

# АССОЦИАТИВНЫЕ КОЛЬЦА, РАЗРЕШИМЫЕ КАК КОЛЬЦА ЛИ

Канд. физ.-мат. наук, доц. СМЕРНОВ М. Б.

Белорусский национальный технический университет

В работе излагаются результаты, анонсированные в [1]. Пусть  $R$  – ассоциативное кольцо, разрешимое класса  $n$  ( $n > 2$ ) как кольцо Ли (разрешимость класса  $n = 2$  означает метабелевость  $[x_1, x_2, [x_3, x_4]] = 0$ , где  $[x, y] = xy - yx$ ). В [2] доказано, что такое кольцо по модулю нильпотентного идеала  $I$  класса нильпотентности не выше  $3 \cdot 15^{n-2}$  является центрально метабелевым, т. е. кольцо  $R/I$  удовлетворяет тождеству  $[[x_1, x_2, [x_3, x_4]], x_5] = 0$ . С точки зрения уменьшения многообразия в заключении теоремы было установлено, что кольцо  $R$  обладает нильпотентным идеалом  $J$  класса нильпотентности не выше  $8 \cdot 15^{n-2}$ , таким, что  $R/J$  удовлетворяет тождествам центральной метабелевости и  $\text{Sym}_{1,3,5}[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0$ , где  $\text{Sym}_{1,3,5}$  означает суммирование по всем перестановкам чисел 1, 3, 5.

В статье приводится новое доказательство этой теоремы, что позволяет, в частности, понизить оценку класса нильпотентности идеала  $I$  до  $3 \cdot 10^{n-2}$ . Также построен пример, позволяющий оценить класс нильпотентности идеала  $I$  слева, который в общем случае может достигать значения  $2^{n-2}$ .

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Пусть  $R$  – ассоциативное кольцо,  $R_L$  – ассоциированное кольцо Ли, разрешимое класса  $n$  ( $n > 2$ ). Тогда кольцо  $R$  обладает нильпотентным идеалом  $I$  класса нильпотентности не выше  $3 \cdot 10^{n-2}$  таким, что факторкольцо  $R/I$  удовлетворяет тождеству  $[[x_1, x_2, [x_3, x_4]], x_5] = 0$ .

Доказательство. Пусть  $L$  – лиев идеал кольца  $R$ , т. е.  $[L, R] \subset L$ . Положим  $L_i = [L, \dots, L]$  ( $i$  раз),  $L^k = L \cdot L \cdot \dots \cdot L$  ( $k$  раз),  $L_i^k = (L_i)^k$ . Далее,  $R^{(1)} = R$ ,  $R^{(2)} = [R, R]$ ,  $R^{(k)} = [R^{(k-1)}, R^{(k-1)}]$ . Для

упрощения записи вместо элементов  $x_1, x_2$ , и т. п. будем использовать только их индексы 1, 2, ..., так что выражение [23, 4] означает  $[x_2 x_3, x_4]$ .

Докажем последовательно несколько соотношений.

$$L_3 L_3 \subset [L_2, L_2] R = L^{(3)} R. \quad (1)$$

Заметим сначала, что при  $1, 2, 3, 4, 5, 6 \in L$  мы имеем

$$[[1, 2, 3], [4, 5, 6]] \in [L_2, L_2] = L^{(3)}. \quad (2)$$

Покажем далее, что имеет место соотношение

$$[1, 2, 3][4, 5, 6] - (-1)^{\sigma} \sigma([1, 2, 3][4, 5, 6]) \in L^{(3)} R, \quad (3)$$

где  $\sigma$  – произвольная перестановка символов 1, 2, 3, 4, 5, 6 и  $(-1)^{\sigma} = 1$ , если  $\sigma$  – четная перестановка и  $(-1)^{\sigma} = -1$  в противном случае.

Запишем  $L^{(3)} \ni [34, 5, 6, [2, 1]] = [[3, 5]4 + 3[4, 5], 6, [2, 1]] = [3, 5, 6][1, 2, 4] + [1, 2, 3] \times [4, 5, 6] + \text{элементы из } L^{(3)} R$ , что ввиду (2) дает (3) при  $\sigma : 3 \leftrightarrow 4$ .

