

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-158-167>

УДК 624.072

Применение способа Жемочкина в нелинейном расчете железобетонных плит покрытия автомобильных дорог на упругом основании

Магистр Р. В. Кумашов¹⁾

¹⁾ОДО «ЭНЭКА» (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2023
Belarusian National Technical University, 2023

Реферат. Рассмотрена прямоугольная железобетонная плита с учетом ее физической нелинейности на линейно-упругом однородном основании под действием вертикальной внешней нагрузки. Анизотропия и неоднородность плиты обусловлены свойствами железобетона, а также образованием трещин от действия произвольной нагрузки в процессе эксплуатации. Нелинейную задачу решали способом Жемочкина с использованием итерационного алгоритма метода упругих решений Ильюшина. Для определения коэффициентов разрешающих уравнений способа Жемочкина применяли метод Ритца (определение прогибов плиты с защемленной нормалью) и решение Буссинеска (определение перемещений точек поверхности упругого полупространства). На первой итерации плиту рассчитывали как линейно-упругую, ортотропную и однородную, на последующих – как линейно-упругую, анизотропную и неоднородную на каждом участке Жемочкина. Прогибы срединной поверхности плиты от единичной силы определяли в виде ряда по первым пяти частным решениям Клебша. Выполнены экспериментальные и численные исследования. Последние – с помощью компьютерной программы MATHEMATICA. Полученные результаты показали, что предлагаемая методика расчета позволяет точно описать распределение осадок и реактивных напряжений под плитой. Верификацию методики статического нелинейного расчета прямоугольной железобетонной плиты с учетом ее физической нелинейности осуществляли путем сравнения результатов расчетов максимальных осадок и средних давлений под плитой, вычисленных с использованием предлагаемой методики, и результатов, полученных с помощью метода последовательного суммирования и современных программных комплексов «Лира» и PLAXIS 3D.

Ключевые слова: физическая нелинейность, железобетонная плита, анизотропия плиты, неоднородность, способ Жемочкина, перемещения, упругое полупространство, защемленная нормаль, осадки, итерационный алгоритм, метод упругих решений, метод Ритца

Для цитирования: Кумашов, Р. В. Применение способа Жемочкина в нелинейном расчете железобетонных плит покрытия автомобильных дорог на упругом основании / Р. В. Кумашов // *Наука и техника*. 2023. Т. 22, № 2. С. 158–167. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-158-167>

Nonlinear Calculation of the Reinforced Concrete Road Pavement Slabs of Highways on the Elastic Basis by the Zhemochkin Method

R. V. Kumashov¹⁾

¹⁾ALC “ENEKA” (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. A rectangular reinforced concrete slab is considered taking into account its physical nonlinearity on a linearly elastic homogeneous base under the action of a vertical external load. The anisotropy and heterogeneity of the slab are due to the properties of reinforced concrete, as well as the formation of cracks from the action of an arbitrary load during operation. The nonlinear problem was solved by the Zhemochkin method using the iterative algorithm of the Ilyushin elastic solution method. The Ritz method (determining the deflections of a slab with a pinched normal) and the Boussinesq solution (determining the displacements of points on the surface of an elastic half-space) were used to determine the coefficients of the resolving equations of the Zhemochkin method. At the first iteration, the slab was calculated as linearly elastic,

Адрес для переписки

Кумашов Роман Владимирович
ОДО «ЭНЭКА»
просп. Независимости, 177-1а,
220125, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 29 306-21-18
Gunner09@yandex.ru

Address for correspondence

Kumashov Roman V.
ALC “ENEKA”
177-1a, Nezavisimosty Ave.,
220125, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 29 306-21-18
Gunner09@yandex.ru

orthotropic, and homogeneous; at subsequent iterations, it was calculated as linearly elastic, anisotropic, and inhomogeneous at each Zhemochkin site. The deflections of the middle surface of the slab from a unit force were determined as a series according to the first five particular Clebsch solutions. Experimental and numerical researches have been carried out. The latter – with the help of the MATHEMATICA computer program. The results obtained showed that the proposed calculation method allows one to accurately describe the distribution of settlements and reactive stresses under the slab. Verification of the methodology for static nonlinear calculation of a rectangular reinforced concrete slab, taking into account its physical nonlinearity, was carried out by comparing the results of calculations of maximum settlement and average pressures under the slab, obtained using the proposed methodology, and the results obtained using the layer-by-layer summation method and modern software systems Lira and PLAXIS 3D.

Keywords: physical nonlinearity, reinforced concrete slab, anisotropy of slab, heterogeneity, Zhemochkin method, displacements, elastic half-space, pinched normal, settlements, iteration algorithm, method of elastic solutions, Ritz method

For citation: Kumashov R. V. (2023) Nonlinear Calculation of the Reinforced Concrete Road Pavement Slabs of Highways on the Elastic Basis by the Zhemochkin Method. *Science and Technique*. 22 (2), 158–167. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-158-167> (in Russian)

Введение

При эксплуатации дорог передача нагрузки на железобетонную плиту дорожного покрытия от колес автомобиля всегда будет вне оси симметрии конструкции. Также не исключена вероятность образования выбоин, воронок и других дефектов под основанием плиты, поэтому в ней будут проявляться изгибающие и крутящие моменты, поперечная сила. Данные факторы – основные из влияющих на несущую способность, деформативность и долговечность дорожных покрытий [1].

