
МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА
DEFORMATION
IN SOLID MECHANICS

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-2-105-113>

УДК 539.413

Нормальные напряжения при температурном изгибе составного стержня

Докт. техн. наук, проф. А. И. Дудяк¹⁾, магистр техн. наук В. М. Хвасько¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2024
Belarusian National Technical University, 2024

Реферат. Существующие методики расчета температурных напряжений в составных стержнях имеют определенные недостатки. Важность этих расчетов связана с безопасностью и эффективностью подобных инженерных конструкций в таких отраслях, как строительство, машиностроение, авиация. В статье представлено исследование поведения составных стержней при температурном воздействии с учетом деформации изгиба и условий возникновения максимальных нормальных напряжений. Проанализированы составные стержни, состоящие из двух различных металлов, сваренных между собой. Разработана методика расчета нормальных напряжений, учитывающая физико-механические характеристики материалов составных частей, такие как модуль упругости и коэффициент температурного линейного расширения. Выявлены собственные нейтральные слои каждого металлического стержня, что позволяет более точно определить распределение напряжений в составных стержнях. Приведен пример аналитического расчета нормальных напряжений, возникающих в стержне, состоящем из стальной и алюминиевой частей. Построены эпюры нормальных напряжений по высоте составных стержней. Дополнительно был проведен МКЭ-анализ составного стержня при температурном воздействии, реализованный с помощью ПК Ansys 2023 R2. Результаты численного исследования с высокой точностью подтвердили данные, полученные теоретическим путем. Результаты проведенного исследования имеют важное значение для практического использования при проектировании и конструировании подобных составных конструкций, обеспечивая инженерам более точные данные для анализа влияния температурных напряжений.

Ключевые слова: составной стержень, температурный изгиб, нормальное напряжение, изгибающий момент, модуль упругости, нейтральный слой, эпюра напряжений, метод конечных элементов (МКЭ)

Для цитирования: Дудяк, А. И. Нормальные напряжения при температурном изгибе составного стержня / А. И. Дудяк, В. М. Хвасько // *Наука и техника*. 2024. Т. 23, № 2. С. 105–113. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-2-105-113>

Normal Stresses with Temperature Bending of Composite Rod

A. I. Dudjak¹⁾, V. M. Khvasko¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. Existing methods for calculating temperature stresses in composite rods have certain disadvantages. The importance of such calculations is related to the safety and efficiency of similar engineering structures in various industries such as

Адрес для переписки

Хвасько Виктория Михайловна
Белорусский национальный технический университет
пр. Независимости, 65/1,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +37517 293-92-36
hvasko.victoriya@gmail.com

Address for correspondence

Khvasko Victoriya M.
Belarusian National Technical University
65/1, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +37517 293-92-36
hvasko.victoriya@gmail.com

construction, mechanical engineering and aviation. The paper presents a study of the behavior of composite rods under thermal loading, taking into account bending deformation and the conditions leading to maximum normal stresses. Composite rods consisting of two different metals welded together have been analyzed. A methodology for calculating normal stresses has been developed that takes into account the physical and mechanical characteristics of the materials of the component parts, such as the modulus of elasticity and coefficient of linear thermal expansion. The intrinsic neutral layers of each metal rod have been identified, which makes it possible to more accurately determine the stress distribution in the composite rods. An example of the analytical calculation of normal stresses occurring in a rod composed of steel and aluminum parts is provided. Diagrams of normal stresses along the height of the composite rods were constructed. Additionally, a FEM analysis of the composite rod under temperature influence was carried out while using Ansys 2023 R2 software. The results of the numerical study confirmed with high accuracy the data obtained theoretically. The outcomes of this study are crucial for practical applications in the design and construction of such composite structures, providing engineers with more accurate data for analyzing the influence of thermal stresses.

Keywords: composite rod, temperature bending, normal stress, bending moment, modulus of elasticity, neutral layer, stress diagram, finite element method (FEM)

For citation: Dudjak A. I., Khvasko V. M. (2024) Normal Stresses with Temperature Bending of Composite Rod. *Science and Technique*. 23 (2), 105–113. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2024-23-2-105-113> (in Russian)

Введение

Изучение поведения составных стержней при нагреве представляет собой важную задачу, имеющую применение в инженерной практике. Одним из ключевых аспектов является анализ максимальных нормальных напряжений, возникающих в составном стержне в результате воздействия температурного нагрева и одновременного возникновения деформации изгиба.

