

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ НА ПОПЕРЕЧНЫЙ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ БЕЗ УЧЕТА И С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Канд. техн. наук, доц. **ОВСЯНКО В. М.**

*Белорусский национальный технический университет*

1. В данной статье получены алгебраические уравнения, которые точно соответствуют дифференциальным уравнениям при расчете стержневых систем на поперечный и продольно-поперечный изгиб. Учтены также вязкоупругие свойства материалов исследуемой системы.

Для дальнейшего решения полученных уравнений синтезированы их электронные модели на основе разработанного автором метода активного инверсного одно- и двукратного дублирования неизвестных [1]. Их дальнейший анализ выполняется не на специализированной аналоговой вычислительной машине, а с помощью пакета программ для расчета электронных цепей на ПЭВМ. Это новое направление в моделировании применено автором для расчета сложных линейных, а также физически, геометрически и конструктивно нелинейных стержневых и континуальных систем на статическое, динамическое действие нагрузок и на устойчивость [2–6].

2. Рассмотрим новый подход для получения точных уравнений, эквивалентных дифференциальным уравнениям изгибаемых стержней при действии на них произвольной поперечной нагрузки с учетом только упругих свойств материала (они могут быть также применены для материала с вязкоупругими характеристиками).

Стандартные дифференциальные уравнения, характеризующие изгибаемый стержень, на который действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , направленная вниз, имеют вид:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q; \quad \frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{E_{ст}J}. \quad (1)$$

Перемещения  $\delta$ , направленные вверх, считаются положительными; изгибающие моменты  $M$  считаются положительными, если они

растягивают нижние волокна;  $E_{ст}J$  – жесткость стержня при изгибе.

В стандартных конечных разностях для стержня, разбитого на два участка, длина каждого из которых равна  $h$ , с сечениями (узлами) 1, 2, 3 уравнения (1) записываются так:

$$\begin{aligned} -M_1 + 2M_2 - M_3 - h^2q &= 0; \\ -\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 + M_2h^2/E_{ст}J &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим несколько иной способ получения уравнений, эквивалентных (1). При произвольной нагрузке (рис. 1а) для стержня с сечениями 1, 2, 3 поперечные силы слева и справа от сечения 2 равны:

$$Q_{2л} = Q_{2л}^0 + \frac{M_2 - M_1}{h}; \quad Q_{2п} = Q_{2п}^0 + \frac{M_3 - M_2}{h}, \quad (3)$$

где  $Q_{2л}^0$  и  $Q_{2п}^0$  – поперечные силы слева и справа от сечения для шарнирно опертых балок с пролетом  $h$ :  $Q_{2л}^0 = -A$ ;  $Q_{2п}^0 = B$ .

Учитывая равновесие узла 2 по поперечным силам ( $Q_{2л} - Q_{2п} = 0$ ), получаем

$$-M_1 + 2M_2 - M_3 - (A + B)h = 0. \quad (4)$$

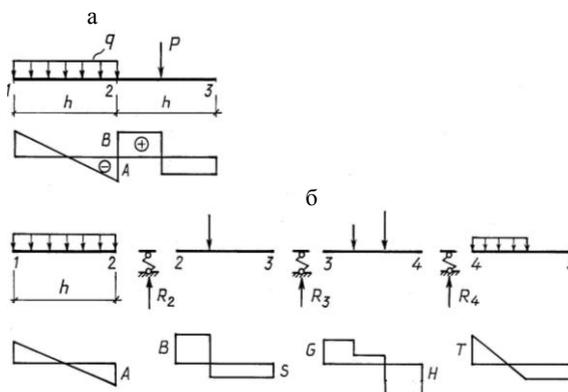


Рис. 1

Углы поворота сечений  $\varphi$  на основании выражения  $\operatorname{tg}\varphi = d\delta/dx = \varphi$  для рассматриваемого случая, когда положительные направления перемещений  $\delta$  приняты вверх, определяются по следующим формулам:

$$\varphi_{2л} = \varphi_{2л}^0 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{h}; \quad \varphi_{2п} = \varphi_{2п}^0 + \frac{\delta_3 - \delta_2}{h}, \quad (5)$$

где  $\varphi_{2л}^0$  и  $\varphi_{2п}^0$  – углы поворота сечения 2 для шарнирно опертых балок 1–2 и 2–3 при совместном действии на них изгибающих моментов по концам стержней ( $M_1$  и  $M_2$  – для балки 1–2,  $M_2$  и  $M_3$  – для балки 2–3) и поперечной нагрузки.

Эти углы поворота (их положительные направления приняты против часовой стрелки) определяются просто путем перемножения окончательной эпюры изгибающих моментов, построенной от поперечной нагрузки, направленной вниз, на нижних растянутых волокнах (со знаком «плюс»), на эпюры от единичных моментов, приложенных в сечении 2 справа для балки 1–2 и слева для балки 2–3 против часовой стрелки в соответствии с принятым положительным направлением углов поворота. Таким образом:

$$\varphi_{2л}^0 = \left[ \frac{1}{E_{\text{ст}}J} \left( \frac{h}{6} M_1 + \frac{h}{3} M_2 \right) + \varphi_{2л}^{00} \right]; \quad (6)$$

$$\varphi_{2п}^0 = - \left[ \frac{1}{E_{\text{ст}}J} \left( \frac{h}{6} M_3 + \frac{h}{3} M_2 \right) + \varphi_{2п}^{00} \right],$$

где  $\varphi_{2л}^{00}$  и  $\varphi_{2п}^{00}$  – углы поворота сечения 2 шарнирно опертых балок 1–2 и 2–3 только от действия любой поперечной нагрузки, приложенной к ним.

