

МНОГОФАКТОРНЫЕ ИНДЕКСНЫЕ МОДЕЛИ

Канд. техн. наук, доц. ШИЛО А. Ф.

Белорусский национальный технический университет

Во многих отраслях экономики, и не только экономики, широко используются многофакторные индексные модели. Так, перевозки пассажиров маршрутными автобусами можно представить 6-факторной моделью.

Пассажиры-километры (ПКМ) определяются произведением вместимости автобуса V и его полезным пробегом. Полезный пробег может быть представлен произведением трех факторов – среднесуточного пробега L_c , коэффициента полезного пробега α и его автомобиле-дней работы. В свою очередь количество автомобиле-дней работы зависит от общего числа автомобилей предприятия и коэффициента выпуска их на линию β .

Более того, поскольку автомобиле-дни можно представить произведением среднесписочного числа автомобилей $\bar{A}_{\text{сп}}$ и числа календарных дней отчетного периода $D_{\text{пер}}$, в итоге получим 6-факторную модель перевозки пассажиров

$$\text{ПКМ} = VL_c \alpha \bar{A}_{\text{сп}} D_{\text{пер}} \beta.$$

При анализе многофакторных моделей важно выяснить влияние каждого фактора на динамику результата. На наш взгляд, в этом вопросе есть определенные проблемы.

В [1, с. 77, 78] при анализе 2-факторной индексной модели грузооборота R за отчетный и базисный периоды (726,6 и 583,2 тыс. т·км) от объема перевезенного груза Q (42 и 36 тыс. т) и среднего расстояния перевозки 1 т груза $\bar{L}_T$ (17,3 и 16,2 км) изложено следующее:

- абсолютный прирост грузооборота

$$\Delta R = 726,6 - 583,2 = 143,4;$$

- прирост ΔR за счет фактора $\bar{L}_T$:

$$\Delta R(\bar{L}_T) = (\bar{L}_T^1 - \bar{L}_T^0) Q^1 = (17,3 - 16,2) \cdot 42 = 46,2;$$

- прирост ΔR за счет фактора Q :

$$\Delta R(Q) = \bar{L}_T^0 (Q^1 - Q^0) = 16,2 \cdot (42 - 36) = 97,2.$$

Итак, выражение $\Delta R = 46,2 + 97,2 = 143,4$ является верным. Далее делается окончательный вывод о том, что зависимость грузооборота от среднего расстояния перевозки 1 т груза

составляет 32 %, а от объема перевезенного груза – 68 %.

Между тем, если в качестве первого фактора взять объем перевезенного груза, а второго – среднее расстояние перевозки 1 т груза, то получим:

$$\Delta R(Q) = (Q^1 - Q^0) \bar{L}_T^1 = (42 - 36) \cdot 17,3 = 103,8;$$

$$\Delta R(\bar{L}_T) = Q^0 (\bar{L}_T^1 - \bar{L}_T^0) = 36 \cdot (17,3 - 16,2) = 39,6.$$

Очевидно, тоже $\Delta R = 103,8 + 39,6 = 143,4$, но результат совсем иной: грузооборот на 28 % зависит от среднего расстояния перевозки 1 т груза и на 72 % – от объема перевезенного груза. Расхождение результатов составляет 4 %. Где тогда верно?

Отметим, что при большем числе факторов эти расхождения значительно возрастают и достигают величин влияния исследуемых показателей.

Причина заключается в «позиционности» применяемой факторной формулы

$$\Delta_{\text{пр}}(i_{\text{фак}}) = u_1^0 u_2^0, \dots, \Delta u_i u_{i+1}^1, \dots, u_n^1, \quad (1)$$

где u^0 – базисные уровни факторов; u^1 – отчетные уровни факторов; $\Delta u_i = u_i^1 - u_i^0$.

Итак, чем ближе i -й фактор к началу формулы, тем больше в формировании его величины сомножителей отчетных уровней других факторов. И, наоборот, при удалении его от начала число отчетных уровней уменьшается, а базисных – возрастает. Очевидно, рассчитывать на объективность результатов при таком подходе не приходится.

Формула обеспечивает баланс прироста результативного признака с его факторными приростами. Но для основной цели – выяснения величин факторных приростов – она как инструмент сродни топору вместо скальпеля в хирургии [2–4].

