МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
DEFORMATION IN SOLID MECHANICS

https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-289-294

УДК 624.04

Функции Грина для статически неопределимых однопролетных балок

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков[1, 2], канд. техн. наук, доц. О. В. Козунова[1]

[1]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь),
[2]Белорусско-российский университет (Могилев, Республика Беларусь)

Реферат. В зависимости от класса в инженерной практике различают решаемые задачи: статические / динамические, плоские / пространственные, контактные / с частичным или краевым опиранием и др. Давление рельса на шпалу, колонны на фундамент, плит перекрытия на стены, фундамента на грунтовое основание – все это типичные примеры практических задач, приводящие к необходимости решения краевых задач – математически и контактных – физически. Из математических постановок контактных задач конструкций, лежащих на упругом основании, известно, что основу их решения составляет поиск закона распределения реактивных давлений на контакте конструкции с основанием, который сложным образом зависит от жесткости конструкции, упругих характеристик основания, внешней нагрузки, характера закрепления конструкции. При решении многих краевых и начально-краевых задачах строительной механики и теории упругости, таких как решение классического однородного уравнения методом собственных функций, при некоторых граничных условиях, вытекающих из рода закрепления балки на концах, важную, порой определяющую, роль играют фундаментальные функции оператора x^{IV}, которые получили свою базовую трактовку академиком А. Н. Крыловым. Однако вычисления по этим формулам весьма затруднительны из-за математических ограничений и громоздкости выражений. В связи с этим в предлагаемой работе использованы собственные функции дифференциального уравнения изгибных колебаний статически неопределимых однопролетных балок для построения функции Грина в виде бесконечного ряда по этим собственным функциям. Построены точные выражения для определения прогибов балок от сосредоточенной силы. Полученные выражения представлены через элементарные функции, носят общий характер и дают возможность решать разнообразные задачи статики, динамики и устойчивости рассматриваемых балок. Авторами получены численные результаты для изгибающих моментов и прогибов защемленной балки и балки с защемленной и шарнирной опорами с использованием компьютерного пакета MATHEMATICA.

Ключевые слова: собственные функции, ортогональность, статически неопределимые балки, внутренние усилия

Для цитирования: Босаков, С. В. Функции Грина для статически неопределимых однопролетных балок / С. В. Босаков, О. В. Козунова // *Наука и техника.* 2024. Т. 23, № 4. С. 289–294. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-289-294

Green's Functions for Statically Indeterminate Single-Span Beams

S. V. Bosakov[1, 2], O. V. Kozunova[1]

[1]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus),
[2]Belarusian-Russian University (Mogilev, Republic of Belarus)

Abstract. Depending on the class in engineering practice, the problems to be solved are distinguished: static/dynamic, flat/spatial, contact/with partial or edge support, etc. The pressure of a rail on a sleeper, a column on a foundation, floor slabs

Адрес для переписки
Босаков Сергей Викторович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

Address for correspondence
Bosakov Siarhei V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
sevibo@yahoo.com

on walls, a foundation on a soil foundation – all these are typical examples of practical problems that lead to the need to solve boundary value problems – mathematically and contact problems – physically. From the mathematical formulations of contact problems of structures lying on an elastic foundation, it is known that the basis for their solution is the search for the law of distribution of reactive pressures at the contact of the structure with the foundation, which depends in a complex way on the rigidity of the structure, the elastic characteristics of the foundation, external load, and the nature of the structure's fastening. When solving many boundary-value and initial-boundary-value problems of structural mechanics and the theory of elasticity, such as solving a classical homogeneous equation by the method of eigenfunctions, under certain boundary conditions arising from the type of fastening of the beam at the ends, an important, sometimes decisive, role is played by the fundamental functions of the operator x^{IV}, which received their basic interpretation by Academician A. N. Krylov. However, calculations using these formulas are very difficult due to mathematical limitations and the cumbersomeness of the expressions. In the proposed work, eigenfunctions of the differential equation of bending vibrations of statically indeterminate single-span beams are used to construct the Green's function in the form of an infinite series for these eigenfunctions. Exact expressions have been constructed to determine the deflections of beams due to concentrated force. The resulting expressions are presented through elementary functions, are of a general nature and make it possible to solve various problems of statics, dynamics and stability of the beams under consideration. The authors obtained numerical results for bending moments and deflections of a clamped beam and a beam with clamped and hinged supports using the MATHEMATICA computer package.