Учитывая, что  $\varphi_{2л} = \varphi_{2п}$ , на основании выражений (5) получим:

$$-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 + (\varphi_{2л}^0 - \varphi_{2п}^0)h = 0. \quad (7)$$

С учетом выражений (6) имеем

$$-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 + h^2 \left( \frac{M_1}{6E_{\text{ст}}J} + \frac{2M_2}{3E_{\text{ст}}J} + \frac{M_3}{6E_{\text{ст}}J} \right) + (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00})h = 0. \quad (8)$$

Из (4) определим

$$M_2 - \frac{(A+B)h}{6} = \frac{M_1}{6} + \frac{2M_2}{3} + \frac{M_3}{6}. \quad (9)$$

Подставив выражение (9) в уравнение (8), окончательно получим

$$-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 + h^2 \left[ \frac{M_2}{E_{\text{ст}}J} - \frac{h(A+B)}{6E_{\text{ст}}J} \right] + (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00})h = 0. \quad (10)$$

В уравнении (10), например, если шарнирно опертая балка 1–2 загружена по всему пролету только равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , угол поворота

$$\varphi_{2л}^{00} = \frac{qh^3}{24E_{\text{ст}}J}.$$

Если в сечении (узле) 2 приложена только сосредоточенная сила  $P$ , направленная вниз, то  $(A+B) = P$  при отсутствии поперечной нагрузки на участках 1–2 и 2–3 (тогда  $\varphi_{2л}^{00} = \varphi_{2п}^{00} = 0$ ). Для аналогичного случая, но при узловой силе  $P$ , направленной вверх, в уравнении (10)  $(A+B) = -P$ .

Как видим, (10) является точным в отличие от второго уравнения (2). Точные выражения (4) и (10) при произвольной поперечной нагрузке подлежат моделированию. Для них синтезированы электронные модели, анализируемые далее на ПЭВМ.

В качестве примера, демонстрирующего возможности полученных точных выражений (4) и (10), рассмотрим балку с двумя защемленными концами (рис. 2) длиной 8 м при действии на половине ее равномерно распределенной нагрузки  $q = 3$  кН/м. Разобьем стержень на восемь участков. Длина каждого из них  $h = 1$  м. Жесткость стержня  $EJ = \text{const}$ .

Рассмотрим реализацию граничных условий. Для левого защемления в соответствии с формулами (5) и (6)

$$\varphi_{0л} = \varphi_{0л}^0 + \frac{\delta_1 - \delta_0}{h} = - \frac{1}{EJ} \left( \frac{h}{6} M_1 + \frac{h}{3} M_0 \right) - \varphi_{0л}^{00} + \frac{\delta_1 - \delta_0}{h}. \quad (11)$$

В формуле (11) используются уравнения (5) и (6) для сечения, расположенного справа от защемления. Учитывая, что  $\varphi_{0л} = 0$  и  $\delta_0 = 0$ , имеем:

$$M_0 = - \frac{M_1}{2} - \varphi_{0л}^{00} \frac{3EJ}{h} + \frac{3\delta_1 EJ}{h^2}. \quad (12)$$

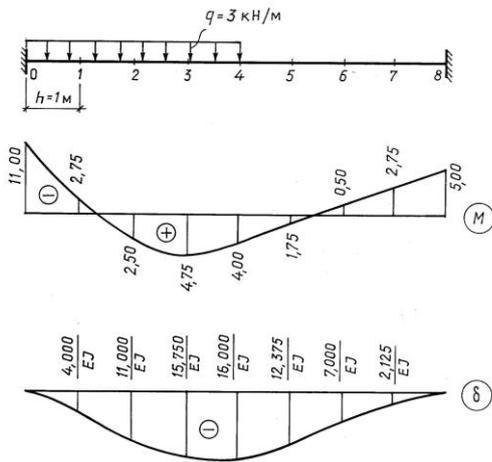


Рис. 2

Сечение 8 расположено слева от защемления, поэтому для него используются формулы (5), (6) и (11) как для левого сечения:

$$\varphi_{8л} = \varphi_{8л}^0 + \frac{\delta_8 - \delta_7}{h} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{h}{6} M_7 + \frac{h}{3} M_8 \right) + \varphi_{8л}^{00} + \frac{\delta_8 - \delta_7}{h}; \quad (13)$$

$$\varphi_{8л} = 0; \quad \delta_8 = 0;$$

$$M_8 = -\frac{M_7}{2} - \varphi_{8л}^{00} \frac{3EJ}{h} + \frac{3\delta_7 EJ}{h^2}.$$

В связи с тем, что на участке 7–8 нет поперечной нагрузки,  $\varphi_{8л}^{00} = 0$ , поэтому

$$M_8 = -\frac{M_7}{2} + \frac{3\delta_7 EJ}{h^2}. \quad (14)$$

Граничные условия (12) и (14) моделируются при помощи управляемых источников напряжения [3], суммирующих слагаемые в соответствии с выражениями (12) и (14). Приведенные на рис. 2 результаты расчета являются совершенно точными.

