

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
DEFORMATION  
IN SOLID MECHANICS

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-4-292-296>

УДК 539.3

## Функция Грина для упругой полуполосы

Доктор техн. наук, проф. С. В. Босаков<sup>1)</sup>, магистрант М. А. Мелянюк<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

**Реферат.** В представленной работе аналитически определяются вертикальные перемещения верхней грани упругой полуполосы с нижней шарнирно опертой гранью от действия вертикальной сосредоточенной силы, приложенной к верхней грани. При этом используется метод специальной аппроксимации, ранее эффективно применяемый в работах И. Снеддона и позднее В. М. Александрова. На нижней грани полуполосы принимаются равными нулю вертикальные перемещения и касательные напряжения. Искомое выражение для перемещений складывается из перемещений бесконечной полосы от действия двух симметрично приложенных вертикальных сил и самоуравновешенной нормальной горизонтальной нагрузки, приложенной к торцу полуполосы и равной нормальным горизонтальным напряжениям от действия двух симметрично приложенным силам к бесконечной полосе с обратным знаком. Перемещения от самоуравновешенной по методу Ритца представляются в виде двойного ряда по классическим ортогональным функциям – полиномам Эрмита с весом и Лежандра с неопределенными коэффициентами, которые определяются из условия минимума функционала полной энергии деформаций полуполосы и работы торцевой самоуравновешенной горизонтальной нагрузки. Полученное выражение для перемещений содержит элементарные функции, имеет логарифмическую особенность в точке приложения силы и убывает на бесконечности. Приводятся графики вертикальных перемещений верхней грани полуполосы при различных положениях внешней вертикальной силы. Также графически показана точность принятой специальной аппроксимации. Полученные результаты могут найти применение при решении различных контактных задач для упругой полуполосы, нагруженной по верхней грани.

**Ключевые слова:** полуполоса, функция Грина, метод Ритца, вертикальные перемещения, ортогональные полиномы

**Для цитирования:** Босаков, С. В. Функции Грина для упругой полуполосы / С. В. Босаков, М. А. Мелянюк // *Наука и техника*. 2025. Т. 24, № 4. С. 292–296. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-4-292-296>

## Green's Function for Elastic Half-Strip

S. V. Bosakov<sup>1)</sup>, M. A. Melyanyuk<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** In the presented work, vertical displacements of the upper face of an elastic half-strip with a hinged lower face are analytically determined under the action of a vertical concentrated force applied vertically to the upper face. In this case, the method of special approximation is used, previously effectively used in the works of I. Sneddon and, later, V. M. Alexandrov. On the lower face of the half-strip, vertical displacements and tangential stresses are assumed to be equal to zero.

---

**Адрес для переписки**

Босаков Сергей Викторович  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 65,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 293-93-04  
vm3\_ftk@bntu.by

---

**Address for correspondence**

Bosakov Sjarhei V.  
Belarusian National Technical University  
65, Nezavisimosty Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 293-93-04  
vm3\_ftk@bntu.by

The desired expression for the displacements consists of the displacements of the infinite strip under the action of two symmetrically applied vertical forces and a self-balanced normal horizontal load applied to the end of the half-strip and equal to the normal horizontal stresses under the action of two symmetrically applied forces to the infinite strip with the opposite sign. The displacements under a self-balanced load according to the Ritz method are presented as a double series in classical orthogonal functions – Hermite polynomials with weight and Legendre polynomials with undetermined coefficients, which are determined under the condition of the minimum of the functional of the total energy of deformations of the half-strip and the work of the end self-balanced horizontal load. The obtained expression for displacements contains elementary functions, has a logarithmic singularity at the point of application of the force and decreases at infinity. Graphs of vertical displacements of the upper face of the half-strip are given for different positions of the external vertical force. The accuracy of the adopted special approximation is also shown graphically. The obtained results can be used to solve various contact problems for an elastic half-strip loaded along the upper face.

**Key words:** half-strip, Green's function, Ritz method, vertical displacements, orthogonal polynomials

**For citation:** Bosakov S. V., Melyanyuk M. A. (2025) Green's Function for Elastic Half-Strip. *Science and Technique*. 24 (4), 292–296. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-4-292-296> (in Russian)

### Введение

В статье [1] приведена обширная библиография по исследованию напряженно-деформированного состояния упругой полуполосы. Авторы [2–5] рассматривали различные контактные задачи для полуполосы. Ниже получено аналитическое выражение для определения вертикальных перемещений верхней грани полуполосы от действия сосредоточенной силы (рис. 1).