Предлагается инновационная факторная формула, устраняющая указанные выше недостатки:

$$\Delta_{\text{пр}}(i_{\text{фак}}) = \Delta u_i \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{i-1} \bar{u}_{i+1}, \dots, \bar{u}_n, \quad (2)$$

где $\Delta u_i = u_i^1 - u_i^0$; $\bar{u} = \frac{u^0 + u^1}{2}$ – среднее арифметическое базисного и отчетного уровней фактора.

Согласно предлагаемой формуле факторные приросты результата рассматриваемого примера составят:

$$\begin{aligned}\Delta R(Q) &= (Q^1 - Q^0) \frac{\bar{l}_T^0 + \bar{l}_T^1}{2} = \\ &= (42 - 36) \cdot \frac{16,2 + 17,3}{2} = 100,5; \\ \Delta R(\bar{l}_T) &= (\bar{l}_T^1 - \bar{l}_T^0) \frac{Q^0 + Q^1}{2} = (17,3 - 16,2) \cdot \frac{36 + 42}{2} = 42,9.\end{aligned}$$

Опять же $\Delta R = \Delta R(Q) + \Delta R(\bar{l}_T) = 100,5 + 42,9 = 143,4$.

Таким образом, объективные результаты рассматриваемого примера таковы: грузооборот на 30 % зависит от среднего расстояния перевозки 1 т груза и на 70 % – от объема.

Сохранение баланса прироста результативного признака и факторных приростов с применением (2) в приведенном примере не является случайным. Докажем это положение, выражая отчетные уровни факторов через базисные по формуле $u^1 = u^0 + \Delta u$.

Общее приращение признака составит

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{пр}} &= u_1^1 u_2^1 - u_1^0 u_2^0 = (u_1^0 + \Delta u_1)(u_2^0 + \Delta u_2) - u_1^0 u_2^0 = \\ &= u_1^0 u_2^0 + u_1^0 \Delta u_2 + u_2^0 \Delta u_1 + \Delta u_1 \Delta u_2 - \\ &\quad - u_1^0 u_2^0 = u_1^0 \Delta u_2 + u_2^0 \Delta u_1 + \Delta u_1 \Delta u_2.\end{aligned}$$

Найдем сумму факторных приращений признака

$$\Delta_{\text{пр}}(u_1) + \Delta_{\text{пр}}(u_2) = \Delta u_1 \frac{u_2^0 + u_2^0 + \Delta u_2}{2} +$$

$$\begin{aligned}+ \Delta u_2 \frac{u_1^0 + u_1^0 + \Delta u_1}{2} &= \Delta u_1 u_2^0 + \Delta u_1 \frac{\Delta u_2}{2} + \Delta u_2 u_1^0 + \\ + \Delta u_2 \frac{\Delta u_1}{2} &= u_1^0 \Delta u_2 + u_2^0 \Delta u_1 + \Delta u_1 \Delta u_2.\end{aligned}$$

Правые части обоих равенств одинаковы.

Как показали дальнейшие математические исследования предлагаемой формулы (2), в случае 3- и более факторных моделей сумма факторных приростов признака не совпадает с его общим приростом, но этот дисбаланс незначителен (третьего и более порядка малости) и сопоставим с погрешностями вычислений. Так, для 3-факторной модели он составляет четверть произведения приращений уровней факторов, т. е. $\frac{1}{4} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$.

Ниже по данным однонаправленного изменения факторных уровней отчетного и базисного периодов (столбцы 2 и 3, табл. 1) приведены расчеты 4-факторной модели по позиционной формуле (1) (столбцы 5 и 6) и инновационной формуле (2) (столбцы 7 и 8). В первой половине табл. 1 при расчетах факторы брались в порядке их расположения (столбец 1), во второй – только первый и четвертый переставлены местами.

Как и следовало ожидать, по (1) наблюдается большой разброс абсолютных факторных приростов и их долей в общем приросте результативного признака. В самом деле, даже по не меняющему позиции 2-го фактора его доля колеблется от 35 до 28 %, т. е. разброс составляет более 7 %. По первому фактору разброс составил 5 % и превышает его долю 4,1 %, т. е. величина погрешности превышает результат.