В работах [1, 2] представлены базовые сведения о прочности и устойчивости составных конструкций, однако эти методики имеют определенные ограничения. Рассмотрена узкая полоса при равномерном нагреве от температуры t_0 до t , составленная из двух различных металлов (модули продольной упругости E_1 и E_2 соответственно), сваренных между собой (рис. 1). Если коэффициенты линейного расширения этих металлов различны ($\alpha_2 > \alpha_1$), то нагрев будет сопровождаться изгибом полосы.

В расчетах принималась ширина полосы, равная единице.

Для простейшего случая, когда $E_1 = E_2 = E$ и $h_1 = h_2 = \frac{h}{2}$, представлена следующая формула для определения нормальных напряжений, возникающих в биметаллической полосе:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} E (\alpha_2 - \alpha_1) (t - t_0). \quad (1)$$

Распределение нормальных напряжений по поперечному сечению биметаллической полосы для такого случая показано на рис. 2.

Как видно из рис. 2, распределение напряжений по высоте сечения носит линейный характер, и они достигают максимальных значений в зоне контакта поверхностей полос. При таком способе соединения металлов не учтены условия возникновения касательных напряжений вблизи зоны контакта металлов [3], что является существенным недостатком изложенной методики.

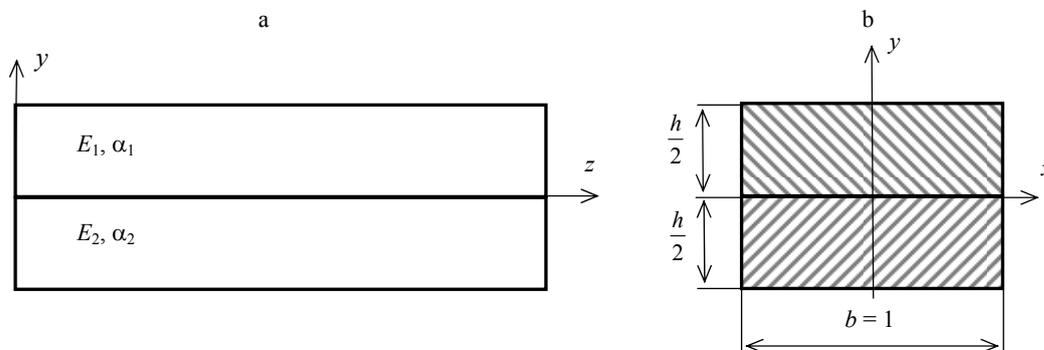


Рис. 1. Биметаллическая полоса:

а – схема полосы из двух различных металлов; б – поперечное сечение полосы

Fig. 1. Bimetal strip: а – diagram of strip of two different metals; б – cross section of strip

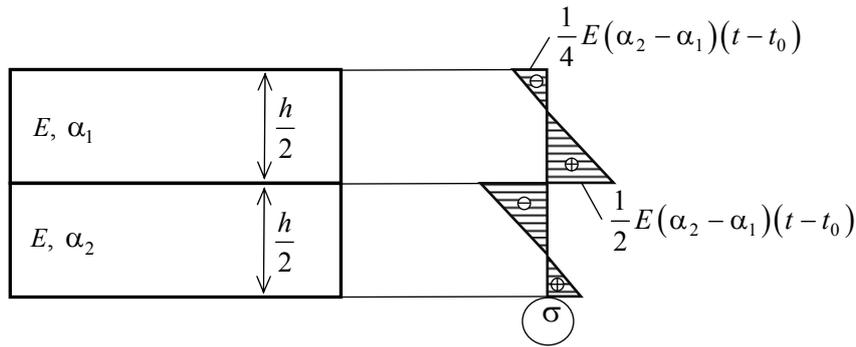


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений по сечению биметаллической полосы
 Fig. 2. Distribution of normal stresses over cross section of bimetal strip

Кроме того, в расчетах полосу из двух металлов рассматривают как единое целое, имеющую радиус кривизны ρ , то есть сварка составных частей должна производиться по всей длине боковых поверхностей. Однако распределение нормальных напряжений (рис. 2) показывает, что каждый металлический слой полосы имеет собственный нейтральный слой [4].

Таким образом, несмотря на существующие исследования, остается необходимость в дальнейшем анализе и уточнении формул для более точного описания распределения напряжений в составных стержнях. В данной работе мы предложим более точную методику расчета нормальных напряжений в составных стержнях при их температурном нагреве. Уделим особое внимание вопросу закрепления составных частей стержней между собой и их соответствию теоретическим моделям. Кроме того, проведем МКЭ-анализ для подтверждения полученных результатов и оценки их точности.