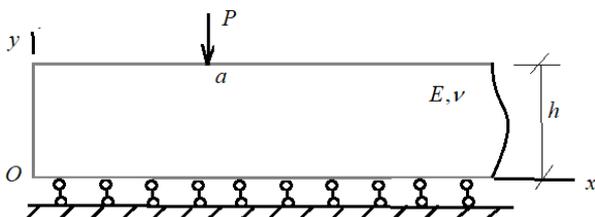


Рис. 1. Полуполоса под действием сосредоточенной силы  
Fig. 1. Half-strip under concentrated force

### Основная часть

Рассмотрим бесконечную полосу, симметрично нагруженную двумя силами  $P$ . По оси симметрии полосы будут действовать самоуравновешенные нормальные напряжения, выражение для которых можно определить по результатам Я. С. Уфлянда [6]:

$$\sigma_x = \frac{4P}{h\sqrt{2\pi}} \times \int_0^\infty \frac{(\mu \cosh \mu - \sinh \mu) \cosh \frac{y}{h} \mu - \mu \frac{y}{h} \sinh \mu \frac{y}{h} \sinh \mu}{2\mu + \sinh 2\mu} \times \cos \frac{a}{h} \mu d\mu. \quad (1)$$

Приложив к торцевой грани полуполосы нормальные напряжения (1) с обратным знаком и определив от них вертикальные перемещения верхней грани полуполосы, вместе с перемещениями полосы от действия двух сил  $P$  получим искомую функцию Грина.

Перемещения верхней грани полосы от сил  $P$  известны [7]

$$V(x) = \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \times \int_0^\infty L_1(u) \left( \cos u \frac{x-a}{h} + \cos u \frac{x+a}{h} \right) \frac{du}{u}, \quad (2)$$

$$L_1(u) = \frac{\cosh^2 u - 1}{2u + \sinh 2u}$$

где  $\nu$ ,  $E$  – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала полуполосы.

Определим перемещения верхней грани полуполосы от самоуравновешенной торцевой нагрузки (1). Прежде всего заметим, что согласно принципу Сен-Венана [8] эти перемещения будут быстро убывать от места приложения нагрузки. Поэтому представим перемещения в виде двойных рядов по полиномам Эрмита с весом и Лежандра [9]:

$$U(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{h^2}\right) \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty A_{2m, 2n} H_{2m}\left(\frac{x}{h}\right) P_{2n}\left(\frac{y}{h}\right); \quad (3)$$

$$V(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{h^2}\right) \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty B_{2m, 2n+1} H_{2m}\left(\frac{x}{h}\right) P_{2n+1}\left(\frac{y}{h}\right),$$

где  $H(z)$ ,  $P(z)$  – полиномы Эрмита и Лежандра.

Найдем энергию деформаций полуполо-  
сы [8] по выражениям (3)

$$\Phi = \int_0^h \int_0^{\infty} \left( \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{E}{4(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right) dx dy. \quad (4)$$

Работа нормальных напряжений  $\sigma_x$  при  $x = 0$

$$\Psi = \int_0^h \sigma_x U_{x=0} dy. \quad (5)$$

При учете первых восьми членов двойных  
рядов (3) для (5) получаем:

$$\Psi = 3P \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} L_2(\mu) (A_{0,2} - 2A_{2,2}) \cosh\left(\frac{a}{h}\mu\right) d\mu, \quad (6)$$

$$L_2(\mu) = \frac{2 + 2\mu^2 - 2 \cosh 2\mu + \mu \sinh 2\mu}{\mu^3 (2\mu + \sinh 2\mu)}.$$

Для вычисления несобственных интегралов (2) и (6) используем способ специальной аппроксимации. Этот способ, видимо, впервые, использовал И. Снеддон при симметричной деформации толстой пластины [10], позднее – В. М. Александров [7] при решении контактных задач для полосы и клина. Поэтому на основании асимптотических свойств подынтегральных функций  $L_1(u)$ ,  $L_2(\mu)$  принимаем:

$$L_1(u) = \tanh \frac{u}{2} + \frac{u^3}{4 \cosh 2u}; \quad (7)$$

$$L_2(\mu) = 0,71 \frac{\tanh^2 0,41\mu}{4,2 + \mu^2}.$$

Точность аппроксимации (7) можно оценить по графикам рис. 2 и 3.