Если еще необходимо построить эпюры поперечных и продольных сил (при расчете рам с использованием выражений (4) и (10)), то для них синтезируются дополнительные электронные модели.

В случае, когда изгибаемая стержневая система выполнена из вязкоупругого материала,

жесткость стержня  $E_{ст}J$  в выражении (10) изменяется во времени.

На рис. 3а показана шарнирно опертая балка, выполненная из вязкоупругого материала в соответствии с моделью Кельвина, разбитая на четыре участка и подвергнутая действию сосредоточенной силы  $P = 3$  кН, прикладываемой и снимаемой мгновенно в соответствии с приведенным рядом графиком. Известное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в этом случае имеет вид:  $nE_2J\dot{\chi} + EJ\chi = M + n\dot{M}$ , где  $E = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ ;  $n = \kappa / (E_1 + E_2)$ . Здесь величины  $E_2$  и  $E$  – мгновенный и длительный модули упругости материала;  $n$  – время релаксации;  $\kappa$  – коэффициент вязкости;  $\chi$  – кривизна. Тогда  $M = \chi E_{ст}J$ , где  $E_{ст}J$  – фиктивная жесткость балки, изменяющаяся во времени. В явном виде приведенное дифференциальное уравнение для балки из вязкоупругого материала решать не будем.

Для решения поставленной задачи используем уравнения: (10) – для отработки узловых моментов типа  $M_2$  и переменной во времени фиктивной жесткости стержня  $E_{ст}J$ ; (3) – для отработки концевых поперечных сил и вертикальных перемещений заданных сечений балки; для отработки угловых перемещений сечений стержня – уравнения для изгибающих моментов, приведенные в [3, с. 22]. Синтезированная для этих целей электронная модель, анализируемая далее на ПЭВМ, выполняется в соответствии с принципами, изложенными в [3].

Для конкретного примера (рис. 3а) с реологической моделью Кельвина примем  $E_1 = E_0$ ,  $E_2 = 2E_0$ . Тогда пружины электронной схемы-аналога с характеристиками  $E_1$  и  $E_2$  моделируются резисторами  $R_1$  и  $R_2$  с проводимостями  $g_1 = E_1 J / E_0 J = 1$  и  $g_2 = 2E_0 J / E_0 J = 2$ , поэтому  $R_1 = 1,0$  Ом,  $R_2 = 0,5$  Ом. Зададимся временем релаксации  $n = 0,4/3$  с. Тогда емкость конденсатора, который моделирует вязкость материала (цилиндр с вязкой жидкостью), будет равна  $C_\kappa = \kappa / E_0 J = n(E_1 + E_2) / E_0 = 0,4\Phi$ . Здесь  $E_0 J$  – масштабный коэффициент напряжений (примем  $\gamma_u = E_0 J = 1$ ;  $\gamma_g = 1 / E_0 J = 1$ ;  $\gamma_i = 1$ ; где  $\gamma_u, \gamma_g, \gamma_i$  – масштабные коэффициенты напряжений, проводимостей и токов).

Результаты компьютерного анализа синтезированной электронной модели балки, показанной на рис. 3а, на действие импульсно прикладываемой сосредоточенной силы  $P = 3$  кН приведены на рис. 3б. Здесь на графиках: токи  $I(V_2) = M_1$ ,  $I(V_4) = M_2$ ; напряжения  $V(14) = \delta_1$ ,  $V(17) = \delta_2$ ;  $V(1) = \varphi_0$ ,  $V(3) = \varphi_1$ ;  $V(60) = a$ , где параметр  $a$  характеризует переменную во времени жесткость стержня  $E_{ст}J = aE_0J$ ;  $M_1$  и  $M_2$  – изгибающие моменты в сечениях 1 и 2;  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – вертикальные перемещения сечений 1 и 2;  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  – угловые перемещения сечения на левой опоре балки и сечения 1.

3. Рассмотрим моделирование дифференциального уравнения

$$d^4\delta/dx^4 = (-q + p_i)/E_{ст} J \quad (15)$$

для балки, расположенной на упругом винклеровском основании или упругих опорах (рис. 1б). В уравнении (15)  $p_i = cb\delta_i$  – равномерно распределенная реакция основания (отпор основания), где  $c$  – коэффициент постели;  $b$  – ширина балки. Собранная с участка длиной  $h$  под упругой опорой реакция упругого основания  $p_i$  дает реакцию этой опоры.  $R_i = cb\delta_i h = \kappa\delta_i h = p_i h$  ( $\kappa = cb$ ). В этом случае в выражении (4) будет добавлено одно слагаемое  $(+R_2 h)$ .