Так как  $[4, 5, 6] = -[5, 4, 6]$ , то (3) верно и при  $\sigma : 3 \leftrightarrow 5$  и ввиду тождества Якоби при  $\sigma : 3 \leftrightarrow 6$ . Учитывая (2), мы заключаем, что соотношение (3) верно теперь для любой транспозиции  $\sigma$ . Пусть  $E$  – тождественная перестановка,  $E_{ij}$  – транспозиция символов  $i, j$ . Тогда, очевидно, (2) можно записать в виде  $[1, 2, 3] \times [4, 5, 6](E - \sigma) \in L^{(3)}$ , где  $\sigma = E_{14} E_{25} E_{36}$ . Это не противоречит (3) только в том случае, когда  $2[1, 2, 3][4, 5, 6] \in L^{(3)} R$ . Далее,  $[1, 2, 3][4, 5, 6] \equiv 3[1, 2, 3][4, 5, 6] \pmod{L^{(3)} R}$ , откуда ввиду (3)  $[1, 2, 3][4, 5, 6] \equiv ([1, 2, 3][4, 5, 6] + [1, 2, 3] \times [6, 4, 5] + [1, 2, 3][5, 6, 4]) \pmod{L^{(3)} R}$ . Сумма справа есть нуль ввиду тождества Якоби, так что  $[1, 2, 3][4, 5, 6] \in L^{(3)} R$ , что эквивалентно (1)

$$L_2[L_2, R] \subset L_3R. \quad (4)$$

При  $1, 2, 3, 4 \in L, 5 \in R$  имеем  $L_3 \ni [3, 4, [1, 25]] = [3, 4, [1, 2]5 + 2[1, 5]] = [1, 2][3, 4, 5] +$  элемент  $\in L_3R$ , что дает (4)

$$[L^2, R] \subset L. \quad (5)$$

Действительно, при  $1, 2 \in L, 3 \in R$  имеем  $[12, 3] = [2, 31] - [23, 1] \in L$ , что доказывает (5)

$$L_2^2 R_3 \subset L + [L_2, R]R. \quad (6)$$

При  $1, 2, 3, 4 \in L, 5, 6, 7 \in R$  имеем  $[L_2, R] \ni [1, 25, [36, 4], 7] = [[1, 2]5 + 2[1, 5], [3, 4]6 + 3[6, 4], 7]$ . Так как  $2[1, 5] \in L^2, 3[6, 4] \in L^2$ , то ввиду (5) мы имеем  $[[1, 2]5, [3, 4]6, 7] \in L + [L_2, R]$  и так как  $[[1, 2, [3, 4]6]5, 7] \in [L_2, R]R$ , то  $[[1, 2][3, 4][5, 6], 7] \in [L_2, R]R + L$  и  $[1, 2] \times [3, 4][5, 6, 7] \in [L_2, R]R + L$ , что и требовалось доказать.

Из (6) следует, что  $[L_2^2 R_3, L_2^2 R_3] \subset L_2 + [L_2, R]R$  и далее, раскрывая левую часть, находим  $L_2^4 [R_3, R_3] \subset L_2 + [L_2, R]R$ . Отсюда следует

$$L_2^4 [R_3, R_3, R] \subset [L_2, R]R. \quad (7)$$

Далее, из (1), (4) получаем соотношение  $L_2^2 [L_2, R]^2 \subset [L_2, L_2]R$ . Используя (7), отсюда получаем

$$L_2^2 (L_2^4 [R_3, R_3, R])^2 \subset [L_2, L_2]R. \quad (8)$$

Пусть  $P, Q$  – левые идеалы кольца  $R$  и пусть  $M = \{m \in R | [m, R] \subset P\}$ . Если  $Q \subset M$ , то

$$[M, P, R][R, R, Q, Q] \subset [Q, P, R]R. \quad (9)$$

Пусть  $1, 2 \in R, 3 \in P, 4, 5 \in Q$ . Тогда  $[Q, P, R] \ni [25, 4, 3, 1] = [[2, 4]5 + 2[5, 4], 3, 1] = [2, 4, 3][5, 1] + [2, 4, 1][5, 3] + [2, 3, 1][5, 4] + [2, 3][5, 4, 1] + [2, 1][5, 4, 3] +$  элемент из  $[Q, P, R]R$ . Заменяя  $5 \rightarrow [5, 6]$ , где  $6 \in R$ , получаем

$$[2, 4, 3][5, 6, 1] + [2, 4, 1][5, 6, 3] + [2, 3, 1][5, 6, 4] \in [Q, P, R]R. \quad (10)$$