Существует множество методик расчета жесткостных и деформативных характеристик плит и балок на упругом основании. Однако ни одна из них не определяет физическую нелинейность плит на упругом основании в полной мере. В частности, нет методики расчета прямоугольных плит с трещинами на упругом основании. В некоторых работах описаны только предпосылки и допущения, которые могут способствовать созданию такой методики [2–7]. Это объясняется сложностью решения контактной задачи теории упругости для плиты на упругом основании.

Современные программные комплексы по расчету строительных конструкций широко применяют численные методы, в частности метод конечных элементов. Он основан на представлении реальной конструкции ее дискретной моделью и замене дифференциальных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние сплошных тел, системой алгебраических уравнений. В качестве модели упругого основания в таких расчетных комплексах используются модели с постоянным или переменным коэффициентом постели. Данные методы не лишены недостатков [8–10]. Таким образом, эта отрасль исследований нелинейных

задач требует дальнейшей разработки в плане создания общей методологии, формулировки и решения контактных задач для нелинейно-упругих конструкций, взаимодействующих с линейно-упругим однородным основанием при условиях, накладываемых практикой натурных инженерно-геологических изысканий.

Постановка задачи. Граничные условия

В статье рассматривается прямоугольная, физически нелинейная анизотропная неоднородная плита на линейно-упругом однородном основании, которая находится под действием вертикальной внешней нагрузки. Параметры плиты: длина $2b$, ширина $2a$, высота h , жесткости в различных направлениях D_{11} , D_{12} , D_{21} , D_{22} , D_{33} . Физическая нелинейность обусловлена нелинейностью материала, анизотропией и неоднородностью плиты – образованием в ней трещин от действия произвольной нагрузки.

Линейно-упругое однородное основание моделируется как для линейно-упругого полупространства с постоянным модулем упругости (деформации) этого пространства E_0 . Коэффициент Пуассона упругого пространства ν_0 принимается постоянным. Считается, что на контакте плиты с упругим основанием возникают только нормальные реактивные давления, силами трения пренебрегают. Для плиты справедливы гипотезы теории изгиба, в контактной зоне справедливо равенство осадок основания прогибам плиты.

За основу методики расчета плиты на упругом основании принимали смешанный метод строительной механики, описанный Б. Н. Жемочкиным [11]. Плита в плане разбивалась на $m \times n$ участков Жемочкина (рис. 1). В свою очередь, каждый участок Жемочкина по высоте разбивался на k элементарных слоев (рис. 2).

За неизвестные принимали реактивные усилия $R_i(x, y)$ в связи i -го участка Жемочкина.

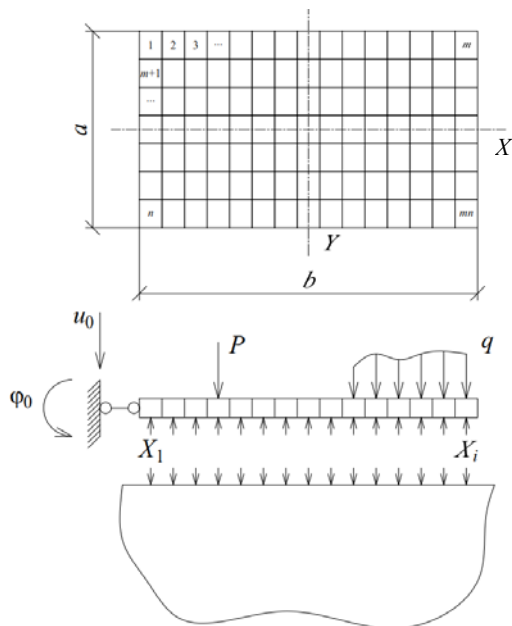


Рис. 1. Основная система способа Жемочкина:
 u_0, φ_0 – линейное и угловое перемещения введенного заземления на плите; P, q – произвольные сосредоточенная и распределенная нагрузки; X_1, X_i – усилие в связи 1-го и i -го участков Жемочкина

Fig. 1. Main system of the Zhemochkin method:
 u_0, φ_0 – linear and angular displacements of the introduced pinching on the plate; P, q – arbitrary concentrated and distributed loads; X_1, X_i – an effort in connection with the 1st and i th sections of Zhemochkin

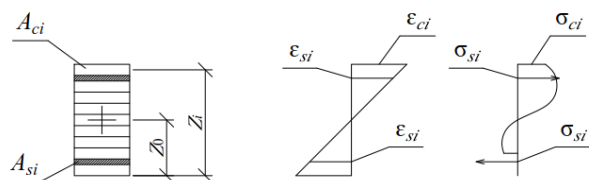


Рис. 2. Расчетное поперечное сечение и распределение деформаций и напряжений изгибаемого железобетонного элемента: A_{ci}, A_{si} – площадь элементарной площадки для бетона и арматуры; Z_0 – координаты положения нейтральной линии; Z_i – координата i -й элементарной площадки; $\epsilon_{ci}, \epsilon_{si}$ – относительная деформация бетона и арматуры в i -й элементарной площадке; σ_{ci}, σ_{si} – нормальное напряжение в бетоне и арматуре i -й элементарной площадки

Fig. 2. Calculated cross-section and distribution of deformations and stresses of a bent reinforced concrete element: A_{ci}, A_{si} – area of an elementary platform for concrete and reinforcement; Z_0 – neutral line position coordinates; Z_i – coordinate of the i th elementary area; $\epsilon_{ci}, \epsilon_{si}$ – relative deformation of concrete and reinforcement in the i th elementary area; σ_{ci}, σ_{si} – normal stress in concrete and reinforcement of the i th elementary area

