

## ОБ ИЗМЕРЕНИИ АМПЛИТУД И ПЕРИОДА МИКРОКАЧАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ОПОРОЙ КАЧЕНИЯ

Асп. РИЗНООКАЯ Н. Н.

Белорусский национальный технический университет

Физический маятник с опорой качения, совершающий свободные затухающие колебания, широко используется при исследованиях трения качения [1, 2]. До настоящего времени маятниковый метод применялся в условиях, когда амплитуда колебаний маятника была не менее 0,02 рад, а коэффициент сопротивления качению – не менее  $10^{-5}$ . Для измерения амплитуд, как правило, использовалась методика, основанная на прерывании светового луча оптоэлектронных пар этим маятником и измерении времени между двумя последовательными прерываниями. При этом период колебаний считался неизменным и его величина обеспечивалась конструкцией маятника [3].

Однако с развитием микромеханики и микроэлектроники появились новые материалы и приборы, где коэффициент сопротивления качению имеет величину порядка  $10^{-7}$  и менее [4, 5]. Эти коэффициенты реализуются на гладких твердых поверхностях при амплитудах колебаний маятника порядка несколько угловых секунд. Кроме того, оказалось, что в этих условиях период колебаний существенно зависит от амплитуды, и при ее уменьшении период резко уменьшается [5]. В этих условиях для измерений амплитуд и периодов колебаний физического маятника требуются принципиально новые средства и методы.

Цель данной работы состоит в разработке методики измерений амплитуд и периодов колебаний физического маятника при углах отклонения, составляющих несколько угловых секунд.

**Методика измерений амплитуд и периодов колебаний физического маятника.** Физический маятник, совершающий свободные колебания, является одним из наиболее чувствительных элементов различных физических приборов. Система измерений амплитуд и периодов колебаний маятника не должна оказы-

вать заметного обратного воздействия на него, поэтому эта система должна быть оптической.

Эскиз установки для исследования трения качения маятниковым методом с оптической системой измерения амплитуд и периодов представлен на рис. 1.

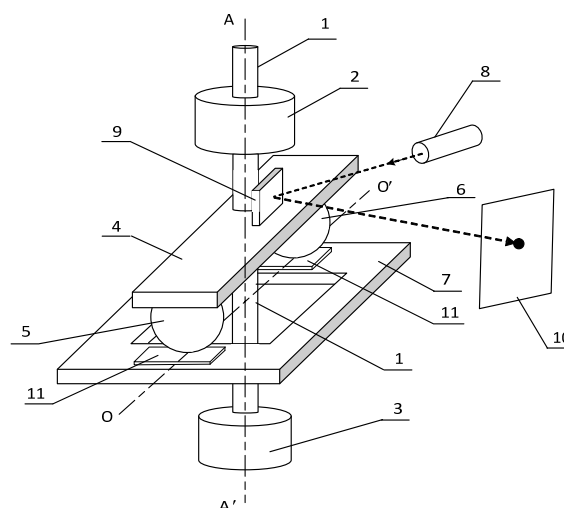


Рис. 1. Эскиз экспериментальной установки: 1 – стержень; 2, 3 – балансировочные грузы; 4 – планка; 5, 6 – сферические опоры, жестко прикрепленные к планке 4; 7 – внешнее основание; 8 – лазер; 9 – зеркало, прикрепленное к планке 4; 10 – фотоприемник; 11 – объект исследования; ОО' – мгновенная ось вращения маятника

Данная установка работает следующим образом. Два одинаковых объекта исследования 11 (плоские полированные пластинки) помещают на площадку 7, затем опускают маятник так, что сферические опоры 5 и 6 устанавливаются на исследуемые образцы, луч от лазера 8, отражаясь от зеркала 9, попадает на фотоприемник 10. В начале измерений маятник отклоняют на заданный угол и освобождают, и маятник начинает совершать свободные затухающие колебания. Измерения проводят до полной остановки маятника.