Keywords: eigenfunctions, orthogonality, statically indeterminate beams, internal forces

For citation: Bosakov S. V., Kozunova O. V. (2024) Green's Functions for Statically Indeterminate Single-Span Beams. *Science and Technique*. 23 (4), 289–294. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-4-289-294 (in Russian)

Введение

Из истории вопроса о применении функций Грина в инженерных расчетах. В инженерной практике в зависимости от класса [1] различают решаемые задачи: статические / динамические; плоские / пространственные; контактные / с частичным или краевым опиранием и др. Давление рельса на шпалу, колонны на фундамент, плит перекрытия на стены, фундамента на грунтовое основание – вот типичные примеры практических задач, приводящие к необходимости решения краевых задач – математически и контактных – физически.

Так, основу решения контактных задач конструкций, лежащих на упругом основании, составляет поиск закона распределения реактивных давлений на контакте конструкции с основанием, который сложным образом зависит от жесткости конструкции, упругих характеристик основания, внешней нагрузки, характера закрепления конструкции. В монографии [2], рассматривая плоские контактные задачи (плоская деформация) методом Ритца, автор использует представление функции Грина упругого основания в виде разложения [3]

$$K(x-\xi)=\frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}\left[-\ln|x-\xi|+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{mn}T_m(x)T_n(\xi)\right], \quad (1)$$

где первое слагаемое в скобках представляет решение Фламана [4] для упругой однородной изотропной полуплоскости.

При решении пространственных контактных задач для функции Грина [2] используется представление

$$K(x-\xi,y-\eta)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{R}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}C_{mp}^{nq}T_m(x)T_p(\xi)T_n(y)T_q(\eta)\right], \quad (2)$$
$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

где первое слагаемое в скобках представляет решение Буссинеска [4] для упругого однородного изотропного полупространства.

Необходимо отметить, что выражения (1) и (2) представляют функции Грина при решения неоднородных краевых задач [2] методом собственных функций в виде суммы сингулярного слагаемого через спектральное соотношение способа ортогональных полиномов [5] и некоторой непрерывной гладкой функции.

В работе [6] используется другой подход решения краевой задачи – метод специальных аппроксимаций для вычисления несобственного интеграла перемещения границ поверхности упругого основания

$$W(x,y)=\frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}\int_0^{\infty}L(u)J_0(u\sqrt{x^2+y^2})du, \quad (3)$$

где $L(u)$ – функция, характеризующая данный тип модели упругого основания; $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода [13, Грандштейн].

При реализации метода специальной аппроксимации подынтегральная функция $L(u)$ в выражении (3) представляется в виде суммы слагаемых, первое из которых выделяет необходимую особенность в функции перемещений после взятия несобственного интеграла (3). Подробно процесс реализации метода специальной аппроксимации в монографии [6] автором рассматривался на примере упругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием. Для других моделей упругого основания ввиду однотипности эти выкладки опущены.

Приведенные в работе [6] выражения для перемещений поверхности упругого основания иначе называют функцией Грина для рассматриваемого основания, если принять величину силы, равной единице. В монографии Г. Я. Попова [7] эти функции называются ядрами линейно деформируемого основания.

При решении многих краевых и начально-краевых задачах строительной механики и теории упругости, таких как решение классического однородного уравнения методом собственных функций

$$x^{\mathrm{IV}} + \lambda x = 0, \tag{4}$$

при некоторых граничных условиях, вытекающих из рода закрепления балки на концах, важную, порой определяющую, роль играют фундаментальные функции оператора x^{IV}, которые получили свою базовую трактовку академиком А. Н. Крыловым в работе [8]. Вычисления по этим формулам весьма затруднительны, так как фундаментальные функции при степени дифференцирования $n \geq 2$ представляются в виде разности двух членов, почти равных по величине.