Так как модуль деформации изменяется с высотой сечения $E(z)$ и аналитическое выражение данной зависимости неизвестно, то вычисление жесткостей выполняли численно [12]. Тогда выражения для жесткостей с учетом армирования плиты принимают вид:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \sum_{i=1}^n E_{c,i} B_{1,1} h_i z_{cx,i}^2 + \sum_{j=1}^2 E_{s,j} \frac{A_{sx,j}}{a} z_{sx,i}^2; \\ D_{12} &= \sum_{i=1}^n E_{c,i} B_{1,2} h_i z_{cy,i}^2 + \sum_{j=1}^2 E_{s,j} \frac{A_{sy,j}}{b} z_{sy,i}^2; \\ D_{21} &= \sum_{i=1}^n E_{c,i} B_{2,1} h_i z_{cx,i}^2 + \sum_{j=1}^2 E_{s,j} \frac{A_{sx,j}}{a} z_{sx,i}^2; \\ D_{22} &= \sum_{i=1}^n E_{c,i} B_{2,2} h_i z_{cy,i}^2 + \sum_{j=1}^2 E_{s,j} \frac{A_{sy,j}}{b} z_{sy,i}^2; \\ D_{33} &= \sum_{i=1}^n E_{c,i} B_{3,3} h_i z_{cx,i}^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $z_{cx,i}, z_{cy,i}, z_{sx,i}, z_{sy,i}$ – положение нейтральной линии для бетона и арматуры в двух направлениях; $A_{sx,j}, A_{sy,j}$ – верхнее и нижнее армирование плиты в двух направлениях; $E_{c,i}, E_{s,j}$ – модуль упругости бетона и арматуры; a, b – размер плиты; h_i – толщина i -й площадки; n – количество элементарных площадок бетона и арматуры; B – параметр, рассчитываемый по формуле

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{v^2-1} & \frac{v}{v^2-1} & 0 \\ \frac{v}{v^2-1} & -\frac{1}{v^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(1+v)} \end{bmatrix};$$

v – коэффициент Пуассона для бетона.

Полученную статически неопределимую систему решали смешанным методом строительной механики [4]. Составляли канонические уравнения смешанного метода, выражающие условия совместности деформаций плиты и упругого основания. К этим уравнениям добавляли уравнения равновесия. Получили систему линейных алгебраических уравнений [13]:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \delta_{ik} R_k + \Phi_{0x} y_i + \Phi_{0y} x_i + u_0 + \Delta_{ip} = 0 \right); \\ -\sum_{k=1}^n R_k y_k + M_{px} = 0; \\ -\sum_{k=1}^n R_k x_k + M_{py} = 0; \\ -\sum_{k=1}^n R_k + Q = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где u_0 , Φ_{0x} , Φ_{0y} – линейное и угловые перемещения введенного защемления на плите; Q , M_{px} , M_{py} – равнодействующая внешних сил, действующих на плиту, и ее моменты относительно координатных осей; R_k – неизвестное усилие в связях; δ_{ik} – коэффициент при неизвестных усилиях в связях; x , y – координаты центра участка Жемочкина; Δ_{ip} – вертикальное перемещение i -й точки основной системы; n – количество участков Жемочкина.

В ходе решения задачи будут получены следующие параметры: осадки плиты, реактивные давления в контактной зоне плиты с основанием, внутренние усилия в сечениях плиты, относительные деформации и напряжения в элементарных слоях участков Жемочкина.

Итерационный алгоритм расчета

В качестве диаграммы бетона, устанавливающей зависимость между напряжениями и деформациями, принимали нелинейную диаграмму состояния бетона с ниспадающей ветвью, рекомендованную в [14] (рис. 3).

На первой итерации при известном усилии от внешней нагрузки задавалось положение нейтральной поверхности сечения плиты в предположении упругой работы бетона и арматуры

$$z_{0x} = z_{0y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_{oi} A_i z_i}{\sum_{i=1}^n E_{oi} A_i}, \quad (3)$$

где E_{oi} – начальный модуль упругости бетона или арматуры i -й элементарной площадки; z_i – расстояние от выбранной оси элемента

до центра тяжести i -й элементарной площадки; A_i – площадь сечения i -й элементарной площадки; n – количество элементарных площадок бетона и арматуры.

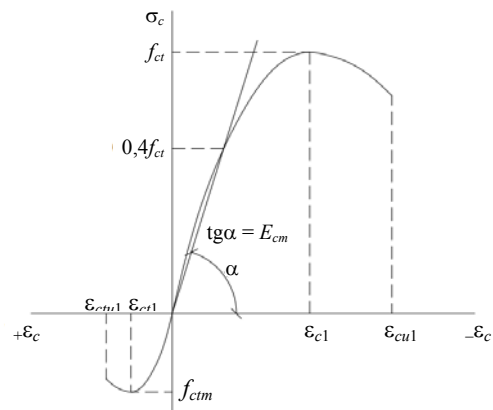


Рис. 3. Зависимость «напряжение – относительная деформация» для бетона: ϵ_c – относительная деформация бетона; ϵ_{c1} – то же, соответствующая прочности бетона на сжатие; ϵ_{cul} , ϵ_{ctu1} – то же, соответствующая предельному сжатию и растяжению бетона; ϵ_{ctl} – то же, соответствующая прочности бетона на растяжение; f_{cm} – средняя прочность на осевое сжатие бетона нормального веса; f_{ctm} – то же на осевое растяжение бетона нормального веса, установленная для проектирования конструкций; E_{cm} – модуль упругости бетона; σ_c – нормальное напряжение в бетоне