Функциональная схема системы обработки информации, поступающей с фотоприемника, показана на рис. 2.

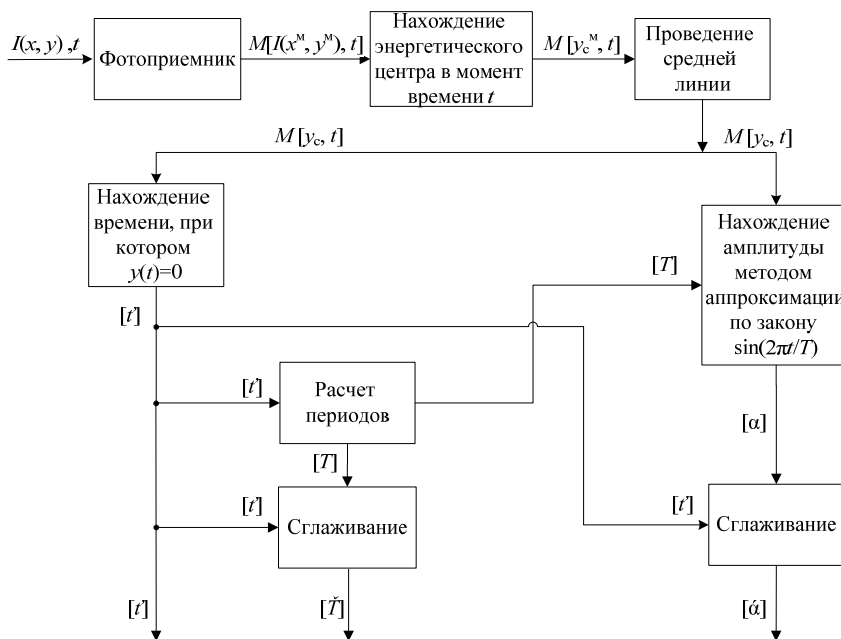


Рис. 2. Функциональная схема системы обработки информации

На этой схеме оптический сигнал поступает на вход фотоприемника. Функция  $I(x, y)$  описывает распределение интенсивности светового пучка в плоскости, перпендикулярной направлению его распространения в различные моменты времени  $t$ .

Для преобразования аналогового сигнала (положение светового пятна на фотоприемнике) в цифровой в качестве фотоприемника используется ПЗС-матрица. В этой матрице формируется электрический сигнал, соответствующий распределению интенсивности светового пятна на ее чувствительном элементе, так что образуется массив данных  $M[I(x^m, y^m), t]$ . Этот массив состоит из двумерного распределения интенсивности светового пятна в координатах  $x^m, y^m$  ПЗС-матрицы в дискретные моменты времени. Количество данных в массиве задается частотой считывания информации с ПЗС-матрицы (количеством кадров в секунду) и общим временем измерения. Современные аппаратные средства позволяют варьировать частоту считывания (шаг дискретизации) в широком диапазоне, и массив данных может быть достаточно велик. Однако чем он больше, тем больше требуется времени и ресурсов для обработки такого массива. Поэтому выбор шага дискретизации

следует связывать с допустимой погрешностью измерений.

Положение фотоприемника настраивают таким образом, что световое пятно перемещается только вдоль одной оси, например  $OY$ . В этом случае координата  $x^m$  остается постоянной и ее не учитывают при измерениях. Перемещение пятна описывают, следя за перемещением одной из точек пятна – метки. В качестве метки, которая определяет положение светового пятна на фотоприемнике, используется положение максимума интенсивности этого пятна. Этот максимум находят численно, предполагая, что распределение интенсивности светового пятна на

фотоприемнике описывается кривой Гаусса [6]. Информация о перемещении метки записывается в виде массива  $M[y_c^m, t]$ .