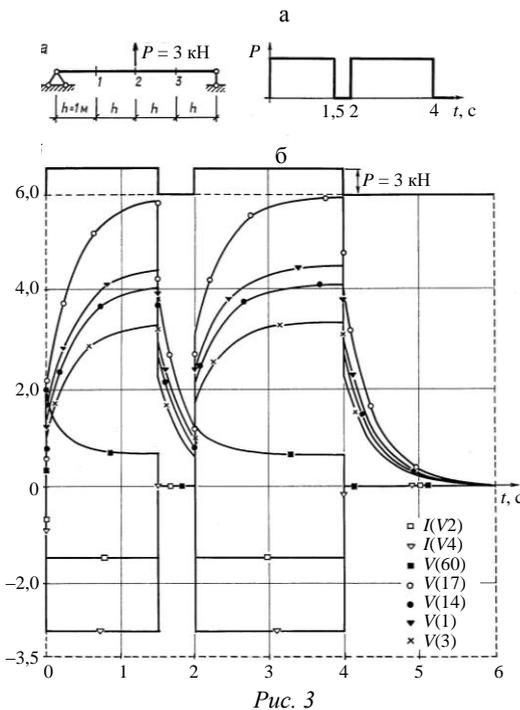


Рис. 3

Если стержень не расположен на упругом основании и загружен по всей длине нагрузкой  $q$ , то уравнение (15), как известно, в конечных разностях (или метод сеток [7]) записывается так:

$$\delta_1 - 4\delta_2 + 6\delta_3 - 4\delta_4 + \delta_5 + qh^4/E_{ст}J = 0. \quad (16)$$

В этом случае конечно-разностная аппроксимация (16) дифференциального уравнения будет точной. При произвольной нагрузке она не является точной и зависит, в частности, от числа участков, на которые разбивается стержень.

Получим точное выражение, подобное уравнению (16) при произвольной нагрузке и любом числе участков, на которые разбивается стержень, с учетом, кроме того, реакций упругих опор  $R_i$ .

Для сечений 2, 3 и 4 запишем уравнение (10). К каждому из них будет добавлено одно слагаемое, учитывающее реакцию упругой опоры ( $R_i h^3/6E_{ст}J$ ), где  $i = 2, 3, 4$ . Далее полученные уравнения (10) для сечений 2 и 4 умножим на  $(-1)$ , а такое же уравнение (10) для сечения 3 умножим на 2. Просуммируем эти три уравнения. Их сумма тоже равна нулю. В полученное выражение войдет слагаемое  $(-M_2 + 2M_3 - M_4)$ , которое определим из уравнения (4) для сечения 3 с учетом реакции упругой опоры  $R_3$ :

$$-M_2 + 2M_3 - M_4 = (S + G)h - R_3 h. \quad (17)$$

Подставим выражение (17) в сумму трех уравнений. Окончательно получим

$$\delta_1 - 4\delta_2 + 6\delta_3 - 4\delta_4 + \delta_5 + \frac{h^3}{6E_{ст}J} \times (A + B - R_2 + 4S + 4G - 4R_3 + H + T - R_4) - h(\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) + 2h(\varphi_{3л}^{00} + \varphi_{3п}^{00}) - h(\varphi_{4л}^{00} + \varphi_{4п}^{00}) = 0. \quad (18)$$

Это и есть точный математический аналог дифференциального уравнения (15). Электронная модель уравнения (18), которая синтезируется для каждого узла рассчитываемого стержня, состоит из резисторов, моделирующих пять первых слагаемых уравнения (18), и источни-

ков тока (для каждого узла модели по одному источнику тока). Если стержень содержит упругие опоры, на которых возникают реакции  $R_i$ , то в соответствии с выражением  $R_i = \kappa \delta_i h$  источники тока будут управляемыми (напряжениями, моделирующими перемещения опор  $\delta_i$ ).

При моделировании с использованием уравнения (18) изгибаемых стержней из вязкоупругого материала переменной во времени будет фиктивная жесткость стержней  $E_{ст}J$ , которая, например, в случае, когда материал характеризуется моделью Кельвина, зависит от мгновенного и длительного модулей упругости материала. Соответствующая электронная модель для ее анализа на ПЭВМ синтезируется на основе [3].

4. В случае, когда кроме поперечной нагрузки стержень длиной  $h$  находится под действием сжимающей продольной силы  $N = v^2 E_{ст} J / h^2$ , формулы типа (3), как известно, записываются так (с учетом обозначений на рис. 1а):

$$\begin{aligned} Q_{2л} &= Q_{2л}^0 + \frac{M_2 - M_1}{h} + N \frac{\delta_2 - \delta_1}{h}; \\ Q_{2п} &= Q_{2п}^0 + \frac{M_3 - M_2}{h} + N \frac{\delta_3 - \delta_2}{h}. \end{aligned} \quad (19)$$

Как и при поперечном изгибе, учитывая равновесие узла 2 ( $Q_{2л} - Q_{2п} = 0$ ), получаем

$$\begin{aligned} -M_1 + 2M_2 - M_3 + N(-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) - \\ -(A + B)h = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $A$  и  $B$  — поперечные силы по концам шарнирно опертых балок пролетом  $h$  от поперечной нагрузки (рис. 1а) на этих участках.