Fig. 3. Dependence “stress – relative deformation” for concrete: ϵ_c – relative concrete deformation; ϵ_{c1} – the same, corresponding to compressive strength of concrete; ϵ_{cul} , ϵ_{ctu1} – the same, corresponding to ultimate compression and tension of concrete; ϵ_{ctl} – the same, corresponding to the tensile strength of concrete; f_{cm} – average axial compressive strength of concrete of normal weight; f_{ctm} – average axial tensile strength of normal weight concrete specified for structural design; E_{cm} – modulus of concrete elasticity; σ_c – normal stress in concrete

Составляли канонические уравнения смешанного метода (2). Коэффициенты при неизвестных усилиях в связях в системе зависят от прогибов плиты в основной системе смешанного метода и осадок упругого основания и определяются по формуле [13]

$$\delta_{ik} = w_{ik} + V_{ik}, \quad (4)$$

где w_{ik} – прогиб плиты в точке X_i в основной системе от действия усилия $R_k = 1$; V_{ik} – перемещение точки приложения X_i на границе ос-

нования от действия равномерно распределенного по участку усилия $R_k = 1$.

Прогибы срединной поверхности плиты от единичной силы определяли в виде ряда по первым пяти частным решениям Клебша [15]

$$W(x, y) = C_{00} \left[\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + C_{01} \left[\left(\frac{x}{b} \right)^4 + \left(\frac{y}{a} \right)^4 \right] + C_{02} \frac{2xy}{ba} \left[\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + C_{03} \frac{x}{b} \left[\left(\frac{x}{b} \right)^2 - 3 \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] + C_{04} \frac{y}{a} \left[3 \left(\frac{x}{b} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right], \quad (5)$$

где $C_{00}, C_{01}, C_{02}, C_{03}, C_{04}$ – неопределенные коэффициенты.

Для определения коэффициентов использовали метод Ритца. Составляли функционал полной энергии плиты с защемленной нормалью и действующей силой $P(u, t)$

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 + (D_{12} + D_{21}) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + 4D_{33} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} \right] dx dy - PW(u, t), \quad (6)$$

где $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, D_{33}$ – жесткости плиты, определяемые по формуле (1); $W(x, y)$ – прогибы плиты в точке с координатами x, y ; P – единичная сила, действующая в точке с координатами u, t ; $W(u, t)$ – прогибы плиты от действия единичной силы P .

Из условия минимума функционала составляли систему линейных алгебраических уравнений. В результате ее решения получали выражения для коэффициентов и соответственно значения прогибов срединной поверхности плиты. Перемещение точки $M(x, y)$ поверхности упругого полупространства при загрузении участка прямоугольной формы на этой поверхности равномерно распределенной нагрузкой

с равнодействующей, равной 1, после решения задачи Буссинеска [16] имеет вид [13]:

$$W_M(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 \Delta_x} \left[\frac{y - d}{\Delta_y} \ln \frac{x - b + \sqrt{(x - b)^2 + (y - d)^2}}{x - a + \sqrt{(x - a)^2 + (y - d)^2}} + \frac{y - c}{\Delta_y} \ln \frac{x - a + \sqrt{(x - a)^2 + (y - c)^2}}{x - b + \sqrt{(x - b)^2 + (y - c)^2}} + \frac{x - b}{\Delta_y} \times \ln \frac{y - d + \sqrt{(x - b)^2 + (y - d)^2}}{y - c + \sqrt{(x - b)^2 + (y - c)^2}} + \frac{x - a}{\Delta_y} \ln \frac{y - c + \sqrt{(x - a)^2 + (y - c)^2}}{y - d + \sqrt{(x - a)^2 + (y - d)^2}} \right], \quad (7)$$

$$\Delta_x = b - a; \quad \Delta_y = d - c,$$

где a, b, c, d – координаты границ участка Жемочкина; x, y – то же точки M ; E_0 – модуль деформации грунта; ν_0 – коэффициент Пуассона грунта.

После решения системы канонических уравнений (2) по найденным значениям реактивных усилий R_k находили реактивное давление под плитой и распределение осадок S_k . По величине S_k определяли кривизну нейтральной поверхности плиты в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а также относительное кручение и главные радиусы кривизны поверхности [2]. Относительные деформации слоя, отстоящего от нейтральной поверхности на расстоянии z_i , вычисляли по формуле

$$\epsilon_{1,2} = \frac{z_0 - z_i}{r_{1,2}}, \quad (8)$$

где $r_{1,2}$ – главный радиус кривизны.

Далее по диаграмме деформирования бетона с учетом найденных относительных деформаций вычисляли напряжения и секущие модули деформации в каждом элементарном слое, а по формуле (3) – уточненное положение центра изгиба сечения плиты z_{0x}, z_{0y} . Если напряжения растяжения в бетоне элементарной площадки превышали предельные значения, это

свидетельствовало об образовании трещины в данной площадке. В последующих расчетах осевые жесткости этой элементарной площадки принимали равными нулю.

Найденные новые секущие модули деформаций вводили в новом расчетном цикле, в котором уточняли положение нейтральной поверхности плиты, жесткости и осадки плиты. Критерием окончания процесса последовательных приближений являлось сравнение осадок и главных радиусов кривизны на смежных этапах:

$$\Delta S_i = \frac{S_i^n - S_i^{n-1}}{S_i^n} \cdot 100 \% \leq \xi; \quad (9)$$

$$\Delta \frac{1}{r_i} = \frac{\left(\frac{1}{r_i}\right)^n - \left(\frac{1}{r_i}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{r_i}\right)^n} \cdot 100 \% \leq \xi, \quad (10)$$

где S_i^n, S_i^{n-1} – осадка на текущей и предыдущей итерации; $\left(\frac{1}{r_i}\right)^n, \left(\frac{1}{r_i}\right)^{n-1}$ – главные радиусы кривизны на текущей и предыдущей итерации; ξ – критерий сходимости; i – номер участка Жемочкина; n – номер итерации.