Для дальнейшей обработки информации необходимо описать положение светового пятна на фотоприемнике относительно положения равновесия маятника. Для этого устанавливаем линию нуля (т. е. значение координаты  $y_c^m$ , соответствующей положению равновесия маятника) и переопределяем координату  $y_c^m$  относительно этой линии, введя координату  $y_c$ . Линия нуля проводится как среднее значение, взятое по всем координатам  $y_c^m$ . Преобразуя координаты  $y_c^m$  в координаты  $y_c$ , получают массив значений  $M[y_c, t]$ . Пример такого массива представлен в виде графиков на рис. 3.

Из рис. 3а видно, что колебания маятника затухают не до нуля, а до некоторого минимального значения, определяемого уровнем шумов измерительной цепи. На рис. 3б видно, что этот шум искажает полезный сигнал особенно заметно в области максимального отклонения. Здесь шум затрудняет измерение амплитуд колебаний маятника. При малых амплитудах колебаний этот шум затрудняет также и измерение периодов колебаний.

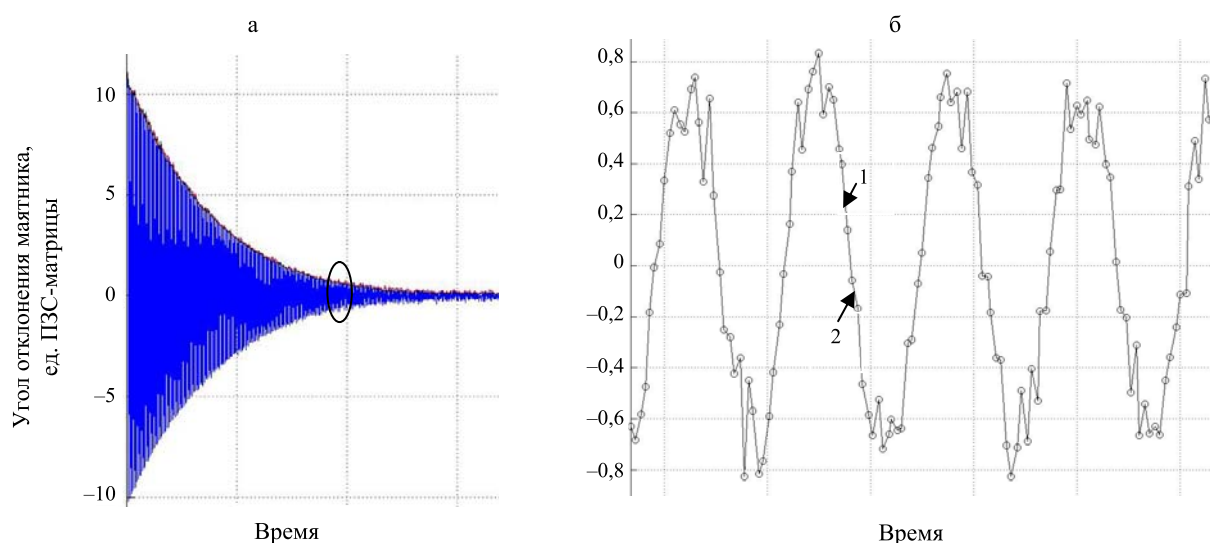


Рис. 3. Положение светового луча на фотоприемнике относительно положения равновесия маятника: а – массив, отвечающий полному циклу колебаний; б – выделенная часть массива

**Методика определения периода** состоит в следующем. Находят точки на кривой движения маятника, максимально близкие к линии нуля и расположенные по разные стороны от этой линии (например, точки 1, 2 на рис. 3б, первая – обязательно положительная, вторая – отрицательная). Эти точки аналитически соединяют прямой линией и вычисляют точку пересечения этой линии и линии нуля. Таким образом, получают массив времен  $[t']$ , соответствующих точкам перехода через нуль при движении луча сверху вниз. Затем вычисляют периоды по формуле

$$T_j = t'_{j+1} - t'_j, \quad (1)$$

где  $j$  – номер точки пересечения траектории движения луча и линии нуля при движении маятника сверху вниз.

Типичная картина зависимости периода от времени, полученная по этой методике, показана на рис. 4, где «х» – значения периодов.