Углы поворота узла 2 (рис. 1а) определяются по формулам (5), но величины  $\varphi_{2л}^0$  и  $\varphi_{2п}^0$ , кроме указанных выше факторов, учитывают влияние продольной сжимающей силы, действие которой выражается через функции Жуковского  $s$  и  $t$  [8]:

$$\begin{aligned} \varphi_{2л}^0 &= \frac{1}{E_{ст}J} \left( \frac{h}{6} M_1 s + \frac{h}{3} M_2 t \right) + \varphi_{2л}^{00}; \\ \varphi_{2п}^0 &= - \left[ \frac{1}{E_{ст}J} \left( \frac{h}{6} M_3 s + \frac{h}{3} M_2 t \right) + \varphi_{2п}^{00} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где  $s$  и  $t$  — известные функции Жуковского:

$$s = \frac{6}{v^2} \left( \frac{v}{\sin v} - 1 \right); \quad t = \frac{3}{v^2} \left( 1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v} \right). \quad (22)$$

Учитывая, что  $\varphi_{2л} = \varphi_{2п}$ , получаем уравнение (7). Подставим в него выражения (21)

$$\begin{aligned} (-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) E_{ст} J + h^2 \left( \frac{M_1 s}{6} + \frac{2}{3} M_2 t + \frac{M_3 s}{6} \right) + \\ + E_{ст} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) h = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражение (23) по смыслу подобно уравнению, приведенному в [8, с. 133]. Здесь углы поворота  $\varphi_{2л}^{00}$  и  $\varphi_{2п}^{00}$  в узле 2 для шарнирно опертых балок 1–2 и 2–3 под действием поперечных нагрузок  $P_n$  и  $q$  и сжимающей силы  $N$  определяются по известным формулам [8, с. 132]:

$$\begin{aligned} \varphi_{2л}^{00} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1,2,\dots} P_n \left[ \frac{\sin(v a_n / h)}{\sin v} - \frac{a_n}{h} \right] + \frac{q h^3}{4 E_{ст} J \gamma_v}; \\ \varphi_{2п}^{00} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1,2,\dots} P_n \left[ \frac{\sin(v b_n / h)}{\sin v} - \frac{b_n}{h} \right] + \frac{q h^3}{4 E_{ст} J \gamma_v}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $a_n$  и  $b_n$  — расстояния от левой и правой опоры до сосредоточенной силы  $P_n$ .

В формулах (23) и (24) принято правило знаков, приведенное выше в данной статье. Коэффициент  $\gamma_v$  определяется по формуле

$$\gamma_v = \frac{v^3}{2 \left[ 2 \operatorname{tg} (v/2) - v \right]} \quad (25)$$

в соответствии с таблицей, приведенной в [8].

Преобразуем выражение (23). Из уравнения (20) получаем

$$-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 = \frac{M_1 - 2M_2 + M_3 + (A + B)h}{v^2 E_{ст} J / h^2}, \quad (26)$$

где  $v^2 E_{ст} J / h^2 = N$ .

Подставим выражение (26) в уравнение (23) и после некоторых преобразований получаем новое уравнение для продольно-поперечного изгиба

$$-M_1 \left( 1 + \frac{v^2 s}{6} \right) + M_2 \left( 2 - \frac{2v^2 t}{3} \right) - \quad 1 + \frac{v^2 s}{6} = \frac{v}{\sin v}; \quad (31)$$

$$-M_3 \left( 1 + \frac{v^2 s}{6} \right) - (A + B)h - \quad (27)$$

$$-E_{cr} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) \frac{v^2}{h} = 0.$$

$$\frac{1 + \frac{v^2 s}{6}}{\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s} = \frac{\frac{v}{\sin v}}{\frac{2(1 - \cos v)}{v}} = \frac{v^2}{2(1 - \cos v)}; \quad (32)$$

$$\frac{\frac{s}{6}}{\frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s} = \frac{\frac{1}{v^2} \left( \frac{v}{\sin v} - 1 \right)}{\frac{2(1 - \cos v)}{v}} = \frac{1 - \frac{1}{v} \sin v}{2(1 - \cos v)}. \quad (33)$$

Дальнейший анализ полученных уравнений выполняется с помощью синтезированных для этих целей электронных моделей, расчет которых производится с использованием пакета программ для анализа электронных цепей на ПЭВМ. Здесь возможны два варианта: первый – для отработки изгибающих моментов используется уравнение (27), а для отработки поперечных перемещений – (20); второй – для отработки изгибающих моментов используется уравнение (20), а для отработки в электронной модели поперечных перемещений – (23).

Выполним дальнейшее преобразование полученных уравнений. Из формулы (20) определим

$$M_1 \frac{s}{6} + M_3 \frac{s}{6} = 2M_2 \frac{s}{6} + \quad (28)$$

$$+ N \frac{s}{6} (-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) - h \frac{s}{6} (A + B).$$

Выражение (28) подставим в формулу (23) и после несложных преобразований с учетом того, что  $N = \frac{v^2 E_{cr} J}{h^2}$ , получим еще одно уравнение, характеризующее продольно-поперечный изгиб:

$$(-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) \left( 1 + \frac{v^2 s}{6} \right) E_{cr} J + h^2 \left[ M_2 \left( \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s \right) - \right. \quad (29)$$

$$\left. - h \frac{s}{6} (A + B) \right] + E_{cr} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) h = 0.$$

Преобразуем и это уравнение. Разделим его на параметр  $\Phi$ , который равен:

$$\Phi = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s = \frac{2}{v} \left( \frac{1 - \cos v}{\sin v} \right), \quad (30)$$

где  $t$  и  $s$  определяются по формулам (22).

