

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ С ЛОГАРИФИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

*Докт. физ.-мат. наук, проф. МЕЛЕШКО И. Н.,
канд. физ.-мат. наук, доц. ЛАСЫЙ П. Г., асп. ДОВГА Ю. А.*

Белорусский национальный технический университет

Интегралы с известной плотностью:

$$J_1(x) = J_1(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \ln |t - x| dt, \quad x \in [-1, 1]; \quad (1)$$

$$J_2(x) = J_2(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \ln |t - x| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1]; \quad (2)$$

$$J(\varphi) = J(f; \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right| d\tau, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (3)$$

а также интегральные уравнения, содержащие такие операторы, встречаются в решениях важных задач из разных разделов механики, физики и математической физики (например, [1, 2] и библиографии в них).

Полученные в данной статье квадратурные формулы для интегралов (1)–(3) имеют неотрицательные коэффициенты, сравнительно просты, устойчивы и позволяют оценивать погрешность вычислений.

1. Преобразуем интегралы (1), (2) и определим аппроксимацию плотностей этих интегралов:

$$J_1(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \ln \frac{2}{|t - x|} dt + \frac{\ln 2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) dt; \quad (4)$$

$$J_2(f; x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \ln \frac{2}{|t - x|} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\ln 2}{\pi} \int_{-1}^1 f(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (5)$$

Зададим на отрезке $[-1, 1]$ систему точек

$$x_k = kh, \quad k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{2}{2n+1}$$

и аппроксимацию плотности $f(x)$ на этом отрезке определим формулой

$$f(t) \approx \tilde{f}(x) = \sum_{k=-n}^n \theta_k(x) f(x_k), \quad (6)$$

в которой $\theta_k(x) = 1$, если $x \in \left[x_k - \frac{h}{2}; x_k + \frac{h}{2} \right]$ и $\theta_k(x) = 0$, если $x \notin \left[x_k - \frac{h}{2}; x_k + \frac{h}{2} \right]$.

Очевидно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, то

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \omega(f; h), \quad x \in [-1, 1], \quad (7)$$

где $\omega(f; h) = \max_{\substack{x', x'' \in [-1, 1] \\ |x' - x''| \leq h}} |f(x') - f(x'')|$ – модуль

непрерывности функции $f(x)$.

Если же $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то с помощью формулы Тейлора легко установить, что

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{M_1}{2} h, \quad x \in [-1, 1], \quad (8)$$

где $M_1 = \max_{x \in [-1, 1]} |f'(x)|$.

2. Подставив в выражение (4) для $J_1(f; x)$ вместо плотности $f(x)$ ее приближения (6), получим квадратурную формулу

$$J_1(f; x) \approx J_1(\tilde{f}; x) = \tilde{J}_1(x) =$$

$$= \sum_{k=-n}^n A_k(x) f(x_k) + \frac{h \ln 2}{\pi} \sum_{k=-n}^n f(x_k), \quad (9)$$

в которой коэффициенты

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \ln \frac{2}{|t-x|} dt. \quad (10)$$

Очевидно, что все $A_k(x)$ неотрицательны для всех $x \in [-1; 1]$.

Вычисляя интегралы в правой части равенства (10), находим

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \left[(1 + \ln 2)h + \left(x_k - \frac{h}{2} - x \right) \ln \left| x_k - \frac{h}{2} - x \right| - \right.$$

$$\left. - \left(x_k + \frac{h}{2} - x \right) \ln \left| x_k + \frac{h}{2} - x \right| \right].$$

Оценим погрешность квадратурной формулы (9).

Теорема 1. Если плотность интеграла $J_1(f; x)$ непрерывна на отрезке $[-1; 1]$, то имеет место равномерная по $x \in [-1; 1]$ оценка погрешности

$$|J_1(x) - \tilde{J}_1(x)| = \frac{2}{\pi} \omega(f, h). \quad (11)$$

Если же плотность $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|J_1(x) - \tilde{J}_1(x)| = \frac{M_1}{\pi} h, \quad x \in [-1, 1]. \quad (12)$$