Теоретические исследования нормальных напряжений

Рассмотрим составной стержень, лежащий свободно на двух шарнирных опорах (рис. 3). Обозначим модули продольной упругости верхней и нижней частей стержня E_1 и E_2 соответственно, ширину сечения стержня b , высоту верхней и нижней частей стержня c , d соответственно. При температурной деформации данного стержня воспользуемся гипотезой, согласно которой плоские сечения до деформации остаются плоскими и после нее [5].

Если принять, что коэффициент температурного линейного расширения $\alpha_2 > \alpha_1$, то при нагреве такого составного стержня от начальной температуры t_0 до конечной t изгиб верхнего и нижнего стержней будет происходить выпуклостью вниз, а на их торцах возникнут одинаковые изгибающие моменты M_u . Полный изгибающий момент M_u можно представить как сумму изгибающих моментов, действующих на верхний (M_1) и нижний (M_2) стержни:

$$M_u = M_1 + M_2. \quad (2)$$

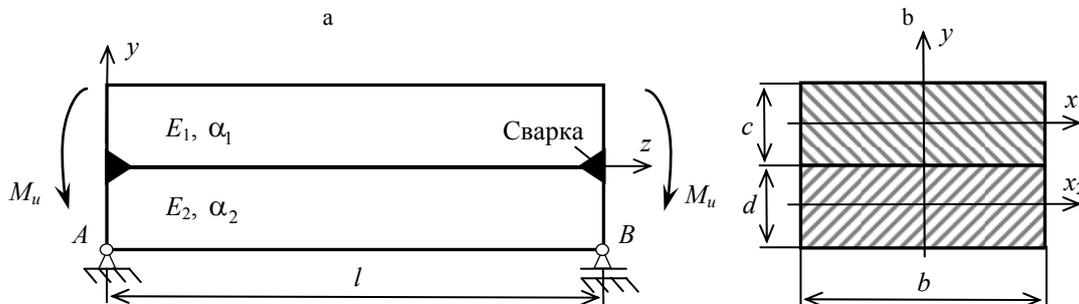


Рис. 3. Составной стержень на двух опорах:
 а – схема соединения составных частей стержня; б – поперечное сечения стержня
 Fig. 3. Composite rod on two supports: a – connection diagram of rod parts; б – cross section of rod

В связи с тем, что углы поворота отдельных частей будут равны между собой, формулы для определения составляющих изгибающих моментов можно представить в виде:

$$M_1 = M_u \frac{E_1 I_{x1}}{(EI_x)_c}; \quad M_2 = M_u \frac{E_2 I_{x2}}{(EI_x)_c}, \quad (3)$$

где I_{x1} , I_{x2} – моменты инерции составных частей стержня; $(EI_x)_c$ – суммарная жесткость сечения составного стержня [6].

При нагреве биметаллического стержня верхняя его часть будет удлиняться за счет воздействия на нее нижней его части с большим коэффициентом температурного расширения α_2 , а нижняя часть будет укорачиваться. Вследствие того что к стержню не приложены внешние силы, возникающие внутренние силы N_1 и N_2 должны уравниваться друг друга, то есть $N_1 = N_2 = N$.

Ранее в работе [7] получено соотношение, связывающее полный изгибающий момент с продольной силой:

$$M_u = \frac{1}{2} N(c + d). \quad (4)$$

С учетом совместности деформаций от температурного нагрева, изгиба и осевого воздействия на верхнюю и нижнюю части стержня в зоне контакта металлов значение силы N будет равно [7]

$$N = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(t - t_0)}{\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} + \frac{(c + d)^2}{4(EI_x)_c}}. \quad (5)$$

Нормальные напряжения в составных частях стержня определяют из формул:

$$\sigma_1 = \frac{N}{A_1} \pm \frac{M_1}{I_{x1}} y_1; \quad (6)$$

$$\sigma_2 = -\frac{N}{A_2} \pm \frac{M_2}{I_{x2}} y_2, \quad (7)$$

где y_1 , y_2 – ординаты точек, в которых определяются нормальные напряжения.

Пример аналитического расчета

Требуется исследовать распределение нормальных напряжений по высоте сечения стержня, составленного из стальной и алюминиевой частей, показанного на рис. 3. Стержень нагревается от начальной температуры $t_0 = 20^\circ\text{C}$ до конечной $t = 70^\circ\text{C}$. Принимаем коэффициенты линейного расширения: для стали $\alpha_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{град}}$, а для алюминия $\alpha_2 = 2,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{град}}$. Модули продольной упругости:

для стали $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, для алюминия $E_2 = 0,71 \cdot 10^5$ МПа. Ширина стальной и алюминиевой частей $b = 50$ мм, высоты обеих частей равны $c = d = h = 30$ мм.