После окончания итерационного процесса в результате решения системы канонических уравнений (2) по найденным значениям реактивных усилий R_k определяли окончательные величины реактивного давления под плитой и распределения осадок S_k .

Экспериментальные исследования

Изучение реального распределения осадок под железобетонной плитой проводили в натурных условиях при испытании плиты 2ПП30.18-30 серии 3.503.1-1. Методика испытаний и их результаты приведены в [17, 18]. По результатам натурных экспериментов построены изополя перемещений плиты при различных вариантах ее загрузки. На рис. 4 представлены изополя основания плиты при центральном нагружении.

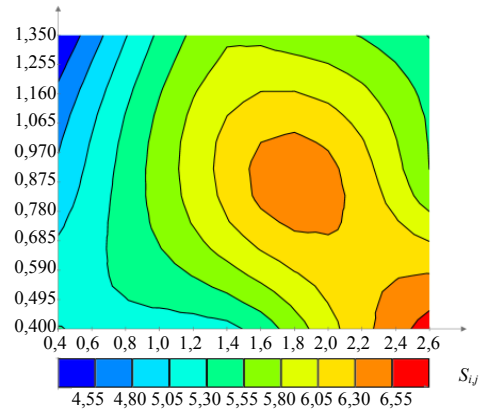


Рис. 4. Изополя осадок основания плиты (мм) при центральном нагружении силой $F = 100$ кН

Fig. 4. Settlement isofields for slab basis (mm) with its central loading by force $F = 100$ kN

Численные исследования и верификация результатов расчета

После проведения экспериментов выполняли численные исследования для центрального нагружения плиты силой $F = 100$ кН [1]. Расчет производили для каждой ступени нагружения в несколько итераций: нулевая (расчет в упругой стадии), первая и последующие (расчет в нелинейной стадии). Для каждой ступени нагружения условия сходимости были выполнены на второй итерации. По результатам численных исследований на рис. 5 приведены изополя осадок основания плиты, вычисленные на второй итерации для последней стадии нагружения, а на рис. 6 – изополя давлений под плитой.

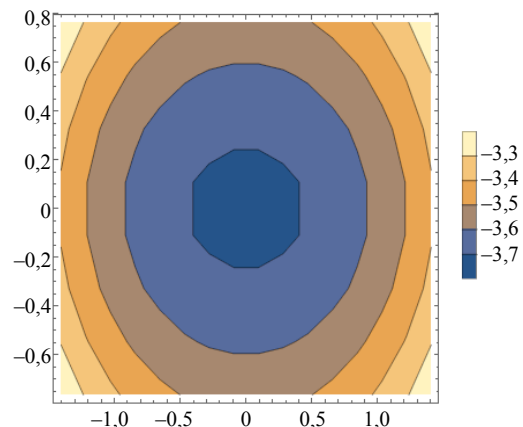


Рис. 5. Изополя осадок основания плиты (мм) при центральном ее нагружении силой $F = 100$ кН

Fig. 5. Settlement isofields for slab basis (mm) with its central loading by force $F = 100$ kN

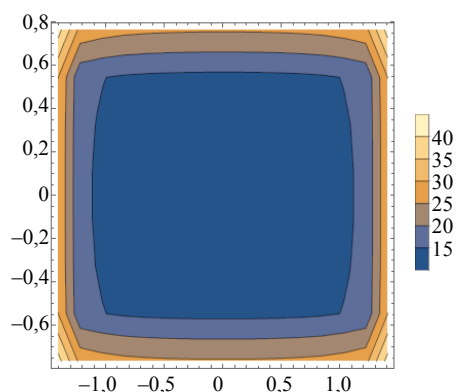


Рис. 6. Изополя давлений под плитой (кПа) при центральном нагружении силой $F = 100$ кН

Fig. 6. Pressure isofields under slab (kPa) with its central loading by force $F = 100$ kN

Верификацию осуществляли путем сравнения результатов расчетов максимальных осадок и средних давлений под плитой, полученных с использованием усовершенствованной методики статического расчета железобетонных плит на упругом основании, и результатов, полученных с помощью метода послойного суммирования [19] и современных программных комплексов «Ли́ра» и PLAXIS 3D.

Расчет методом послойного суммирования. Осадку при использовании расчетной схемы линейно деформируемого полупространства с ограничением глубины сжимаемой толщи по методу послойного суммирования определяли как сумму осадок элементарных слоев грунта в пределах сжимаемой толщи [19]

$$S = \beta \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{zp,i} h_i}{E_i}, \quad (11)$$

где β – безразмерный коэффициент, равный 0,8; $\sigma_{zp,i}$ – среднее дополнительное вертикальное нормальное напряжение в i -м слое основания вдоль вертикали, проходящей через центр подошвы фундамента, МПа; h_i – толщина i -го слоя, на которые разбивается сжимаемая толщина грунта, м; E_i – модуль деформации i -го слоя грунта, МПа.

При расчете плиту принимали абсолютно жесткой: нагрузка на плиту составляла 100 кН, размеры плиты $3 \times 1,75$ м, давление под ней 19,05 кПа, осадка упругого основания под плитой 3,28 см. Схема распределения вертикальных напряжений под плитой показана на рис. 7.