В работе В. Н. Фаддеевой [9] в табличном виде дано специальное преобразование фундаментальных функций оператора x^{IV}, предложенных ранее А. Н. Крыловым, которое значительно упрощает их выражения. Обычно рассматриваются шесть типов граничных условий закрепления балки. Выражения фундаментальных функций для этих типов граничных условий приводятся как в специальных работах [8, 9], так и в некоторых учебниках по математической физике и дифференциальным исчислениям [10].

Построение функций Грина для статически неопределимых однопролетных балок

Рассмотрим формальное решение задачи о свободных колебаниях однопролетной балки с равномерной массой

$$\frac{d^4 y_n(x)}{dx^4} - \lambda_n{}^4 y_n(x) = 0, \tag{5}$$

где λ_n – величина, характеризующая частоту собственных колебаний балки по n-й форме собственных колебаний $y_n(x)$.

Однако дифференциальное уравнение изгиба балки постоянной изгибной жесткости EJ под действием нагрузки $q(x)$ имеет следующий вид:

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EJ}. \tag{6}$$

Представим решение (6) в виде ряда по собственным функциям (5)

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x), \tag{7}$$

где A_n – неопределенные постоянные коэффициенты.

Тогда из уравнений (5) и (6) сразу получаем

$$A_n \lambda_n{}^4 y_n(x) = \frac{q(x)}{EJ}. \tag{8}$$

Обе части (8) умножаем на $y_k(x)$ и проинтегрируем в пределах длины балки ℓ. На основании ортогональности собственных функций [11] получаем:

$$A_n = \frac{\int_0^{\ell} y_n(x) q(x) dx}{\lambda_n{}^4 \gamma_n EJ}; \tag{9}$$

$$\gamma_n = \int_0^{\ell} y_n{}^2(x) dx. \tag{10}$$

Интеграл в числителе (9) представляет работу внешней нагрузки $q(x)$ на перемещениях собственной функции $y_n(x)$. Поэтому при действии сосредоточенной силы P в точке балки с абсциссой x_p в безразмерных координатах окончательно получаем

$$A_n = \frac{y_n\left(\frac{x_p}{\ell}\right)}{\lambda_n{}^4 \gamma_n} \frac{P\ell^3}{EJ}. \tag{11}$$

Расчет 1. Рассмотрим действие сосредоточенной силы на балку с защемленными краями (рис. 1).

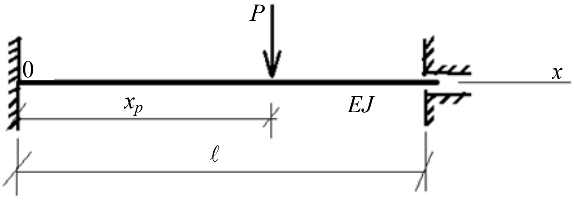

Рис. 1. Балка с защемленными краями под действием сосредоточенной силы

Fig. 1. Beam with pinched edges under the influence of concentrated force

В этом случае перемещение собственной функции $y_n(x)$ [12, 9] получено в виде:

$$y_n(x)=\cos\left(\lambda_n\frac{x}{\ell}\right)+\sin\left(\lambda_n\frac{x}{\ell}\right)\frac{\mathrm{ch}\lambda_n\sin\lambda_n+\cos\lambda_n\mathrm{ch}\lambda_n}{\mathrm{ch}\lambda_n\cos\lambda_n-\mathrm{sh}\lambda_n\sin\lambda_n-1}+\mathrm{ch}\left(\lambda_n\frac{x}{\ell}\right)\frac{\mathrm{ch}\lambda_n\sin\lambda_n+\cos\lambda_n\mathrm{sh}\lambda_n}{\mathrm{ch}\lambda_n\cos\lambda_n-\mathrm{sh}\lambda_n\sin\lambda_n-1}+$$

$$+\mathrm{ch}\left(\lambda_n\frac{x}{\ell}\right)\frac{\cos\lambda_n-\mathrm{sech}\lambda_n+\sin\lambda_n\tanh\lambda_n}{\cos\lambda_n-\mathrm{sech}\lambda_n-\sin\lambda_n\tanh\lambda_n}; \qquad (12)$$

$$1-\cos\lambda_n\mathrm{ch}\lambda_n=0;$$

$$\lambda_1=4{,}7300;\quad \lambda_2=7{,}8532;\quad \lambda_3=10{,}9956;\quad \lambda_n=\lambda_{n-1}+\pi,\quad n=4,5,\ldots,$$