Определим элементы, входящие в уравнение (29):

Итак, разделив уравнение (29) на (30), получаем:

$$(-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) E_{cr} J \frac{v^2}{2(1 - \cos v)} + \quad (34)$$

$$+ h^2 \left[ M_2 - h \left( \frac{1 - \frac{1}{v} \sin v}{2(1 - \cos v)} \right) (A + B) \right] +$$

$$+ E_{cr} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) h \frac{v \sin v}{2(1 - \cos v)} = 0.$$

Разложим слагаемые, содержащие  $\sin v$  и  $\cos v$  в (34), в ряды, обозначив:

$$R = 2(1 - \cos v) = 2 \left( \frac{v^2}{2!} - \frac{v^4}{4!} + \frac{v^6}{6!} - \dots \right);$$

$$D = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{2 \left( \frac{1}{2} - \frac{v^2}{4!} + \frac{v^4}{6!} - \dots \right)}; \quad (35)$$

$$K = 1 - \frac{1}{v} \sin v = \frac{v^2}{3!} - \frac{v^4}{5!} + \frac{v^6}{7!} - \dots;$$

$$C' = v \sin v = v^2 - \frac{v^4}{3!} + \frac{v^6}{5!} - \frac{v^8}{7!} + \dots$$

Подставив выражения (35) в уравнение (34), получим:

$$(-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) E_{cr} J D + h^2 \left[ M_2 - h \frac{K}{R} (A + B) \right] + \quad (36)$$

$$+ E_{cr} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) h \frac{C'}{R} = 0.$$

Так как универсальный американский пакет программ для анализа электронных цепей не содержит функций для синуса и косинуса, пришлось использовать при моделировании соглашения (35).

При расчете на продольно-поперечный изгиб очень удобным, особенно при учете вязкоупругого характера работы материала, оказывается следующий вариант уравнения (36). Из выражений (35) имеем:

$$\frac{K}{R} = \frac{KD}{v^2} = ZD; \quad Z = \frac{K}{v^2} = \frac{1}{3!} - \frac{v^2}{5!} + \frac{v^4}{7!} - \dots; \quad (37)$$

$$C = \frac{C'}{R} = v \frac{v \sin v}{2(1 - \cos v)} = \frac{v}{2} \operatorname{ctg} \frac{v}{2} = 1 - \frac{v^2}{2^2 \cdot 3} - \frac{v^4}{2^4 \cdot 45} - \frac{2v^6}{2^6 \cdot 945} - \frac{v^8}{2^8 \cdot 4725} - \dots \quad (38)$$

Тогда уравнение (36) имеет вид

$$(-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) E_{\text{ст}} J D + h^2 [M_2 - hZD(A + B)] + E_{\text{ст}} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) h C = 0. \quad (39)$$

И еще один простой вариант. Разделим уравнение (39) на  $D$  и, учитывая, что  $R = v^2/D$ :

$$C'/RD = C'/v^2 = 1 - \frac{v^2}{3!} + \frac{v^4}{5!} - \frac{v^6}{7!} + \dots = \alpha;$$

$$\frac{1}{D} = \frac{R}{v^2} = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{v^2}{4!} + \frac{v^4}{6!} - \frac{v^6}{8!} + \dots \right) = \beta,$$

окончательно получим

$$(-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) E_{\text{ст}} J + h^2 [M_2 \beta - hZ(A + B)] + E_{\text{ст}} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) h \alpha = 0. \quad (40)$$

Вариант записи уравнения (39) удобен тогда, когда необходимо выделить только один узловый момент типа  $M_2$  (особенно в случае, когда расчет на продольно-поперечный изгиб производится с учетом вязкоупругого характера работы материала стержней):

$$M_2 = \frac{1}{h^2} (\delta_1 - 2\delta_2 + \delta_3) E_{\text{ст}} J D + hZD(A + B) - E_{\text{ст}} J (\varphi_{2л}^{00} + \varphi_{2п}^{00}) \frac{1}{h} C = 0. \quad (41)$$

В выражении (41), как и в других аналогичных уравнениях, где присутствует слагаемое  $(A + B)$ , перед произведением  $hZD/(A + B)$  стоит знак «плюс» для случая, когда поперечная нагрузка направлена вниз. Если такая нагрузка направлена вверх, то перед этим произведением будет стоять знак «минус». В случае, когда в узле приложена только сосредоточенная сила  $P$ , а на участках, на которые разбит стержень, слева и справа от узловой силы  $P$  другой поперечной нагрузки нет, то  $A + B = P$  (в формуле (41) и других аналогичных формулах), если сила  $P$  направлена вниз. Для случая, когда эта сила направлена вверх,  $A + B = -P$ . Тогда же при отсутствии на соседних участках слева и справа от силы  $P$  поперечной нагрузки в формуле (41) и других аналогичных выражениях  $\varphi_{2л}^{00} = \varphi_{2п}^{00} = 0$ .