Определим внутренние силы от нагрева в стальной и алюминиевой частях в соответствии с формулой (5)

$$N = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)(t - t_0)}{\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} + \frac{h^2}{(EI_x)_c}}.$$

В нашем случае:

$$A_1 = A_2 = bh = 50 \cdot 30 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ (мм}^2\text{)};$$

$$I_{x1} = I_{x2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \cdot 30^3}{12} = 112500 \text{ (мм}^4\text{)}.$$

Подставив величины A_1 , A_2 , I_{x1} и I_{x2} , вычислим внутренние силы:

$$\begin{aligned} N &= \frac{(2,3 \cdot 10^{-5} - 1,2 \cdot 10^{-5})(70 - 20)}{\frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^3} + \frac{1}{0,71 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^3} + \frac{30^2}{(2 \cdot 10^5 + 0,71 \cdot 10^5) \cdot 112500}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{(2,3 \cdot 10^{-5} - 1,2 \cdot 10^{-5})(70 - 20)}{30^2 + (2 \cdot 10^5 + 0,71 \cdot 10^5) \cdot 112500} = \\ &= 13019,82 \text{ (Н)}. \end{aligned}$$

Полный изгибающий момент, согласно выражению (4), будет равен

$$M_u = Nh = 13019,82 \cdot 30 = 390594,6 \text{ (Н} \cdot \text{мм)}.$$

В соответствии с формулами (3) вычислим величины изгибающих моментов, действующих на стальную (M_1) и алюминиевую (M_2) части стержня:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_u \frac{E_1 I_{x1}}{(EI_x)_c} = \\ &= 390594,6 \cdot \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 112500}{(2 \cdot 10^5 + 0,71 \cdot 10^5) \cdot 112500} = \\ &= 288261,7 \text{ (Н} \cdot \text{мм)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= M_u \frac{E_2 I_{x2}}{(EI_x)_c} = \\ &= 390594,6 \cdot \frac{0,71 \cdot 10^5 \cdot 112500}{(2 \cdot 10^5 + 0,71 \cdot 10^5) \cdot 112500} = \\ &= 102332,9 \text{ (Н} \cdot \text{мм)}. \end{aligned}$$

На рис. 4 приведено поперечное сечение составного стержня и точки, в которых будут определены величины нормальных напряжений.

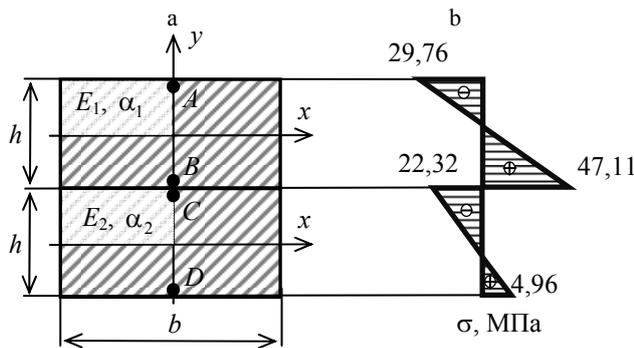


Рис. 4. Распределение нормальных напряжений по высоте составного сечения:
а – схема поперечного сечения;
б – эпюра нормальных напряжений

Fig. 4. Distribution of normal stresses along height of composite section:
а – cross section scheme;
б – normal stresses diagram

Нормальные напряжения, согласно формулам (6), в точках A и B будут равны:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{A_1} - \frac{M_1}{I_{x1}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{13019,82}{1500} - \frac{288261,7}{112500} \cdot 15 = \\ &= -29,76 \text{ (МПа)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{N}{A_1} + \frac{M_1}{I_{x1}} \cdot \frac{h}{2} = \frac{13019,82}{1500} + \frac{288261,7}{112500} \cdot 15 = \\ &= 47,11 \text{ (МПа)}. \end{aligned}$$

Вычислим нормальные напряжения в точках C и D , согласно выражениям (7):

$$\begin{aligned} \sigma_C &= -\frac{N}{A_2} - \frac{M_2}{I_{x2}} \cdot \frac{h}{2} = \\ &= -\frac{13019,82}{1500} - \frac{102332,9}{112500} \cdot 15 = -22,32 \text{ (МПа)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\frac{N}{A_2} + \frac{M_2}{I_{x2}} \cdot \frac{h}{2} = \\ &= -\frac{13019,82}{1500} + \frac{102332,9}{112500} \cdot 15 = 4,96 \text{ (МПа)}. \end{aligned}$$

По полученным данным построена эпюра распределения нормальных напряжений по высоте сечения составного стержня (рис. 4б).