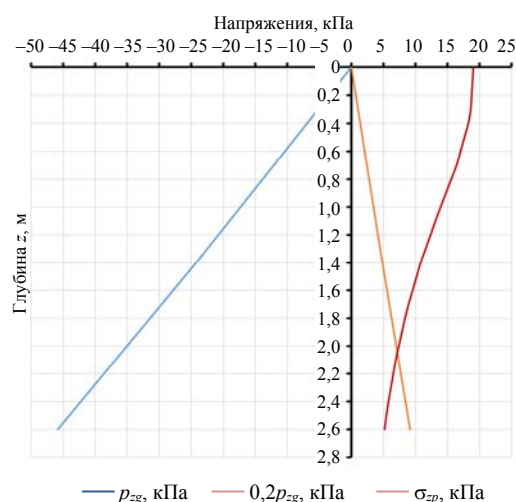


Рис. 7. Схема распределения вертикальных напряжений под плитой: p_{zg} – вертикальное природное давление; σ_{zp} – дополнительное вертикальное нормальное напряжение; z – глубина от низа плиты

Fig. 7. Distribution diagram of vertical stresses under the slab: p_{zg} – vertical natural pressure; σ_{zp} – additional vertical normal stress; z – depth from the slab bottom

Для сравнения результатов расчетов вводили показатель отклонений, рассчитываемый по формуле

$$\Delta_f = \frac{f_s - f_t}{f_t} \cdot 100 \%, \quad (12)$$

где Δ_f – относительная разница в значениях величины f , вычисленной в каждом расчете; f_s , f_t – значения f , вычисленные способом Жемочкина и рассматриваемым методом соответственно.

Максимальные значения осадки плиты, полученные с использованием способа Жемочкина и методом послойного суммирования, составили 3,722 и 3,280 мм соответственно, показатель отклонения $\Delta_f = 13 \%$. Максимальное, минимальное и среднее давления под плитой, полученные с применением способа Жемочкина, соответственно 41,969, 12,821 и 19,05 кПа. Среднее давление под плитой, вычисленное методом послойного суммирования, составило 19,05 кПа, показатель отклонения $\Delta_f = 0$.

Расчет с использованием программного комплекса «Ли́ра». Исследуемую плиту численно рассчитывали в ПК «Ли́ра». При постановке задачи ориентировались на следующие

гипотезы и допущения: в зоне контакта плиты с упругим основанием возникают только нормальные напряжения, силы трения пренебрежительно малы. В расчет принимали упругие характеристики:

– для плиты: конечный элемент КЭ-41, модуль упругости $E = 31500$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,167$, толщина $H = 0,17$ м;

– для слоистого основания в каждом упругом слое: КЭ-36, E_0 в соответствии с табл. 1 из [17], $\nu_0 = 0,3$.

На рис. 8 приведена расчетная модель плиты в ПК «Лира», на рис. 9 – результаты расчета.

Максимальные значения осадок плиты, полученные с использованием способа Жемочкина и в программном комплексе «Лира»

в линейной постановке, составили 3,722 и 3,576 мм соответственно, показатель отклонения $\Delta_f = 4\%$.

Расчет с использованием программного комплекса PLAXIS 3D (Demo). PLAXIS 3D представляет собой конечно-элементную программу, предназначенную для трехмерных расчетов напряжений, деформаций и прочности (устойчивости) сложных геотехнических объектов. Программа располагает широкими возможностями для решения различных задач, возникающих при проектировании геотехнических сооружений различного назначения. Позволяет моделировать работу системы конструктивных элементов и их взаимодействие с грунтовой средой с учетом нелинейного, реологического и анизотропного поведения грунтов.

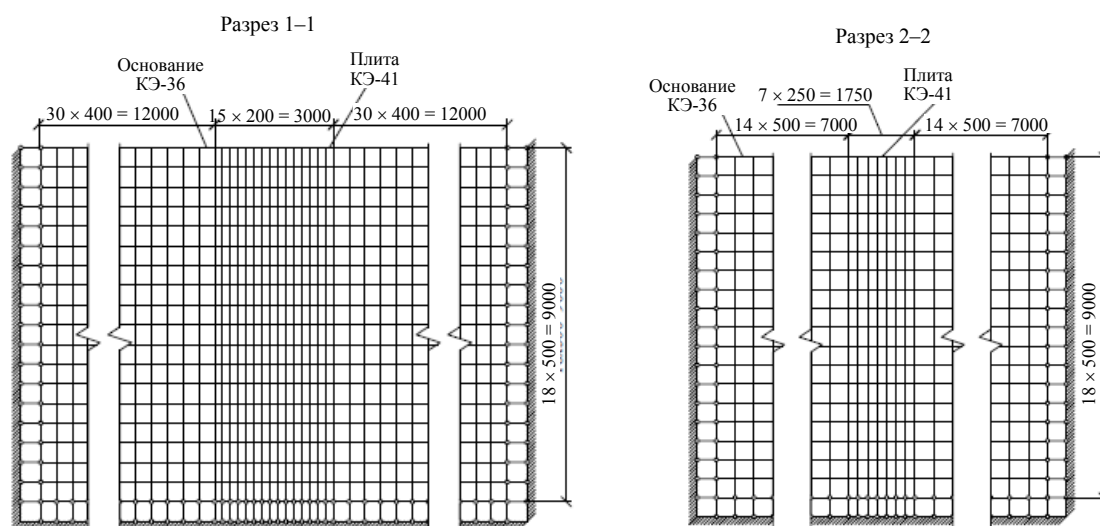


Рис. 8. Расчетная модель плиты в программном комплексе «Лира»