Таблица 1

Фактор	Уровень u		Δu	Позиционная формула		Инновационная формула	
	базисный	отчетный		$\Delta_{\text{факт}}$	%	$\Delta_{\text{факт}}$	%
1	2	3	4	5	6	7	8
1	131	138	7	234080	9,0	162435	6,3
2	75	95	20	922240	35,3	734370	28,3
3	34	44	10	786000	30,1	800275	30,8
4	6	8	2	668100	25,6	900440	34,6
Произведение	2004300	4614720	Σ	2610420	100	2597520	100
4	6	8	2	1153680	44,2	900440	34,6
2	75	95	20	728640	27,9	734370	28,3
3	34	44	10	621000	23,8	800275	30,8
1	131	138	7	107100	4,1	162435	6,3
Произведение	2004300	4614720	Σ	2610420	100	2597520	100

Таким образом, прирост составит $\Delta_{\text{пр}} = 4614720 - 2004300 = 2610420$.

Более того, при применении позиционной формулы (1) можно получить 24 варианта ответа (число перестановок из 4).

Оценим качество расчетов по инновационной формуле (2). Во-первых, абсолютные факторные приросты результативного признака и их доли при любом расположении однозначны. Во-вторых, погрешность, порождаемая дисбалансом, не превышает 0,5 %. В самом деле, дисбаланс прироста результативного признака и суммы факторных

$$2610420 - 2597520 = 12900.$$

Тогда относительная погрешность

$$(12910 : 2610420) \cdot 100 \% = 0,5 \, \%.$$

В табл. 2 представлены расчеты 4-факторной модели с теми же исходными данными, но с разнонаправленным изменением уровней факторов. А именно, по 4-му фактору отчетный уровень 6 меньше базисного 8.

Прежде всего заметим, что при разнонаправленном изменении факторных уровней абсолютная величина отдельного факторного прироста может превышать их сумму, что невозможно при однонаправленности. Следовательно, и доленое участие такого фактора возможно больше 100 %, что наблюдается по обеим формулам (столбцы 6 и 8).

тельная погрешность расчетов по инновационной формуле и составила

$$(796640 - 788640) : 788640 \cdot 100 \% = 1 \, \%.$$

ВЫВОДЫ

Предлагаемая инновационная формула проста и удобна при исследованиях индексных многофакторных моделей. Она позволяет получить объективные (как и должно быть!) результаты с высокой степенью надежности.

Величины факторных долей результативного признака всегда однозначны. Приоритетность того или иного фактора устанавливается после расчетов, а не до них, как по позиционной формуле.

В случае 2-факторной модели баланс прироста результативного признака с факторными сохраняется. Это значит, что результаты исследований достоверны на 100 %.

В случае трех и более факторов наблюдается дисбаланс прироста результативного признака с его факторными приростами. Но он незначителен (третьего и более порядка малости). Так, для 3-факторной модели он составляет четверть произведения приращений уровней факторов, т. е. $\frac{1}{4} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$. Это значит, что погрешность результатов исследований составляет доли процента.

Таблица 2

Фактор	Уровень u		Δu	Позиционная формула		Инновационная формула	
	базисный	отчетный		$\Delta_{\text{факт}}$	%	$\Delta_{\text{факт}}$	%
1	2	3	4	5	6	7	8
1	131	138	7	175560	22,3	162435	20,4
2	75	95	20	691680	87,7	734370	92,2
3	34	44	10	589500	74,7	800275	100,5
4	8	6	-2	-668100	-84,7	-900440	-113,1
Произведение	2672400	3461040	Σ	788640	100	796640	100
4	8	6	-2	-1153680	-146,3	-900440	-113,1
2	75	95	20	971520	123,4	734370	92,2
3	34	44	10	828000	104,8	800275	100,5
1	131	138	7	142800	18,1	162435	20,4
Произведение	2672400	3461040	Σ	788640	100	796640	100

Таким образом, прирост составит $\Delta_{\text{пр}} = 3461040 - 2672400 = 788640$.

В остальном выводы проведенного выше сравнительного анализа обеих формул имеют место и при разнонаправленности изменения факторных уровней. Только разброс итоговых величин по позиционной формуле увеличился (столбец 6). Возросла на 0,5 % и относительная

ЛИТЕРАТУРА

1. **Статистика** автомобильного транспорта / И. М. Алексеева [и др.]. – М., 2005.
2. **Захаренков, С. Н.** Статистика / С. Н. Захаренков. – Минск: БГУ, 2010.
3. **Ивуть, Р. Б.** Статистика автомобильного транспорта / Р. Б. Ивуть. – Минск, 2003.
4. **Статистика** / под ред. И. И. Елисеевой. – М., 2009.

Поступила 30.03.2011