МКЭ-анализ нормальных напряжений

Для подтверждения теоретических исследований проведен расчет нормальных напряжений при нагреве составного стержня (рис. 3) методом конечных элементов (МКЭ), реализованного с помощью ПК Ansys 2023 R2 [8–10].

Смоделирован стержень длиной 1000 мм, состоящий из одинаковых стальной (Structural Steel) и алюминиевой (Aluminum Alloy) частей прямоугольного поперечного сечения с заданными размерами: $b = 50$ мм, $h = 30$ мм (рис. 5) и необходимыми механическими характеристиками (рис. 6). Затем заданы условия закрепления стержня (A – Fixed Support, B – Displacement) (рис. 7) и условия температурного нагрева от 20 до 70 °С (Thermal Condition) (рис. 8).

Для опасного сечения, проходящего через центр масс составного стержня, были определены величины нормальных напряжений (рис. 9).

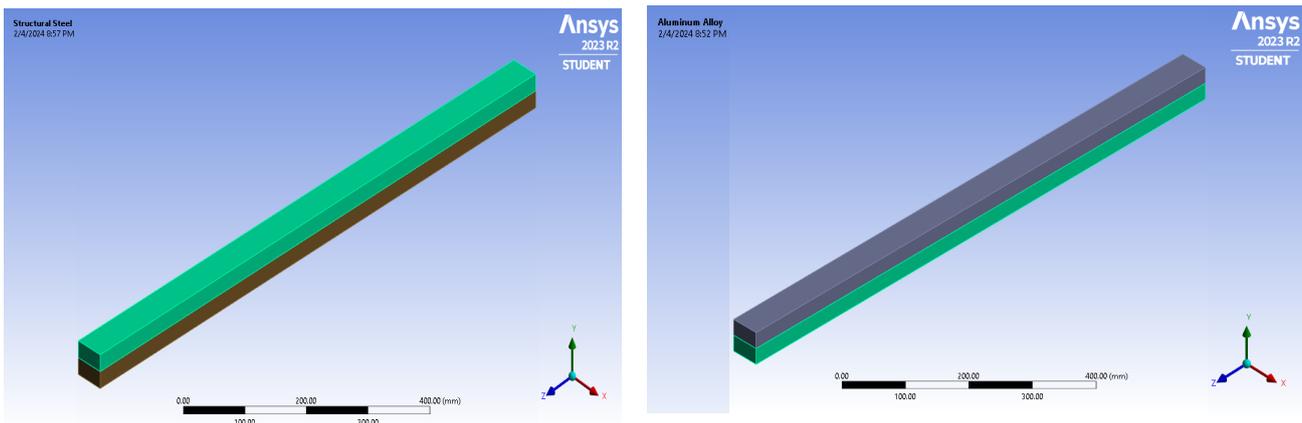


Рис. 5. Моделирование частей составного стержня
 Fig. 5. Modeling parts of composite rod

Structural Steel	
Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5-110.1	
Density	7.85e-09 tonne/mm ³
Structural	
▼ Isotropic Elasticity	
Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio
Young's Modulus	2e+05 MPa
Poisson's Ratio	0.3
Bulk Modulus	1.6667e+05 MPa
Shear Modulus	76923 MPa
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion	1.2e-05 1/°C
Compressive Ultimate Strength	0 MPa
Compressive Yield Strength	250 MPa
Aluminum Alloy	
General aluminum alloy. Fatigue properties come from MIL-HDBK-5H, page 3-277.	
Density	2.77e-09 tonne/mm ³
Structural	
▼ Isotropic Elasticity	
Derive from	Young's Modulus and Poisson's Ratio
Young's Modulus	71000 MPa
Poisson's Ratio	0.33
Bulk Modulus	69608 MPa
Shear Modulus	26692 MPa
Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion	2.3e-05 1/°C
Compressive Ultimate Strength	0 MPa
Compressive Yield Strength	280 MPa

Рис. 6. Механические характеристики материалов составных частей стержня
 Fig. 6. Mechanical material characteristics of rod parts