**Методика определения амплитуд** состоит в следующем. Предполагают, что затухание колебаний маятника в каждом цикле колебаний мало. Поэтому в каждом полупериоде эти колебания можно описать гармонической функцией со своими амплитудой и периодом, так что

$$y_i = \alpha_j \sin \left( \frac{2\pi}{T_j} t_i \right), \quad (2)$$

где  $\alpha_j$  – амплитуда в  $j$ -м периоде;  $T_j$  – период колебаний маятника в  $j$ -м периоде;  $t_i$  – изме-

ренные моменты времени, лежащие в интервале от  $t'_j$  до  $t'_{j+1}$ , причем минимальное количество точек  $t_i$  в каждом периоде  $j$ -м выбирается в соответствии с теоремой Котельникова [7].

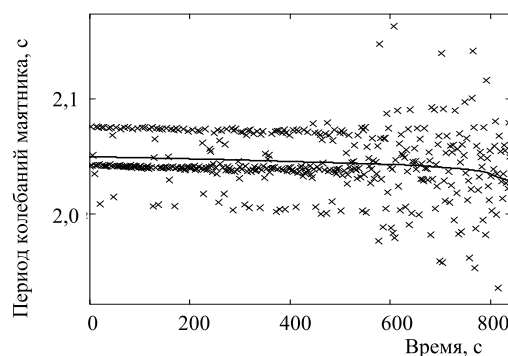


Рис. 4. Результаты измерений периода в зависимости от времени х – массив измеренных данных  $[T, t']$ ; — массив данных  $[\bar{T}, t']$ , полученных в результате сглаживания

На рис. 5 показаны максимальные значения координат  $y_c$ , полученные в каждом положительном полупериоде, которые в своей совокупности образуют тонкую линию, а также амплитуды колебаний маятника, которые были вычислены с помощью гармонической аппроксимации (2), образующие толстую линию.

На рис. 4 и 5 видно, что результаты, полученные для периода и амплитуды, имеют большой разброс. Это объясняется влиянием шумов измерительной цепи. Поэтому возникает задача статистического сглаживания с целью выделения полезного сигнала.

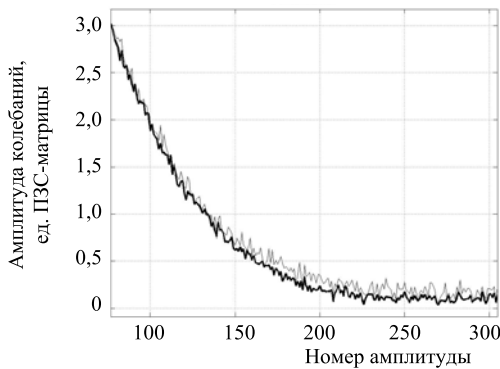


Рис. 5. Измеренные амплитуды колебаний (тонкая линия) и амплитуды колебаний маятника, полученные после аппроксимации (жирная линия)

**Статистическое сглаживание сигнала, соответствующего измерениям амплитуды,** осуществляется на основе использования гауссового ядра, позволяющего вычислить локально взвешенные средние значения исходного одномерного массива данных  $[\alpha]$  (рис. 2). Такое сглаживание наиболее эффективно, когда точки на оси абсцисс  $t$  расположены на приблизительно одинаковом расстоянии друг от друга. В этом случае каждое значение  $\alpha_j$  в данном массиве преобразуется в новое значение  $\mathcal{E}_j$ , задаваемое формулой

$$\alpha'_j = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{t_j - t_i}{b}\right) \alpha_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{t_j - t_i}{b}\right)}, \quad (3)$$

где функция  $K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma)^2}\right)$ ;  $n$  —

количество точек в массиве  $[\alpha]$ ;  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение;  $b$  — параметр сглаживания.