Итак, окончательно: для моделирования продольно-поперечного изгиба целесообразно использовать совместно уравнения (20) и (40). Если поперечная нагрузка отсутствует, в частности при расчете на устойчивость, полученные выражения приобретают простой вид:

$$(-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) E_{\text{ст}} J + h^2 M_2 \beta = 0; \quad (42)$$

$$-M_1 + 2M_2 - M_3 + \frac{v^2 E_{\text{ст}} J}{h^2} (-\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3) = 0,$$

где

$$\beta = 1/D = R/v^2 = 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{v^2}{4!} + \frac{v^4}{6!} - \frac{v^6}{8!} + \dots \right).$$

В качестве простого примера, демонстрирующего возможности полученных уравнений (например, типа (20) и (40)), на рис. 4 показан расчет шарнирно опертой балки на совместное действие поперечной нагрузки  $q = 3$  кН/м и сжимающей силы  $N = 0,1EJ$  кН. Убедиться в правильности построенных эпюр для  $M$  и  $\delta$  можно, например, с помощью уравнений (20) и (27) или на основании совершенно простой формулы:  $M = M_q + N\delta$ , где  $M_q$  – эпюра изгибающих моментов только от нагрузки  $q$ . Электронные модели уравнений (20) и (40) в данной статье не приводятся. Они синтезированы на основе методики, приведенной в [3], и с их помощью можно решать уравнения типа (20) и (40), создавая электронную схему-аналог для всей исследуемой стержневой системы.

Кстати, если продольная сила  $N$  отсутствует ( $v^2 = 0$ ), то  $D = 1$ ,  $Z = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$ ,  $C = 1$  и уравнение (40) превращается в (10) для обычного поперечного изгиба.

5. Рассмотрим в качестве примера расчет балки из вязкоупругого материала на совместное действие поперечной узловой нагрузки  $P = 3$  кН и продольной сжимающей силы  $N = 0,25$  кН (рис. 5а), где  $N = \frac{v^2 E_{ct} J}{h^2} = \frac{v^2 a E_0 J}{h^2}$ .

Здесь  $a$  – параметр, изменяющийся во времени, поэтому, если для рассматриваемого примера принять  $E_0 J = 1$  (эта величина выступает как масштабный коэффициент напряжений  $\gamma_u$ ),  $v^2 = 0,25/a$  ( $h = 1$  м). Тогда  $v^2$  будет также переменной величиной. Параметр  $a$  реализуется при помощи электронной схемы, приведенной в [3]. Переменный во времени параметр  $v^2$  обрабатывается с помощью простой схемы [3, с. 144] для решения линейного уравнения ( $-Nh_2 + v^2 a = 0$ ). Моделирование рассматриваемой задачи базируется, в частности, на использовании уравнений (19) и (39). Учитывая специфику данного журнала, анализируемые на ПЭВМ электронные модели рассматриваемого объекта из вязкоупругого материала в данной статье не приводятся. Они синтезируются в соответствии с [3].

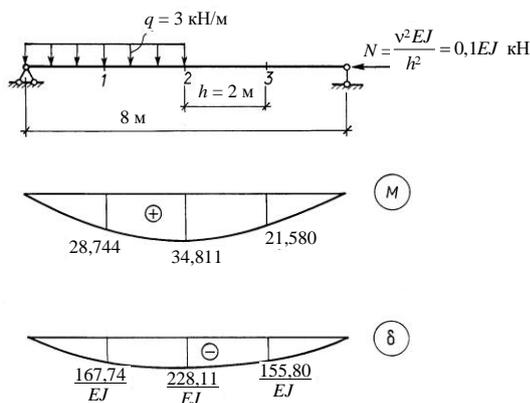


Рис. 4

Реологической моделью вязкоупругого материала балки, как и для случая на рис. 3, является модель Кельвина. Принятые для расчета параметры этой модели – те же, что и рассмотренные в п. 2 данной статьи. Первое слагаемое для узловых изгибающих моментов типа (41) обрабатывается в соответствии с принципами,

изложенными в [3]. Электронная модель для реализации поперечных сил синтезируется на основе формул (19), где при определении поперечных сил, возникающих слева и справа от узла 2, в формуле для момента  $M_2$  (для рассматриваемого примера) учитывается второе слагаемое ( $-hZD(A + B)$ ). Здесь знак «минус» соответствует случаю, когда сила  $P$  направлена вверх и равна  $(A + B)$ . Отработка параметров  $Z$  и  $D$  базируется на использовании простых схем типа тех, что имеются в [3, с. 36].

На рис. 5б показаны графики, демонстрирующие результаты компьютерного анализа электронной модели балки из вязкоупругого материала (характеризуемого реологической моделью Кельвина) при действии на нее импульсно прикладываемых и снимаемых нагрузок  $P$  и  $N$  (рис. 5а). Как видно из рис. 5а, продольная сила  $N$  через время 4 с снимается с балки, а поперечная сила  $P$  продолжает действовать.