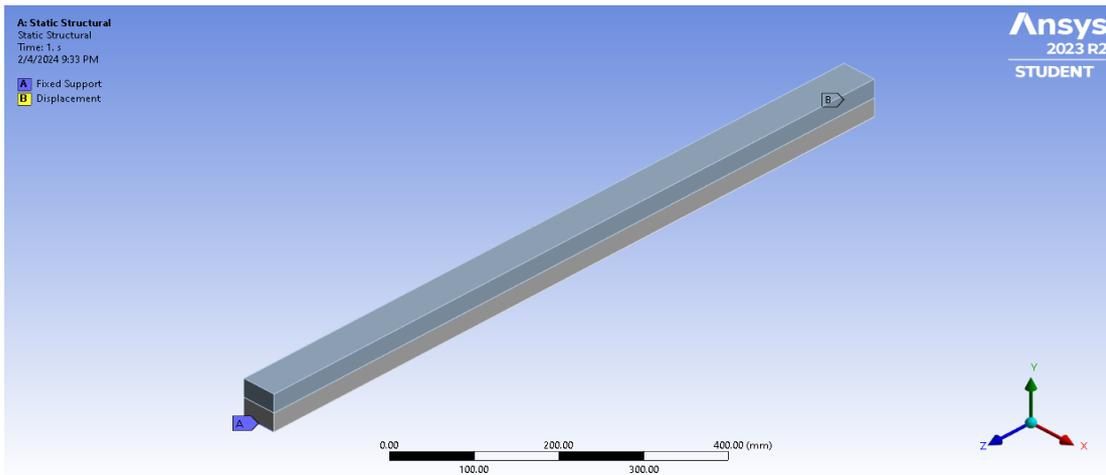


Рис. 7. Условия закрепления составного стержня
 Fig. 7. Conditions for fastening a composite rod

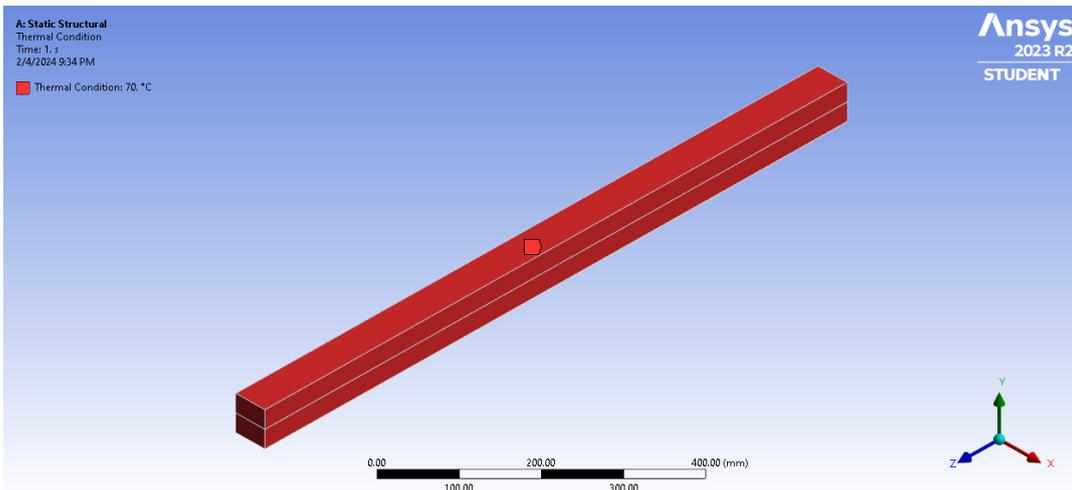


Рис. 8. Условия температурного нагрева составного стержня
 Fig. 8. Temperature heating conditions for a composite rod

Сравнительный анализ результатов

Сопоставим результаты теоретического расчета с данными, полученными в результате МКЭ-анализа (табл. 1).

Таблица 1
 Table 1

Составной стержень	Сечение	Нормальные напряжения		Погрешность, %
		Теоретическое значение, МПа	МКЭ-расчет, МПа	
Сталь (Structural Steel)	A	-29,76	-30,177	1,40
	B	47,11	47,532	0,90
Алюминий (Aluminum Alloy)	C	-22,32	-22,461	0,63
	D	4,96	5,114	3,11