Значения  $\mathcal{E}_j$  образуют массив данных  $[\mathcal{E}]$  (рис. 2). Величина параметра  $b$  обычно выбирается в несколько раз большей величины интервала между соседними точками  $t_i$  и  $t_{i+1}$  на оси  $t$ , и она определяет ширину окна, которое используют при сглаживании. Обычно  $\sigma = 0,37$  [8].

В данной методике сглаживание по (3) дополняет аппроксимацию экспериментальных данных по (2). Результат, полученный после выполнения последовательно этих двух операций, показан на рис. 6 в виде жирной линии. Здесь же в виде тонкой линии изображена часть

данных, полученных как результат аппроксимации по формуле (2) и показанных на рис. 5 в виде жирной линии.

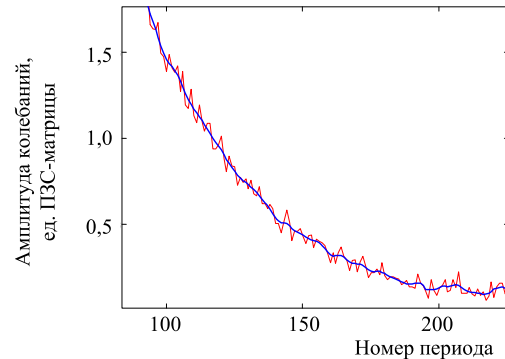


Рис. 6. Зависимости амплитуды колебаний маятника от времени, полученные после: аппроксимации (тонкая линия) и сглаживания (жирная линия)

**Статистическое сглаживание сигнала, соответствующего измерениям периода** (рис. 4), осуществляется на основе процедуры симметричного линейного сглаживания методом наименьших квадратов по правилу  $k$ -ближайших соседей [8]. Результат сглаживания, который образует массив данных  $[\tilde{T}]$  (рис. 2), показан на рис. 4 в виде линии.

Дальнейший анализ результатов измерений проводится с массивами данных  $[\mathcal{E}]$ ,  $[\tilde{T}]$  и  $[t']$  (рис. 2). При этом, исходя из физических предположений о закономерностях затухания амплитуды колебаний маятника и изменения его периода, строят феноменологическую теорию взаимодействия шариков и исследуемых поверхностей, и проводят нелинейную аппроксимацию этих данных теоретическими зависимостями, полученными в этой теории. Результаты подобного анализа представлены в [5, 9].

**Оценка погрешности измерения амплитуды, обусловленной влиянием шумов измерительной цепи.** Для того чтобы оценить уровень шума измерительной цепи, достаточно рассмотреть результаты измерений амплитуды в условиях, когда маятник находится в положении равновесия.

Результат такого измерения представлен на рис. 7, из которого видно, что шумовой сигнал находится в интервале  $\pm 0,04$  единицы, отсчитываемых на шкале ПЗС-матрицы. Экспериментально было установлено, что одна единица на этой шкале соответствует углу отклонения

маятника:  $4,8 \cdot 10^{-5}$  рад. Следовательно, на эксперименте максимальный уровень шумового сигнала составил  $\pm \Delta \alpha_{\text{ш}} = 0,1 \cdot 10^{-5}$  рад или  $\pm \Delta \alpha_{\text{ш}} = 0,2$  угл. с.

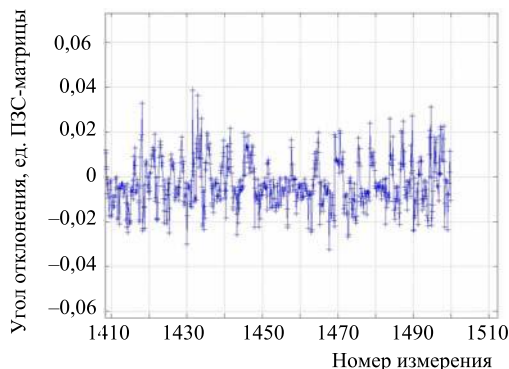


Рис. 7. Сигнал, полученный для покоящегося маятника

**Расчет погрешностей измерения амплитуды, обусловленных дискретностью преобразования аналогового сигнала в цифровой.** Ввиду того что затухание колебаний маятника мало и процесс его колебаний в каждом периоде близок к гармоническому, вблизи максимума отклонения этот процесс можно описать формулой

$$\varphi = \alpha \cos(\Omega t), \quad (4)$$

где  $\Omega t = 2\pi t/T$ .