где

$$\gamma_n=\mathrm{Re}[((3+3i)(-4\sin(1+i)\lambda_n+(1+i)\sin2\lambda_n+\sin(2+2i)\lambda_n-4\mathrm{sh}(1+i)\lambda_n+(1+i)\mathrm{sh}2\lambda_n+$$

$$+\mathrm{sh}(2+2i)\lambda_n)+8i(\cos\lambda_n-\mathrm{ch}\lambda_n)^2\lambda_n)/(4((-1-i)+\mathrm{ch}(1+i)\lambda_n+i\mathrm{ch}(1+i)\lambda_n)^2\lambda_n)].$$

На рис. 2 приводятся первые три формы собственных колебаний балки с защемленными краями.

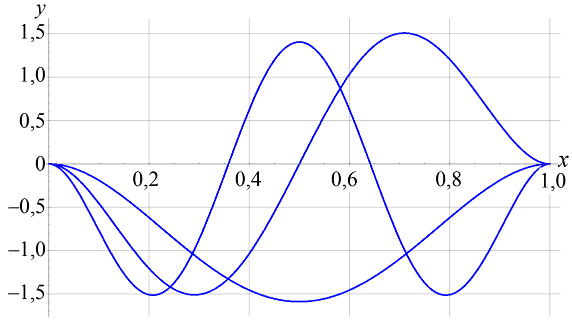

Рис. 2. Первые три формы собственных колебаний балки с защемленными краями

Fig. 2. First three modes of natural vibrations of the beam with pinched edges

Дифференцируя дважды полученное выражение для прогибов балки от действия силы P = 1 (3), можно получить линии влияния изгибающих моментов для любого сечения балки [1].

На рис. 3 построена эпюра изгибающих моментов в балке от действия треугольной нагрузки.

Полученное выражение (7) при известных (10) позволяет определять прогибы защемленной балки, усилия в ее сечениях от произвольной внешней нагрузки $q(x)$ и носит название функции Грина для этой балки. При использовании (7) нужно иметь в виду, что при дифференцировании сходимость рядов ухудшается [10], поэтому при вычислении усилий необходимо увеличивать число членов ряда (7).

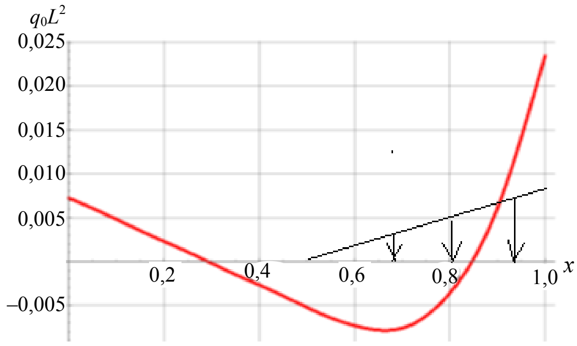

Рис. 3. Очертание эпюры изгибающих моментов в балке от треугольной нагрузки

Fig. 3. Outline diagram of bending moments in a beam due to triangular load

Расчет 2. Рассмотрим балку с защемленной и шарнирной опорами под действием сосредоточенной силы P (рис. 4)

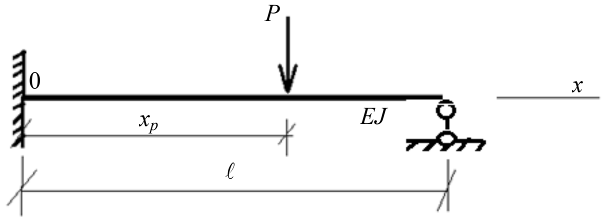

Рис. 4. Балка с защемленной и шарнирной опорами под действием сосредоточенной силы P