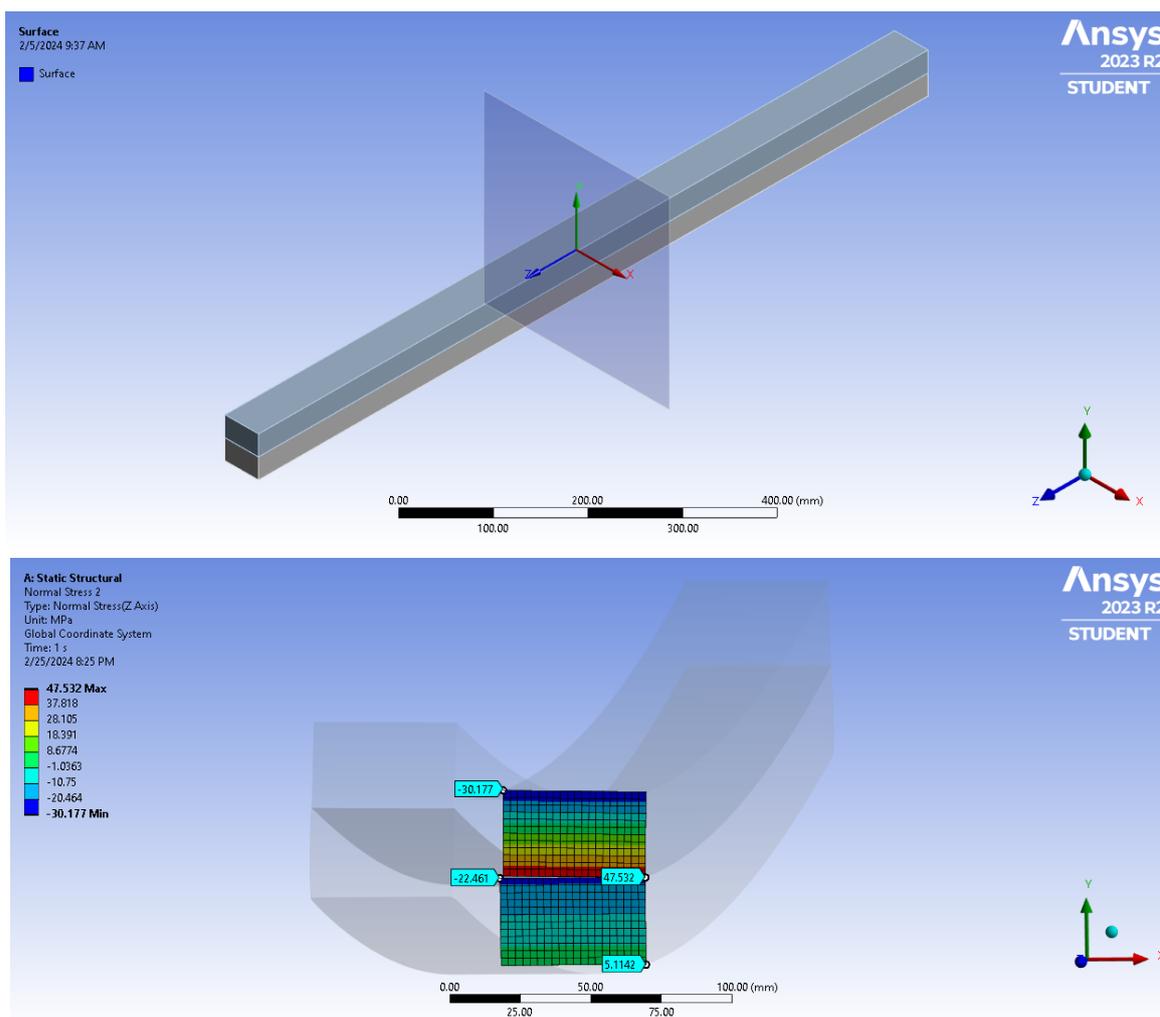


Рис. 9. Распределение нормальных напряжений в опасном сечении составного стержня

Fig. 9. Distribution of normal stresses in a dangerous section of a composite rod

ВЫВОДЫ

1. Предложены соотношения для определения величины изгибающего момента, действующего на составной стержень, и формулы для определения составляющих изгибающих моментов, действующих на отдельные части составного стержня.

2. Получены выражения для определения нормальных напряжений в отдельных частях стержня с учетом механических характеристик его материалов. Установлено, что в каждом составном стержне нормальные напряжения изменяются по линейному закону, при этом стержни имеют нейтральные слои.