Тогда мгновенная угловая скорость маятника

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\alpha \Omega \sin(\Omega t). \quad (5)$$

Вблизи максимума отклонения скорость маятника стремится к нулю. Поэтому здесь  $\sin(\Omega t) \approx \Omega t$ , и модуль угловой скорости можно записать как

$$\omega \approx \alpha \Omega^2 t. \quad (6)$$

Если  $\Delta t$  – шаг дискретизации времени (величина, обратная частоте  $f$  считывания информации с ПЗС-матрицы), то погрешность определения амплитуды, связанная с этой дискретностью:

$$\Delta \alpha = \frac{1}{2} \omega \Delta t. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получаем

$$\Delta \alpha = \frac{1}{2} \alpha \Omega^2 \Delta t^2. \quad (8)$$

Можно показать, что изменение периода в процессе колебаний мало влияет на оценку рассматриваемой погрешности. Поэтому в качестве значения  $T$  можно взять его среднее значение. Отсюда следует, что относительная погрешность измерения амплитуды

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{1}{2} (\Omega \Delta t)^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4\pi^2}{T^2} \right) \Delta t^2 = \frac{2\pi^2}{(fT)^2}. \quad (9)$$

При  $T = 2$  с,  $f = 30$  Гц и  $\alpha_{\text{max}} = 100$  угл. с максимальная погрешность  $\Delta \alpha \approx 0,55$  угл. с.

**Влияние шума измерительной цепи и дискретности преобразования аналогового сигнала в цифровой на измерение периода.** При наличии аддитивного шума измерительной цепи, показанного на рис. 7, точки 1 и 2 на рис. 3б, ближайшие к линии нуля, могут совершать прыжки, оказываясь по другую сторону линии нуля. В этом случае минимальная погрешность измерения периода, обусловленная этим шумом,  $\Delta t_{\text{ш}} = 1/f$ . Найдём условие, при котором эта погрешность будет отсутствовать.

Учитывая, что колебания маятника в каждом периоде близки к гармоническим, найдём максимальное значение угла отклонения маятника  $\varphi_a$ , соответствующего точке а на рис. 3б, по формуле

$$\varphi_a = \alpha \sin(\Omega \Delta t_{\text{ш}}) \approx \alpha (\Omega \Delta t_{\text{ш}}) = \frac{2\pi}{Tf}. \quad (10)$$

Указанная погрешность  $\Delta t_{\text{ш}}$  измерения периода будет отсутствовать, если выполняется условие  $\varphi_a > \Delta \alpha_{\text{ш}}$ . Отсюда следует, что минимальная амплитуда, при которой возможно измерение периода, должна удовлетворять условию

$$\alpha_{\text{min}} > \Delta \alpha_{\text{ш}} \frac{Tf}{2\pi}. \quad (11)$$

Пусть  $\Delta \alpha_{\text{ш}} = 0,2$  угл. с;  $T = 2$  с;  $f = 30$  Гц. Тогда получим, что  $\alpha_{\text{min}} > 2$  угл. с.