Так как  $[2, 4, 1][5, 6, 3] - [5, 6, 3][2, 4, 1] \in [Q, P, R]$ , то при замене  $4 \leftrightarrow 5, 2 \leftrightarrow 6$  первые два слагаемых в (10) переходят друг в друга по модулю  $[Q, P, R]$ . Следовательно, имеем

$$[2, 3, 1][5, 6, 4] \equiv [6, 3, 1][4, 2, 5] \pmod{[Q, P, R]R}. \quad (11)$$

Подставим в (11)  $2 \rightarrow 7, 5 \rightarrow [5, 2]$ , где  $7 \in M$ . Так как  $[5, 6, 2, 4] \equiv [5, 6, [2, 4]] \pmod{[Q, P, R]R}$ , то мы имеем  $[7, 3, 1][5, 2, 6, 4] \equiv [6, 3, 1][5, 2, 7, 4] \equiv [6, 3, 1][5, 7, 2, 4] \equiv [6, 3, 1][5, 7, [2, 4]] \equiv [7, 3, 1][2, 4, 6, 5] \equiv [7, 3, 1][5, 6, 2, 4] \pmod{[Q, P, R]R}$ , что равносильно (9).

Полагая в (9)  $P = Q = [R, R, R], M = [R, R]$ , получаем

$$[R_3, R_2, R][R_2, R_3, R_3] \subset [R_3, R_3, R]R. \quad (12)$$

Если  $A, B, C$  – левые идеалы кольца  $R, [B, A] \subset C, A$ , то

$$[R, C][A, B] \subset [A, C]R. \quad (13)$$

Пусть  $1 \in R, 2 \in A, 3 \in B, 4 \in C$ . Тогда  $[A, C] \ni [12, 3, 4] = [1, 4][2, 3] +$  элемент из  $[A, C]R$ , откуда следует (13). Полагая в (13)  $A = R_3, C = [R_3, R_2], B = R_2$  и подставляя в (12), находим

$$[R_3, R_2, R][R_3, R_2, R_3][R_3, R_2] \subset [R_3, R_3, R]R. \quad (14)$$

Заметим, что  $[R_3, R_2] = [R_2, R, R_2]$  и  $[R_2, R_2, R] \subset [R_2, R, R_2]$ , а также  $[R_2, R_2, R_2] \subset [R_2, R_2, R, R] \subset [R_2, R, R_2, R] = [R_3, R_2, R]$ . Пусть  $1 \in R, 2, 3, 4, 5 \in R_2$ .

Тогда  $[R_2, R_2, R_2] \ni [5, 4, [3, 21]] = [3, 2] \times [5, 4, 1] +$  элемент из  $[R_2, R_2, R_2]R$ , т. е.  $[R_2, R_2, R][R_2, R_2] \subset [R_2, R_2, R_2]R$ . Подставляя эти соотношения в (14), получим

$$[R_2, R_2, R][R_2, R_2][R_2, R_2, R][R_2, R_2] \times [R_2, R_2, R] \subset [R_3, R_3, R]R. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (8), получаем

$$L_2^2 (L_2^4 \{[R_2, R_2, R][R_2, R_2]\}^2 \times [R_2, R_2, R])^2 \subset [L_2, L_2]R. \quad (16)$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. В качестве  $L$  примем  $(m-2)$ -й левый коммутант кольца  $R$  (т. е.  $R^{(m-1)}$ ). Ясно, что  $L$  – левый идеал кольца  $R$  и  $[L_2, L_2] = 0$ . Поэтому в этом случае правая часть (16) равна нулю. Если  $M - (m-3)$ -й левый коммутант кольца  $R$ , то  $L_2 = [L, L] = [M_2, M_2]$ . Поэтому в (16) вместо  $L_2$  можно подставить аналогичное выражение от  $M$ . Чтобы проследить за результатом, сопоставим (16) выражение  $10x + 6y + 4z$ . Это озна-

чает, что в (16)  $L_2$  входит 10 раз,  $[R_2, R_2, R]$  – 6 раз и  $[R_2, R_2]$  – 4 раза. После подстановки в (16) аналогичного выражения от  $M$  получим в левой части произведение  $M_2, [R_2, R_2, R], [R_2, R_2]$ , причем число множителей каждого типа равно коэффициенту при  $x, y, z$  в выражении  $(10x + 6y + 4z)10 + 6y + 4z = 10^2x + 6(1 + 10)y + 4(1 + 10)z$ . Справа будет стоять  $0 = [[M_2, M_2], [M_2, M_2]]R$ . Продолжая эту процедуру, после  $i$ -го шага, получим  $10^i x + \frac{2}{3}(10^i - 1)y + \frac{4}{9}(10^i - 1)z$ .

Всего мы должны сделать  $m - 2$  шага, чтобы вместо  $M$  появилось  $[R_2, R_2]$ . Следовательно, множитель  $[R_2, R_2]$  появится  $10^{m-2}$  раз,  $[R_2, R_2, R]$  –  $\frac{2}{3}(10^{m-2} - 1)$  раз и  $[R_2, R_2]$  –  $\frac{4}{9}(10^{m-2} - 1)$  раз.