3. Проведен МКЭ-анализ составного стержня с использованием ПК Ansys 2023 R2. Полу-

ченные результаты с высокой точностью подтверждают достоверность теоретических исследований температурных напряжений, возникающих при изгибе стержня, составленного из стальной и алюминиевой частей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. М.: Наука, 1971. 730 с.
2. Тимошенко, С. П. Прочность и колебание элементов конструкций / С. П. Тимошенко. М.: Наука, 1975. 704 с.
3. Harris, B. Engineering Composite Materials / Bryan Harris. London: The Institute of Materials, 1999. 193 p.
4. Подскребко, М. Д. Сопrotивление материалов / М. Д. Подскребко. Минск: Выш. шк., 2007. 797 с.
5. Старовойтов, Э. И. Сопrotивление материалов / Э. И. Старовойтов. Гомель: БелГУТ, 1999. 219 с.

6. Дудяк, А. И. Изгиб составных балок / А. И. Дудяк, В. М. Хвасько // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. / БНТУ; редкол.: Ю. В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). Минск: БНТУ, 2022. Вып. 36. С. 118–120.
7. Дудяк, А. И. Температурные напряжения в биметаллическом стержне / А. И. Дудяк, В. М. Хвасько // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. / БНТУ; редкол.: Ю. В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). Минск: БНТУ, 2022. Вып. 36. С. 139–142.
8. Khvasko, V. M. Study of Bending Deformations of a Two-Supported Beam Using Ansys 22.2 / V. M. Khvasko, H. M. S. H. Bandara // Информационные технологии в образовании, науке и производстве [Электронный ресурс]: материалы науч.-техн. интернет-конференции, Минск, 21–22 ноября 2022 г. / сост. М. Г. Карасёва. Минск: БНТУ, 2023. С. 191–195. <https://rep.bntu.by/handle/data/127990>.
9. Barbero, E.J. Finite Element Analysis of Composite Materials Using Ansys / Ever J. Barbero. 2nd edition. New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014. 82 p.
10. Jayalin, D. Analysis of Composite Beam Using Ansys / D. Jayalin, Prince G. Arulraj, V. Karthika // International Journal of Research in Engineering and Technology. 2015. Volume 04, Special Issue 09. P. 11–15. <https://ijret.org/volumes/2015v04/i21/IJRET20150421003.pdf>.
4. Podskrebko M. D. (2007) *Strength of Materials*. Minsk, Vysheyshaya Shkola Publ. 797 (in Russian).
5. Starovoitov E. I. (1999) *Strength of Materials*. Gomel, Belarusian State University of Transport. 219 (in Russian).
6. Dudjak A. I., Khvasko V. M. (2022) Bending of Composite Beams. *Theoreticheskaya I Prikladnaya Mekhanika: Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Sb.* [Theoretic and Applied Mechanics: International Scientific and Technical Collection]. Minsk, Belarusian National Technical University, (36), 118–120 (in Russian).
7. Dudjak A. I., Khvasko V. M. (2022) Temperature Stresses in a Bimetallic Rod. *Theoreticheskaya I Prikladnaya Mekhanika: Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Sb.* [Theoretic and Applied Mechanics: International Scientific and Technical Collection]. Minsk, Belarusian National Technical University, (36), 139–142 (in Russian).
8. Khvasko V. M., Bandara H. M. S. H. (2023) Study of Bending Deformations of a Two-Supported Beam Using Ansys 22.2. *Informacionnye Tekhnologii v Obrazovanii, Nauke i Proizvodstve: Materialy Nauch.-Tekhn. Internet-Konf., Minsk, 21–22 Noyabrya* [Information Technologies in Education, Science and Production: Proceedings of Scientific and Technical Internet-Conference, Minsk, November 21–22, 2022]. Minsk, Belarusian National Technical University, 191–195. <https://rep.bntu.by/handle/data/127990>.
9. Barbero E. J. (2014) *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Ansys*. 2nd Edition. New York, CRC Press, Taylor & Francis Group. 82.
10. Jayalin D., Arulraj Prince G., Karthika V. (2015) Analysis of composite beam using Ansys. *International Journal of Research in Engineering and Technology*. Volume 04, Special Issue 09, 11–15. <https://ijret.org/volumes/2015v04/i21/IJRET20150421003.pdf>.

Поступила 21.11.2023

Подписана в печать 23.01.2024

Опубликована онлайн 29.03.2024

REFERENCES

1. Timoshenko S. P. (1971) *Stability of Rods, Plates and Shells*. Moscow, Nauka Publ. 730 (in Russian).
2. Timoshenko S. P. (1971) *Strength and Vibration of Structural Elements*. Moscow, Nauka Publ. 704 (in Russian).
3. Harris B. (1999) *Engineering Composite Materials*. London, The institute of Materials. 193.

Received: 21.11.2023

Accepted: 23.01.2024

Published online: 29.03.2024