уравнений (6) стала эквивалентной системам (17) и (18) с граничными условиями (22). Системы уравнений (17), (18) имеют матрицы трехдиагональной структуры и могут быть решены по методу прогонки [7], где  $\chi_{1i}, \chi_{2i}, \xi_{1i}, \xi_{2i}$  зависят только от текущего радиуса  $r_i$ , а правые части уравнений (17), (18) – функции от перемещений на предыдущих, уже известных, слоях радиуса  $(i, i-1)$ , т. е. не содержат независимые переменные  $(u_j^{i+1}, \vartheta_j^{i+1})$  для рассматриваемого  $(i+1)$ -го слоя по радиусу и являются экстраполированными числовыми значениями.

Иллюстрация схемы численного решения представлена на рис. 2. Расчет начинается с  $i=0$ . Учитывая граничные условия (22) и  $u_j^{-1}\approx 0; \quad \vartheta_j^{-1}\approx 0$ , вычисляем сначала  $F_{1j}^0(u,\vartheta)$ , а потом – правую часть (17). Затем разрешаем (17) методом прогонки вдоль кривой  $\theta_j$ . Найдя значения  $u_j^1$ , переходим к решению (18): вычисляем  $F_{2j}^0(u,\vartheta)$ , правую часть (18), и решаем это уравнение вдоль кривой  $\theta_j$  относительно  $\vartheta_j^1$ . После первого слоя переходим ко второму – устанавливаем  $i=1$  и проделываем действия, аналогичные описанным выше. Подобным образом, двигаясь по радиусу  $r_i$  от

предыдущих слоев к текущему и «пробегаю» вдоль кривой  $\theta_j$ , методом прогонки от  $j=0$  до  $j=t$  осуществляем вычисления  $u_j^{i+1}$  по первому уравнению равновесия и  $\vartheta_j^{i+1}$  – по второму, до  $i=n-1$ . Таким образом, находим численное неосесимметричное решение задачи. Зная вектор перемещения точек цилиндра  $u_j^{i+1}$  и  $\vartheta_j^{i+1}$ , по (4) и (3) можем построить тензоры деформаций и напряжений в любой точке по периметру цилиндра с дальнейшим пересчетом характеристик НДС через промежуток  $\Delta t$  для учета температурной ползучести по (5).

### ВЫВОД

Окончательное суждение об описанном НДС цилиндра может быть сделано лишь после соответствующих реакторных и других испытаний, однако проектирование можно существенно образом облегчить путем использования подобных оценочных расчетов термонапряжений, позволяющих сразу же в какой-то мере приблизиться к наиболее рациональным конструкциям. Между тем топливные материалы подвергаются и нейтронному облучению, которое существенно меняет характеристики материала. Речь идет о радиационном набухании материалов, которое является принципиально новым явлением и свойственно только элементам конструкций ядерной энергетики. Поэтому расчетно-теоретическое обоснование НДС моделей топливных сердечников остается

неполным без учета облучения. Отсюда вытекает необходимость моделирования расчета НДС длинного сплошного цилиндра, в котором будет рассматриваться поведение материалов ТВЭЛов при облучении. А полученные в работе выражения и предложенная численная схема решения задачи определения неосесимметричного НДС длинного цилиндра, подверженного неравномерному нагреву в условиях температурной ползучести, может послужить основой для разработки и проведения подобных практических расчетов на прочность.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, И. С. Прочность элементов конструкций при облучении / И. С. Куликов, Нестеренко, Б. Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1990. – 144 с.
2. Куликов, И. С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И. С. Куликов, Б. Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1984. – 104 с.
3. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М., 1979. – 551 с.
4. Ширвель, П. И. О неосесимметричном НДС неравномерно нагретого длинного сплошного цилиндра, подверженного нейтронному облучению / П. И. Ширвель, И. С. Куликов // Машиностроение: респ. межвед. сб. – Минск, 2008. – Вып. 24. – Т. 1. – С. 185–191.
5. Яненко, Н. Н. Метод дробных шагов для решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195 с.
6. Вольмир, А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа / А. С. Вольмир. – М., 1976. – 416 с.
7. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 440 с.

Поступила 03.03.2009

УДК 517.4

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА КАК ЧАСТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОБЩЕЙ СХЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Канд. физ.-мат. наук ГАХОВИЧ А. С.

Белорусский национальный технический университет