Далее используем формулы разложений и интегралов [9, 11]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\tanh \alpha x}{x} \cos mx dx = \ln \operatorname{cth} \frac{\pi m}{4\alpha};$$

$$\tanh^2 \mu = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \mu};$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{(2k-1)\pi\beta}{2\alpha}} \frac{\left( 2 \left( (1-2k)^2 \right)^{3/2} \pi^2 \alpha + 8d^2 (2k-1) \alpha^3 + (1-2k)^4 \pi^3 \beta - 4d^2 (1-2k)^2 \pi \alpha^2 \beta \right)}{(\alpha - 2k\alpha)^2 16 \left( (1-2k)^2 \pi^2 - 4d^2 \alpha^2 \right)^2}.$$

$$\frac{1}{\cosh^2 \mu} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^2 \pi^2 - 4\alpha^2 \mu^2}{\left( (2k-1)^2 \pi^2 + 4\alpha^2 \mu^2 \right)^2};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta \mu d\mu}{\left( (2k-1)^2 \pi^2 + 4\alpha^2 \mu^2 \right) (d^2 + \mu^2)} =$$

$$= - \frac{e^{-d\beta} \left( (2k-1)^2 \pi + 2d e^{d\beta - \frac{(2k-1)\pi\beta}{2\alpha}} (2-1)k\alpha \right)}{2d(2k-1)^2 \left( (2k-1)^2 \pi^2 - 4d^2 \alpha^2 \right)};$$

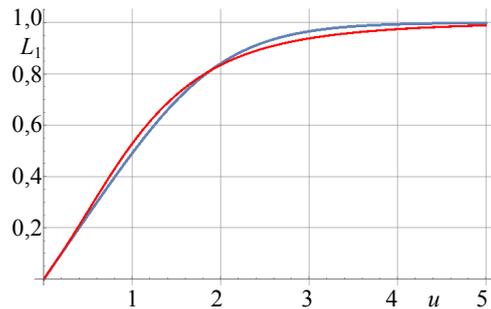


Рис. 2. Сравнение точного и аппроксимированного (красный цвет) выражений для  $L_1(u)$

Рис. 2. Сравнение точного и аппроксимированного (красный цвет) выражений для  $L_1(u)$

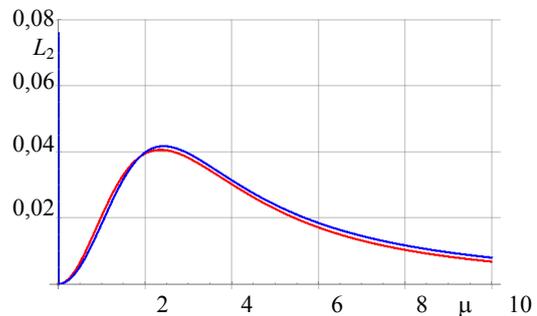


Рис. 3. Сравнение точного и аппроксимированного (красный цвет) выражений для  $L_2(u)$

Fig. 3. Comparison of exact and approximate (red) expressions for  $L_2(u)$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mu^2 \cos \beta \mu d\mu}{\left( (2k-1)^2 \pi^2 + 4\alpha^2 \mu^2 \right)^2 (d^2 + \mu^2)} =$$

$$= - \frac{e^{-d\beta} \pi \left( d\alpha \sec^2(d\alpha) - \operatorname{tg}(d\alpha) \right)}{128d^2 \alpha^3} +$$

Находилась энергия деформаций (4) и работа внешней нагрузки (6) с использованием представлений для перемещений (3), формул (8) для первых восьми членов двойного ряда. Затем полученное выражение дифференцировалось по каждому из неизвестных коэффициентов  $A_{2m,2n}$ ,  $B_{2m,2n+1}$  и, согласно методу Ритца [8], приравнявалось нулю. Решение образованной системы линейных алгебраических уравнений позволяет найти функцию Грина для определения вертикальных перемещений верхней грани полуполосы от действия сосредоточенной силы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 V(x, h) = & -\frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \left( \ln \left( \operatorname{cth} \left( \pi \frac{|x-a|}{2h} \right) \right) \right) + \\
 & + \ln \left( \operatorname{cth} \left( \pi \frac{|x+a|}{2h} \right) \right) - \frac{\pi^3}{512} \left( -3 + \cosh \left( \frac{\pi(x-a)}{2h} \right) \right) - \\
 & - \frac{1}{512} \pi^3 \left( -3 + \cosh \frac{\pi(x-a)}{2h} \right) \operatorname{sech}^3 \frac{\pi(x-a)}{4h} - \\
 & - \frac{1}{512} \pi^3 \left( -3 + \cosh \frac{\pi(x+a)}{2h} \right) \operatorname{sech}^3 \frac{\pi(x+a)}{4h} + \\
 & + e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2m,2n+1} H_{2m} \left( \frac{x}{h} \right).
 \end{aligned}$$

Отметим, что формулы для коэффициентов  $A_{2m,2n}$ ,  $B_{2m,2n+1}$  имеют громоздкий вид и в статье не приводятся.