При выполнении условия (11) погрешность измерения периода будет определяться в основном нестабильностью  $\Delta f$  частоты  $f$ . Эта нестабильность обусловлена главным образом нестабильностью кварцевого тактового генера-

тора устройства, считывающего информацию с фотоприемника. Погрешность  $\Delta\varphi_a$  в определении угла  $\varphi_a$ , связанную с нестабильностью  $\Delta f$ , получим из (10) простым дифференцированием

$$\Delta\varphi_a = -\alpha \frac{2\pi}{Tf^2} \Delta f. \quad (12)$$

Из той же формулы (10) следует, что аналогичная погрешность  $\Delta\varphi_a$ , связанная с погрешностью  $\Delta T$  периода  $T$ :

$$\Delta\varphi_a = -\alpha \frac{2\pi}{T^2 f} \Delta T. \quad (13)$$

Считая, что погрешность  $\Delta T$  обусловлена погрешностью  $\Delta f$ , приравняв друг другу последние две формулы, найдем связь погрешностей  $\Delta T$  с погрешностью  $\Delta f$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta f}{f}. \quad (14)$$

Как правило, относительная нестабильность частоты  $\Delta f/f \approx 10^{-4}$ . Следовательно, при  $T = 2$  с имеем  $\Delta T \approx 2 \cdot 10^{-4}$  с.

## ВЫВОДЫ

Устранение влияния шумов измерительной цепи потребовало разработки оригинальных алгоритмов обработки измерительных сигналов и применения известных методов статистической обработки этих сигналов.

Погрешности измерения амплитуды колебаний, обусловленные дискретностью преобразования сигнала в фотоприемнике и влиянием шумов измерительной цепи, оказались примерно одинаковыми. Следовательно, при периоде колебаний маятника, равном 2 с, считывание информации с фотоприемника с частотой, равной 30 Гц, вполне достаточно для измерений амплитуд колебаний вплоть до нескольких угловых секунд.

Измерение периода колебаний в режиме влияния шумов измерительной цепи возможно лишь до контрентного минимального значе-

ния амплитуды колебаний, которое в условиях опыта составило 2 угл. с. При этом погрешность измерения периода, обусловленная нестабильностью дискретизации сигнала, оказалась равной  $2 \cdot 10^{-4}$  с.

Предложенные средства и методы измерения амплитуд и периодов колебаний физического маятника в режиме микрокачаний позволяют проводить исследование контактного взаимодействия твердых тел в области перемещений его опоры, где само перемещение можно рассматривать как предварительное качение [10], а трение качения можно трактовать как трение покоя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Пинегин, С. В.** Трение качения в машинах и приборах / С. В. Пинегин. – М.: Машиностроение, 1976. – 312 с.
2. **Карасик, И. И.** Методы трибологических испытаний в национальных стандартах стран мира / И. И. Карасик. – М.: Наука и техника, 1993. – 373 с.
3. **Материалы** конструкционные и смазочные. Методы экспериментальной оценки коэффициента трения: ГОСТ 27640–88. – М.: Госкомитет по стандартам; введен 01.06.1988. – 20 с.
4. **Bhushan, B.** Modern tribology handbook / B. Bhushan. – Bora Raton: CRC Press, 2000. – 1760 p.
5. **Джилавдари, И. З.** Феноменологическая теория микрокачаний шарика на пятне контакта / И. З. Джилавдари, Н. Н. Ризноокая // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2010. – Т. 5, № 1. – С. 3–12.
6. **Александров, А. А.** Исследование датчика углового положения на базе квадрантного фотоприемника / А. А. Александров, С. А. Новоселов, М. В. Шахматов // Известия вузов. Приборостроение. – 1987. – № 4. – С. 68–71.
7. **Сергеев, А. Г.** Метрология: учеб. пособие для вузов / А. Г. Сергеев, В. В. Крохин. – М.: Логос, 2001. – 408 с.
8. **MathCad 6.0 PLUS.** Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95: пер. с англ. – М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 1996. – 712 с.
9. **Джилавдари, И. З.** О влиянии адгезии на период свободных микрокачаний маятника / И. З. Джилавдари, А. В. Пилипенко, Н. Н. Ризноокая // Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. – 2008. – № 4. – С. 77–83.
10. **Mekid, S.** A non-linear model for pre-rolling friction force in precision positioning / S. Mekid // Proc. Instn Mech. Engrs Part J: J. Engineering Tribology. – 2004. – Vol. 218, № 4. – P. 305–312.

Поступила 17.12.2010