Доказательство:

$$|J_1(x) - \tilde{J}_1(x)| = |J_1(f, x) - J_1(\tilde{f}, x)| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int [f(t) - \tilde{f}(t)] \ln |t-x| dt \right| \leq \quad (13)$$

$$\leq \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |\ln |t-x|| dt.$$

Заметив, что $I(x) = \int_{-1}^1 |\ln |t-x|| dt$ является четной функцией, положим $0 \leq x \leq 1$ и преобразуем этот интеграл

$$I(x) = \int_{-1}^0 |\ln |t-x|| dt + \int_0^1 |\ln |t-x|| dt =$$

$$= - \int_{-1}^0 \ln |t+x| dt - \int_0^1 \ln |t-x| dt =$$

$$= - \int_0^{1-x} \ln |t+x| dt - \int_{1-x}^1 \ln |t+x| dt - \int_0^1 \ln |t-x| dt.$$

После исследования функции

$$I(x) = 2 - 2x + \ln \frac{1+x}{1-x} + x \ln(1-x^2), \quad x \in [0, 1]$$

находим, что

$$\max_{x \in [-1, 1]} I(x) = I(0) = 2. \quad (14)$$

Из соотношений (13), (14) и неравенств (7), (8) вытекают оценки (11), (12).

3. Заменим плотность $f(x)$ в представлении интеграла $J_2(f, x)$ (5) по формуле (6). В результате получим квадратурную формулу для этого интеграла

$$J_2(f, x) \approx J_2(\tilde{f}, x) \approx \tilde{J}_2(x) =$$

$$= - \sum_{k=-n}^n A_k(x) f(x_k) - \frac{\ln 2}{\pi} \sum_{k=-n}^n (\eta_k^+ - \eta_k^-) f(x_k), \quad (15)$$

где $\eta_k^\pm = \arccos \left(x_k \pm \frac{h}{2} \right)$, а коэффициенты

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \ln \frac{2}{|t-x|} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (16)$$

Снова замечаем, что все $A_k(x)$ неотрицательны для всех $x \in [-1, 1]$.

Вычислим коэффициенты (16). Имеем последовательно:

$$\int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \eta_k^- - \eta_k^+; \quad (17)$$

$$- \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} \ln |t-x| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\eta_k^-}^{\eta_k^+} \ln |\cos \sigma - \cos \eta| d\sigma =$$

$$= (\eta_k^+ - \eta_k^-) \ln 2 + 2 \int_{\frac{\eta_k^- + \eta}{2}}^{\frac{\eta_k^+ + \eta}{2}} \ln |\sin \tau| d\tau + 2 \int_{\frac{\eta_k^- - \eta}{2}}^{\frac{\eta_k^+ - \eta}{2}} \ln |\sin \tau| d\tau. \quad (18)$$

Обращаясь к формуле разложения логарифма в ряд по косинусам и пользуясь равенствами (17), (18), после простых преобразований найдем, что

$$A_k(x) = \frac{1}{\pi} \left[2(\eta_k^- - \eta_k^+) \ln 2 + N^2(\eta - \eta_k^-) - \right. \\ \left. - N^2(\eta + \eta_k^+) + N^2(\eta - \eta_k^+) - N^2(\eta - \eta_k^-) \right],$$

где $\eta = \arccos x$, а функция $N^2(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\theta}{k^2}$ – значения мнимой части полилогарифма второго порядка на единичной окружности $L^2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ (дилогарифма Эйлера) [3]. Известно также, что $N^2(\theta)$ связана с функцией Лобачевского [4]

$$L(\theta) = - \int_0^{\theta} \ln |\cos \tau| d\tau, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

равенством [3]

$$N^2(\theta) = (\pi - \theta) \ln 2 - 2L\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right).$$

Получим теперь неравенства для оценки погрешности квадратурной формулы (15)

$$\begin{aligned} |J_2(x) - \tilde{J}_2(x)| &= |J_2(f, x) - J_2(\tilde{f}, x)| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-1}^1 [f(t) - \tilde{f}(t)] \ln |t - x| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \leq \quad (19) \\ &\leq \max_{x \in [-1, 1]} |f(t) - \tilde{f}(t)| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |\ln |t - x|| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \end{aligned}$$

С помощью неравенств (7), (8), (19) и известной оценки [5]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 |\ln |t - x|| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq 3 \ln 2$$

легко доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть плотность интеграла $J_2(f, x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, тогда имеет место следующая, равномерная по $x \in [-1, 1]$, оценка погрешности квадратурной формулы (15):

$$|J_2(x) - \tilde{J}_2(x)| \leq 3\omega(f; h) \ln 2,$$

если же $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|J_2(x) - \tilde{J}_2(x)| \leq \frac{3}{2} M_1 \ln 2.$$

4. Квадратурную формулу для интеграла $J(\varphi)$ (3) будем строить и исследовать аналогично. Возьмем на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему точек

$$\varphi_k = kh, \quad k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}$$

и приблизим плотность интеграла $J(f; \varphi)$ на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi) \approx \tilde{f}(\varphi) = \sum_{k=-n}^n \theta_k f(\varphi_k),$$

где $\theta_k(\varphi) = 1$, когда $\varphi \in \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2}\right]$ и

$\theta_k(\varphi) = 0$, если $\varphi \notin \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2}\right]$.