Так как  $[R_2, R_2, R] \subset [R_2, R_2]$ , можем все множители заменить на  $[R_2, R_2, R]$ . Тогда получаем  $[R_2, R_2, R]^t = 0$ , где  $t = 10^{m-2} + \frac{10}{9}(10^{m-2} - 1) < 3 \cdot 10^{m-2}$ . Теорема доказана.

Чтобы оценить класс нильпотентности идеала  $I$  слева, рассмотрим кольцо  $R = T(2^{n-1}, P)$  всех верхних треугольных матриц степени  $2^{n-1}$  над некоторым полем  $P$ . Обозначим  $T_0(2^{n-1}, P) = T(2^{n-1}, P)$ ,  $T_1(2^{n-1}, P) \subset T_0(2^{n-1}, P)$  – кольцо всех верхних треугольных матриц с нулевой главной диагональю и для любого натурального  $k$  пусть  $T_k(2^{n-1}, P) \subset T_{k-1}(2^{n-1}, P)$  – кольцо всех верхних треугольных матриц из  $T_1(2^{n-1}, P)$  с  $k - 1$  нулевыми диагоналями выше главной. Очевидно, что кольцо  $R$  разрешимо класса  $n$ , т. е.  $R^{(n+1)} = 0$ .

Ясно, что  $I = R[R_2, R_2, R]R \subset T_2(2^{n-1}, P)$ , и поэтому  $I^2 \subset T_4(2^{n-1}, P)$ ,  $I^3 \subset T_6(2^{n-1}, P)$  и так далее  $I^k \subset T_{2k}(2^{n-1}, P)$  для любого  $k > 1$ . Но так как, очевидно,  $T_{2^{n-1}}(2^{n-1}, P) = 0$ , то  $I^{2^{n-2}} = 0$ . Так же несложно показать, что идеал  $I$  содержит все матрицы вида  $e_{i+i+2}(1) = e_{i+i+2}$ , где  $1 \leq i \leq 2^{n-1} - 2$  ( $e_{ij}(\alpha)$  обозначает матрицу, у которой на позиции  $(i, j)$  стоит элемент  $\alpha \in P$ , а на остальных

позициях – нули). Действительно, так как  $e_{ij}(\alpha)e_{kl}(\beta) = e_{il}(\alpha\beta)$  если  $j = k$  и 0 в противном случае, то  $[e_{ii}, e_{i+i+1}] = e_{i+i+1} \in [R, R]$ ,  $[e_{i+i+1}, e_{i+i+1+2}] = e_{i+i+2} \in [R_2, R_2]$ ,  $[e_{ii}, e_{i+i+2}] = e_{i+i+2} \in I$  для любого  $1 \leq i \leq 2^{n-1} - 2$ . Поэтому ввиду того, что произведение  $e_{24}e_{46}e_{68}\dots e_{2^{n-1}-2, 2^{n-1}} = e_{2, 2^{n-1}} \neq 0$  содержит  $2^{n-2} - 1$  сомножителей из идеала  $I$ , мы заключаем, что класс нильпотентности идеала  $I$  не меньше  $2^{n-2}$ .

В заключение отметим, что результат, сформулированный в теореме в некотором смысле не улучшаем, а именно – существуют ассоциативные кольца, разрешимые как кольца Ли с нильпотентным вторым коммутантом  $R^{(3)} = [R_2, R_2]$ . Примером может служить кольцо  $R$   $4 \times 4$  матриц над полем  $P$  характеристики 2 вида  $\begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , где  $A, B, X$  – произвольные матрицы из  $M(2, P)$ ,  $0$  – нулевая  $2 \times 2$  матрица, а  $M(2, P)$  – полное кольцо  $2 \times 2$  матриц над полем  $P$ .

## ВЫВОД

В статье доказывается, что в отличие от теории групп понятие разрешимости не является удовлетворительным обобщением коммутативности в теории многообразий ассоциативных колец, так как все такие кольца являются центрально метабелевыми по модулю нильпотентного идеала.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, М. Б. Ассоциативные кольца с тождеством лиевой разрешимости / М. Б. Смирнов // Тезисы докладов X междунар. науч. конф. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2008. – Ч. 1. – С. 52.
2. Залесский, А. Е. Ассоциативные кольца, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости / А. Е. Залесский, М. Б. Смирнов // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1982. – № 2. – С. 15–20.

Поступила 01.12.2010