Fig. 8. Calculation model of the slab in the Lira software package

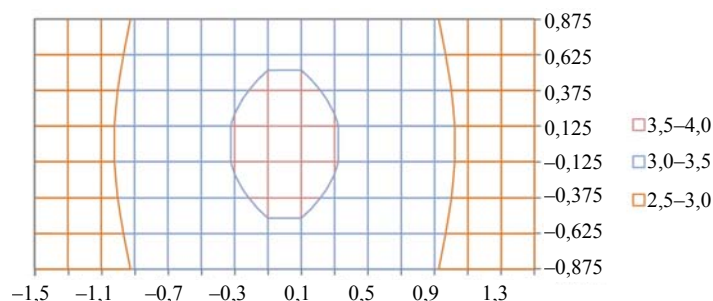


Рис. 9. Распределение осадок основания плиты при расчете в программном комплексе «Лира» (цифры на рисунке – размеры плиты относительно ее центра)

Fig. 9. Settlement distribution of the slab basis in the calculation in Lira software package (numbers in Fig. – dimensions of the slab relative to its center)

Расчет вели в линейной постановке. Модуль упругости грунта принимали переменным по высоте. Характеристики:

- плиты: $E = 31500$ МПа, $\nu = 0,167$, $H = 0,17$ м;
- грунта основания: модель Mohr-Coulumb, удельный вес грунта выше уровня грунтовых вод $\gamma_{unsat} = 17,3$ кН/м³, удельный вес грунта ниже уровня грунтовых вод $\gamma_{sat} = 20$ кН/м³, модель деформации грунта $E = 4$ МПа, приращение модуля деформации грунта на единицу глубины $E_{inc} = 31,08$ МПа, глубина, с которой учитывается упрочнение грунта, $-z_{ref} = -0,8$ м, коэффициент Пуассона грунта $\nu = 0,3$, модуль сдвига грунта $G = 1,538$ МПа, одометрический модуль грунта $E_{oed} = 5,385$ МПа, удельное сцепление грунта $c = 2$ кПа, угол внутреннего трения грунта $\varphi = 33^\circ$, угол дилатансии грунта $\psi = 3^\circ$.

Сетка конечных элементов показана на рис. 10, результаты расчета перемещений плиты и напряжений под ней – на рис. 11, 12 соответственно.

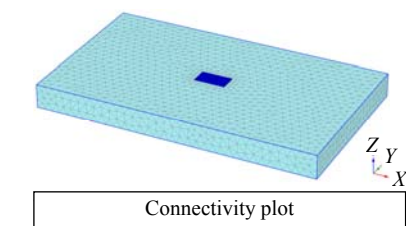
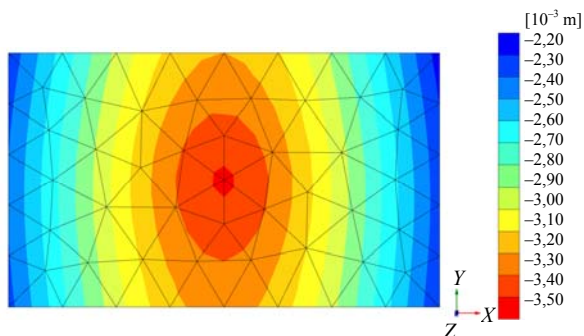


Рис. 10. Сетка конечных элементов

Fig. 10. Finite element mesh



Total displacements u_z (scaled up 200 times)

Maximum value = $-2,250 \cdot 10^{-3}$ m (Element 5 at Node 11)

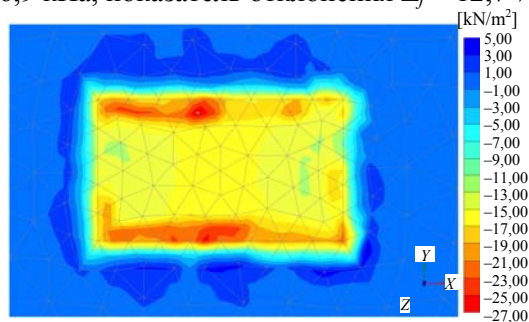
Maximum value = $-3,423 \cdot 10^{-3}$ m (Element 9 at Node 13)

Рис. 11. Перемещения плиты

Fig. 11. Slab displacements

Максимальные значения осадок плиты, полученные с использованием способа Жемочкина и в программном комплексе PLAXIS 3D в линейной постановке, составили 3,722 и 3,423 мм соответственно, показатель отклонения $\Delta_f = 9\%$. Максимальное, минимальное и среднее давления под плитой, вычисленные с помощью способа Жемочкина, составили соответствен-

но 41,969, 12,821 и 19,048 кПа, а в программном комплексе PLAXIS 3D – 27,0, 11,0 и 16,9 кПа, показатель отклонения $\Delta_f = 12,7\%$.



Cartesian total stress σ_{xx} (scaled up 0,0200 times)

Maximum value = 4,654 kN/m² (Element 131 at Node 5171)

Maximum value = -46,54 kN/m² (Element 540 at Node 1509)

Рис. 12. Напряжения под плитой

Fig. 12. Stresses under slab

ВЫВОДЫ

1. Благодаря проведенным исследованиям усовершенствована методика статического расчета прямоугольных железобетонных плит покрытия автомобильных дорог с учетом их физической нелинейности итерационным способом Жемочкина, принимая во внимание трещинообразование.

2. Сравнение результатов экспериментальных и численных исследований показало, что способ Жемочкина, в общем, позволяет довольно точно описать распределение осадок и реактивных давлений под плитой.