На рис. 4 показаны графики перемещений верхней грани полуполосы при различных положениях внешней силы и коэффициенте Пуассона материала полуполосы  $\nu = 0,167$ .

**ВЫВОД**

В работе приведено аналитическое выражение для вертикальных перемещений верхней грани упругой полуполосы с закрепленной нижней гранью от действия вертикальной сосредоточенной силы, приложенной к верхней грани. Выражение содержит элементарные функции и может быть использовано для решения разнообразных контактных задач для упру-

гой полуполосы. Подобный подход может быть использован для определения вертикальных перемещений полуполосы с иными граничными условиями по ее нижней грани.

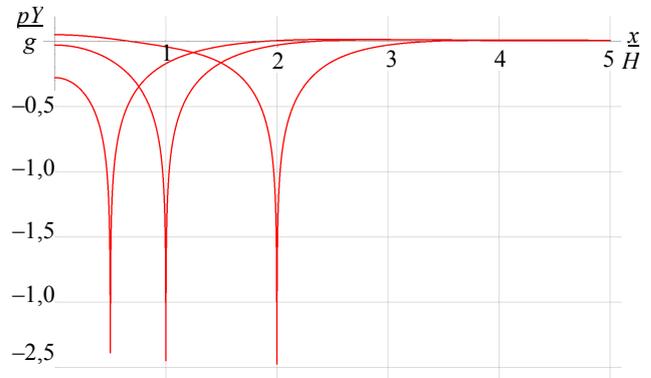


Рис. 4. Графики вертикальных перемещений верхней грани полуполосы от действия сосредоточенной силы для  $a = 0,5h$ ;  $a = h$ ;  $a = 2h$  при коэффициенте Пуассона материала полуполосы 0,167

Fig. 4. Graphs of vertical displacements of the upper face of the half-strip under the action of a concentrated force for  $a = 0,5h$ ;  $a = h$ ;  $a = 2h$  for the Poisson's ratio of the half-strip material of 0.167

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Ворович, И. И. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы / И. И. Ворович, В. В. Копасенко // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 1. С. 109–115.
2. Нуллер, В. М. Об одной контактной задаче для упругой полуполосы / В. М. Нуллер // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1973. № 5. С. 143–148.
3. Гомилко, А. М. Метод однородных решений в смешанной задаче для полуполосы / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Прикладная механика. 1990. Т. 26, № 2. С. 98–108.
4. Босаков, С. В. Контактная задача для упругой полуполосы / С. В. Босаков // Весці нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1997, № 4. С. 119–121.
5. Босаков, С. В. К решению контактной задачи для упругой полуполосы / С. В. Босаков // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 5. С. 405–409. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-405-409>.
6. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. М.–Л.: Наука, 1967. 402 с.
7. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
8. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.

9. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
10. Снеддон, И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. М.: Изд-во иностран. лит., 1955. 667 с.
11. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. М.: Наука, 1969. 228 с.

Поступила 22.04.2025

Подписана к печати 23.06.2025

Опубликована онлайн 31.07.2025

#### REFERENCES

1. Vorovich I. I., Kopasenko V. V. (1966) Some Problems in the Theory of Elasticity for a Semi-Infinite Strip. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 30 (1), 128–136. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(66\)90062-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(66)90062-1).
2. Nuller V. M. (1973) On a Contact Problem for an Elastic Half-Strip. *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids*, (5), 143–148 (in Russian).
3. Gomilko A. M., Grinchenko V. T., Meleshko V. V. (1990) Method of Homogeneous Solutions in a Mixed Problem for a Half-Strip. *Soviet Applied Mechanics*, 26 (2), 193–202. <https://doi.org/10.1007/bf00887116>.
4. Bosakov S. V. (1997) Contact Problem for an Elastic Halfstrip. *Vesti Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, (4), 119–121 (in Russian).
5. Bosakov S. V. (2021) To Solution of Contact Problem for Elastic Half-Strip. *Nauka i Tehnika = Science & Technique*, 20 (5), 405–409. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-5-405-409> (in Russian).
6. Uflyand Y. S. (1968) *Integral Transformations in Elasticity Theory*. Leningrad, Nauka Publ. 402 (in Russian).
7. Galin L. A. (ed.) (1976) *Development of the Theory of Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).
8. Aleksandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
9. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. (1963) *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*. Moscow, Publishing House of Physical and Mathematical Literature. 1100 (in Russian).
10. Sneddon I. (1950) *Fourier Transforms*. New York, McGraw-Hill.
11. Dwight H. B. (1961) *Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas*. 4<sup>th</sup> ed. New York, Macmillan.

Received: 22.04.2025

Accepted: 23.06.2025

Published online: 31.07.2025