Fig. 4. Beam with clamped and hinged support under the influence of concentrated force P

Для этого случая перемещение собственной функции $y_n(x)$ [12, 9] получено в виде

$$y_n(x)=\cos\left(\lambda_n\frac{x}{\ell}\right)-\mathrm{ch}\left(\lambda_n\frac{x}{\ell}\right)-$$

$$-\sin\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right)\frac{\cos\lambda_n - \mathrm{ch}\lambda_n}{\sin\lambda_n - \mathrm{sh}\lambda_n} + \mathrm{sh}\left(\lambda_n \frac{x}{\ell}\right)\frac{\cos\lambda_n - \mathrm{ch}\lambda_n}{\sin\lambda_n - \mathrm{sh}\lambda_n};$$

$$tg\lambda_n - \tanh\lambda_n = 0; \qquad (13)$$

$$\lambda_1 = 3{,}7266; \quad \lambda_2 = 7{,}0686; \quad \lambda_3 = 10{,}2102;$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \pi, \quad n = 4, 5, \ldots,$$

где

$$\gamma_n = \Big(1 + (-2\mathrm{ch}\lambda_n \sin\lambda_n + \mathrm{ch}^2\lambda_n \sin 2\lambda_n + $$
$$+ \cos\lambda_n (2\mathrm{sh}\lambda_n - \cos\lambda_n \mathrm{sh}2\lambda_n)\Big):$$
$$: (2(\sin\lambda_n - \mathrm{sh}\lambda_n)^2 \lambda_n)).$$

На рис. 5 приведены первые три собственные функции для балки с защемленным и шарнирно опертым концами.

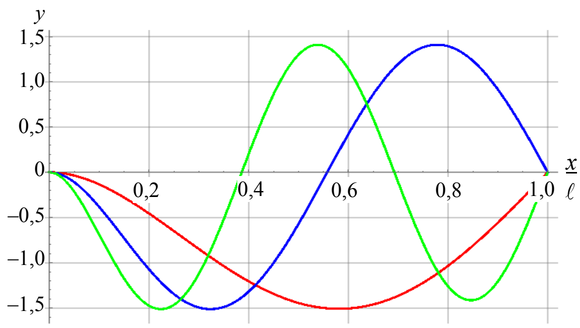

Рис. 5. Первые три собственные функции для балки с защемленным и шарнирно опертым концами

Fig. 5. First three eigenfunctions for a beam with clamped and simply supported ends

На рис. 6 приводится очертание линии влияния изгибающих моментов для сечения в середине пролета балки.

Рис. 6. Линия влияния изгибающего момента для сечения в середине пролета балки

Fig. 6. Bending moment influence line for a section in the middle of the beam span

Надо отметить, что полученные выражения для форм колебаний в виде рядов (11), (12) обладают быстрой сходимостью вследствие наличия собственных чисел в четвертой степени в знаменателе.

Определение критических сил

Рассмотрим использование полученных результатов для определения критических сил в центрально сжатых статически неопределимых стержнях. Для стержня с защемленной и шарнирной опорами зададимся первой формой потери устойчивости от действия центрально приложенной силы в виде (12) при $\lambda_1 = 3{,}7266$.

Согласно [13], величина критической силы определится из выражения

$$P_{cr} = \frac{EJ\int_0^\ell \left(y_n^{II}(x)\right)^2 dx}{\int_0^\ell \left(y_n^{I}(x)\right)^2 dx}. \qquad (13)$$

Подставляя первую собственную функцию и число (12) в выражение (13), получаем

$$P_{cr} = 20{,}6489\frac{EJ}{\ell^2},$$

что немного превышает, как обычно при использовании энергетического способа [14], точное значение $P_{cr} = 20{,}14\dfrac{EJ}{\ell^2}$.

В заключение отметим, что частоты собственных колебаний рассмотренных балок определяются совокупностью полученных собственных чисел λ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

ВЫВОД

В работе получены аналитические выражения функций Грина для однопролетных статически неопределимых балок в виде бесконечного быстро сходящего ряда. Эти выражения дают возможность решать разнообразные задачи статики, динамики и устойчивости для этих балок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын, А. Р. Строительная механика: учеб. пособие для строит. спец. вузов / А. Р. Ржаницын. 2-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.

2. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. Брест: Изд.-во БрГТУ, 2006. 108 с.
3. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 496 с.
4. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. 2-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2002. 400 с.
5. Клубин, П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании / П. И. Клубин // Инж. сб. 1952. № 12. С. 95–135.
6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
7. Попов, Г. Я. К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве / Г. Я. Попов // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1959. № 11–12. С. 11–19.
8. Крылов, А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании / А. Н. Крылов. М.: Машстройиздат, 1948. 56 с.
9. Фаддеева, В. Н. О фундаментальных функциях оператора X^{IV}/ В. Н. Фаддеева // Труды математического института АН СССР имени В. А. Стеклова. М., Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1949. Т. 28: Сб. работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института. С. 157–159.
10. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. 10-е изд., перераб. М.: Физматлит, 2016. Т. II. 800 с.
11. Толстов, Г. П. Ряды Фурье / Г. П. Толстов. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; под ред. Э. И. Григолюка. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
13. Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников / под ред. А. Ф. Смирнова. М.: Стройиздат,1984. 416 с.
14. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. Более сложные вопросы теории и задачи / С. П. Тимошенко; пер. В. Н. Федорова с 3-го американ. изд.; под ред. И. К. Снитко. М.: Наука, 1965. Т. 2. 480 с.

Поступила 04.04.2024
Подписана к печати 07.06.2024
Опубликована онлайн 31.07.2024

REFERENCES

1. Rzhanitsyn A. R. (1991) *Structural Mechanics: Textbook for Specialized Construction Universities*. 2nd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).
2. Bosakov S. V. (2006) *Ritz Method in Contact Problems of Elasti-City Theory*. Brest: Publishing House of Brest State Technical University. 108 (in Russian).
3. Galin L. A. (ed.). (1976) *Development of the Theory of Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).
4. Aleksandrov A. V., Potapov V. D. (2002) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. 2nd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
5. Klubin P. I. (1952) Calculation of Beam and Round Slabs on an Elastic Foundation. *Inzhenerny Sbornik* [Engineering Collection], (12), 95–135 (in Russian).
6. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (IN Russian).
7. Popov G. Ya. (1959) On the Theory of Plate Bending on an Elastic Inhomogeneous Half-Space. *Izvestiya Vuzov. Stroitel'stvo i Arkhitektura* [News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture], (11–12), 11–19.
8. Krylov A. N. (1948) *On the Calculation of Beams Lying on an Elastic Foundation*. Moscow, Mashstroiizdat Publ. 56 (in Russian).
9. Faddeeva V. N. (1949) On the Fundamental Functions of Operator X^{IV}. *Trudy Matematicheskogo Instituta AN SSSR imeni V. A. Steklova. T. 28: Sb. Rabot po Priblizhennomu Analizu Leningradskogo Otdeleniya Instituta* [Proceedings of the mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences named After V. A. Steklov. Vol. 28. Collection of Works on approximate Analysis of the Leningrad Branch of the Institute]. Moscow, Leningrad, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 157–159 (in Russian).
10. Fikhtengolts G. M. *Course of Differential and Integral Calculus. Vol. II.* 10th Ed. Moscow, Fizmatlit Publ. 800 (in Russian).
11. Tolstov G. P. (1980) *Fourier Series*. 3rd ed. Moscow, Nauka Publ. 384 (in Russian).
12. Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. (1974) *Vibration Problems in Engineering*. N.Y., Wiley Publ. 521.
13. Smirnov A. F., Aleksandrov A. V., Lashchenikov B. Ya., Shaposhnikov N. N. (1984) *Structural Mechanics. Dynamics and Stability of Structures*. Moscow, Stroiizdat Publ. 416 (in Russian).
14. Timoshenko S. P. (1965) *Strength of Materials, Vol. II: Advanced Theory and Problems*. 3rd ed. NY, D Van Nostrand Company Inc. 1941.

Received: 04.04.2024
Accepted: 07.06.2024
Published online: 31.07.2024