Получается следующая квадратурная формула:

$$J(f; \varphi) \approx J(\tilde{f}; \varphi) = \tilde{J}(\varphi) = - \sum_{k=-n}^n A_k(\varphi) f(\varphi_k), \quad (20)$$

где

$$A_k(\varphi) = - \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right| d\tau. \quad (21)$$

Из представления (21) для коэффициентов видно, что все они неотрицательны для всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$.

Для вычисления интегралов в (21) воспользуемся разложением логарифма в ряд по косинусам

$$\int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right| d\tau = 2 \int_{\frac{h}{2} - \varphi}^{\frac{h}{2} + \varphi} \ln |\sin t| dt =$$

$$= -2 \left[t \ln 2 + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 4t}{2 \cdot 2^2} + \dots \right] \begin{cases} \frac{\varphi_k + \frac{h}{2} - \varphi}{2} \\ \frac{\varphi_k - \frac{h}{2} - \varphi}{2} \end{cases}.$$

Теперь после простых преобразований для коэффициентов $A_k(\varphi)$ получается единая формула

$$A_k(\varphi) = \frac{1}{\pi} \left[h \ln 2 + N^2 \left(\varphi - \varphi_k + \frac{h}{2} \right) - N^2 \left(\varphi - \varphi_k - \frac{h}{2} \right) \right],$$

где функция $N^2(\theta)$ определена выше в п. 3.

Займемся оценкой погрешности квадратурной формулы (20). Очевидно, что в случае непрерывности плотности $f(\varphi)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \omega(f, \varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi]. \quad (22)$$

Если же $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке, то

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \frac{M_1}{2} h, \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad (23)$$

$$M_1 = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f'(\varphi)|.$$

Сравнивая $J(\varphi)$ и $\tilde{J}(\varphi)$, получаем

$$\begin{aligned} |J(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)| &= |J(f; \varphi) - J(\tilde{f}; \varphi)| = \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau) - \tilde{f}(\tau)] \ln \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right| d\tau \right| \leq \quad (24) \\ &\leq \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\tau) - \tilde{f}(\tau)| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right| \right| d\tau. \end{aligned}$$

Замечаем, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \ln \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right| \right| d\tau = 2 \ln 2. \quad (25)$$

Из неравенств и соотношений (22)–(25) вытекает следующее.

Теорема 3. В случае непрерывности плотности интеграла $J(f; \varphi)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$|J(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)| \leq 2 \ln 2 \omega(f; h), \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Если же плотность $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то равномерно по $\varphi \in [-\pi, \pi]$

$$|J(\varphi) - \tilde{J}(\varphi)| \leq \ln 2 M_1.$$

5. В качестве примера возьмем интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int (\sin \varphi + \tau \cos \tau) \ln \left| \sin \frac{\tau - \varphi}{2} \right| d\tau, \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Нетрудно получить для него точное равенство

$$J(\sin \tau + \tau \cos \tau; \varphi) = -2 \sin \varphi \ln \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Результаты численного эксперимента по точной формуле и с помощью квадратурной формулы (20) приводим в табл. 1.

Таблица 1

φ	Число верных знаков ($n = 10$)	Число верных знаков ($n = 50$)
$\pi/12$	2	3
$\pi/4$	2	4

ВЫВОД

Для интегралов с логарифмической особенностью специального вида получены квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами. Равномерные оценки погрешностей приближенных формул позволяют вычислять такие интегралы с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров, В. М.** Контактные задачи тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 487 с.
2. **Габдулхаев, Б. Г.** Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1994. – 288 с.
3. **Пыхтеев, Г. Н.** Полилогарифмы и их свойства и методы вычисления / Г. Н. Пыхтеев, И. Н. Мелешко. – Минск: Изд-во БГУ, 1976. – 68 с.
4. **Градштейн, Н. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Н. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
5. **Мелешко, И. Н.** Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения / И. Н. Мелешко. – Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 197 с.

Поступила 28.10.2011