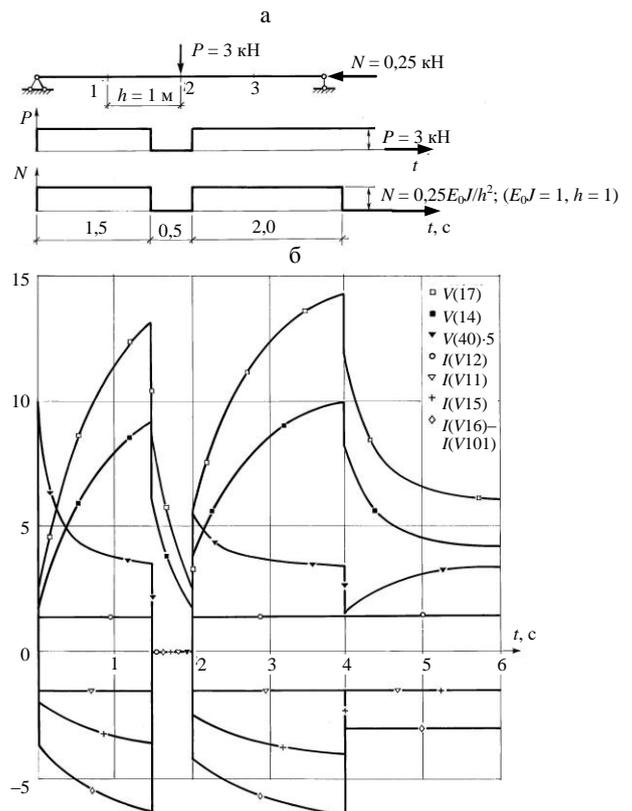


Рис. 5

На приведенных графиках (рис. 5): токи  $I(V15) = M_1$ ,  $[I(V16) - I(V101)] = M_2$ ,  $I(V11) = Q_{л1}$ ,  $I(V12) = Q_{п1}$ ; напряжения  $V(14) = \delta_1$ ,

$V(17) = \delta_2$ ,  $V(40) \cdot 5 = 5a$  (график параметра  $a$ , характеризующего переменную во времени жесткость стержня  $E_{ст}J = aE_0J$ , показан увеличенным в 5 раз). Здесь  $M_1$  и  $M_2$  – изгибающие моменты в сечениях 1 и 2;  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – вертикальные перемещения сечений 1 и 2. Масштабные коэффициенты напряжений, проводимостей и токов для электронной модели приняты как и для примера, приведенного на рис. 3, равными единице ( $\gamma_u = E_0J = 1$ ,  $\gamma_g = 1$ ,  $\gamma_i = 1$ ). Элементарный анализ полученных графиков ввиду их наглядности читатель может выполнить сам.

Следует отметить, что период действия каждой из нагрузок  $P$  и  $N$  может быть различным. Число периодов, а также время действия и снятия любой из этих нагрузок могут быть также произвольными.

#### ВЫВОДЫ

В данной статье приведены простые примеры, но с помощью разработанной методики моделирования легко анализируются стержневые системы с любым числом стержней как на поперечный, так и на продольно-поперечный изгиб с учетом вязкоупругих свойств материала, характеризующихся не только реологической моделью Кельвина, как это сделано в данной статье, но и любыми другими моделями (Фойгта, Максвелла), а также их различными комбинациями. Кроме того, предлагаемая методика моделирования позволяет решать еще более сложные задачи, когда каждая из упругих характеристик пружин и характеристика коэффициента вязкости (например, в модели типа Кельвина) имеют нелинейный характер, реализуемый полиномиальными управляемыми источниками тока [3], моделирующими любую нелинейную зависимость, в том числе когда упругая характеристика одной из пружин и коэффициента вязкости параллельно присоединенного к ней цилиндра с вязкой жидкостью имеют отрицательные значения.

В работе [5] описана схема, когда дополнительно к вязкоупругим свойствам материала

можно учитывать и его жесткопластический характер работы, т. е. моделировать сухое трение. На основе методики моделирования продольно-поперечного изгиба стержня автором выполнено исследование динамическим методом устойчивости стержневых систем из вязкоупругого материала, когда по характеру колебаний можно судить о величине сжимающей силы и ее критическом значении.

Упомянутый выше универсальный пакет для расчета всевозможных электронных цепей, с помощью которого автор в соответствии с предложенным им направлением в моделировании производит расчет объектов строительной механики и прикладной теории упругости, позволил просто реализовать и резистор, и конденсатор с отрицательными значениями их величин.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянко, В. М.** Синтез электронных моделей деформируемых объектов / В. М. Овсянко. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.
2. **Овсянко, В. М.** Следящая сила и вокруг нее: компьютерный анализ электронных моделей деформируемых объектов / В. М. Овсянко. – Минск: Полымя, 1999. – 272 с.
3. **Овсянко, В. М.** Компьютерный анализ электронных моделей деформируемых объектов на примере одной неконсервативной системы / В. М. Овсянко // Известия вузов. Строительство. – 1995. – № 7–8. – С. 27–32.
4. **Овсянко, В. М.** Параметрические колебания системы со следящей силой / В. М. Овсянко // Пространственные конструкции в Красноярском крае: сб. науч. тр. / Красноярский инженерно-строительный институт, 1994. – С. 156–171.
5. **Овсянко, В. М.** Компьютерный анализ электронных моделей объектов реологии / В. М. Овсянко // Известия вузов. Строительство. – 2003. – № 4. – С. 26–34.
6. **Устройство** для моделирования изгибаемого стержня с односторонними шарнирами: а. с. № 1815659 / В. М. Овсянко; зарегистрировано в Государственном регистре изобретений СССР 11 октября 1992 г. по заявке № 4872298 от 14 августа 1990 г.
7. **Варвак, П. М.** Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П. М. Варвак, Л. П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.
8. **Корноухов, Н. В.** Прочность и устойчивость стержневых систем / Н. В. Корноухов. – М.: Стройиздат, 1949. – 376 с.

Поступила 02.12.2011