3. Верификация предлагаемой методики статического расчета по требованиям ТНПА с использованием современных программных комплексов «Лира» и PLAXIS 3D, а также с учетом результатов экспериментальных исследований показала достаточно точное совпадение теоретических и практических значений осадок и напряжений под плитой.

ЛИТЕРАТУРА

- Семенюк, С. Д. Экспериментальные исследования осадок железобетонных плит покрытия автомобильных дорог и оценка точности расчетной методики / С. Д. Семенюк, Р. В. Кумашов // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. / Ин-т БелНИИС; редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. Минск, 2020. Вып. 12. С. 185–208.
- Соломин, В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. М.: Стройиздат, 1986. 206 с.
- Гвоздев, А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А. А. Гвоздев. М.: Стройиздат, 1949. 280 с.
- Ржаницин, А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницин. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
- Ржаницин, А. Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек / А. Р. Ржаницин. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 288 с.

6. Клепиков, С. Н. Взаимодействие конструкций с основанием: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.01 / С. Н. Клепиков; Госстрой СССР, Научно-исследовательский институт строительных конструкций (НИИСК). Киев, 1970. 329 с.
7. Семенюк, С. Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании / С. Д. Семенюк. Могилев: Белор.-Рос. ун-т, 2003. 269 с.
8. Маковкин, Г. А. Применение МКЭ к решению задач механики деформируемого твердого тела / Г. А. Маковкин, С. Ю. Лихачева. Н. Новгород: Изд-во ННГАСУ, 2012. Ч. 1. 71 с.
9. Лебедев, А. В. Численные методы расчета строительных конструкций / А. В. Лебедев. СПб.: СПбГАСУ, 2012. 55 с.
10. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. Минск: Вышэйш. шк., 1990. 346 с.
11. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.
12. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н. С. Пискунов. 13-е изд. М.: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит., 1985. Т. 1. 432 с.
13. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
14. Бетонные и железобетонные конструкции: СП 5.03.01–2020. Введ. 16.11.2020. Минск: Минстройархитектуры, 2020. 178 с.
15. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физ.-мат. изд-во, 1963. 536 с.
16. Boussinesq, J. Applications des Potentiels a L'etude de L'equilibre et du Movement des Solides Elastiques / J. Boussinesq. Paris: Gauthiers-Villars, 1885. 721 p.
17. Семенюк, С. Д. Железобетонные плиты покрытия автомобильных дорог на упругом полупространстве / С. Д. Семенюк, Р. В. Кумашов // International Journal for Computation Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14, No 2. С. 149–157. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-2-149-157>.
18. Кумашов, Р. В. Методика и результаты полевых испытаний железобетонной плиты покрытия автомобильных дорог 2ПП30.18-30 / Р. В. Кумашов // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. Могилев: Белор.-Рос. ун-т, 2018. С. 298–299.
19. Фундаменты плитные. Правила проектирования: ТКП 45-5.01-67–2007 (02250). Введ. 01.09.2007. Минск: Минстройархитектуры, 2018. 94 с.
3. Gvozdev A. A. (1949) *Calculation of the Bearing Capacity of Structures by the Method of Limit Equilibrium*. Moscow, Stroyizdat Publ. 280 (in Russian).
4. Rzhantsyn A. R. (1991) *Structural Mechanics*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).
5. Rzhantsyn A. R. (1983) *Limit Equilibrium of Plates and Shells*. Moscow, Nauka Publ., Main Office of Physical and Mathematical Literature. 288 (in Russian).
6. Klepikov S. N. (1970) *Interaction of Structures with the Base*. Kiev, State Committee for Construction of the USSR, Scientific Research Institute of Building Constructions (NIISK). 329 (in Russian).
7. Semenyuk S. D. (2003) *Reinforced Concrete Spatial Foundations of Residential and Civil Buildings on an Unevenly Deformed Base*. Mogilev, Belarusian-Russian University. 269 (in Russian).
8. Makovkin G. A., Likhacheva S. Yu. (2012) *Application of FEM to Solving Problems of Solid Mechanics. Part 1*. Novgorod, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering (NNGASU). 71 (in Russian).
9. Lebedev A. V. (2012) *Numerical Methods for Calculating Building Structures*. Saint-Petersburg, Saint Petersburg University of Architecture and Civil Engineering (SPbGASU). 55 (in Russian).
10. Ilyin V. P., Karpov V. V., Maslennikov A. M. (1990) *Numerical Methods for Solving Structural Mechanics Problems*. Minsk, Vysheysaya Shkola Publ. 346 (in Russian).
11. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroyizdat Publ. 240 (in Russian).
12. Piskunov N. S. (1985) *Differential and Integral Calculus for Higher Technical Educational Institutions. Vol. 1*. 13th ed. Moscow, Nauka Publ., Main Office of Physical and Mathematical Literature. 432 (in Russian).
13. Bosakov, S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
14. SP [Construction Regulations] 5.03.01–2020. *Concrete and Reinforced Concrete Structures*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction, 2020. 178 (in Russian).
15. Timoshenko S. P., Voynovsky-Kriger S. (1963) *Plates and Shells*. Moscow, Fizmat Publ. 536 (in Russian).
16. Boussinesq J. (1885) *Applications des Potentiels a L'etude de L'equilibre et du Movement des Solides Elastiques*. Paris, Gauthiers-Villars. 721 (in French).
17. Semenyuk S. D., Kumashov R. V. (2018) Reinforced Concrete Coating Plates of Highways on an Elastic Half-Space. *International Journal for Computation Civil and Structural Engineering*, 14 (2), 149–157. <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2018-14-2-149-157>.
18. Kumashov R. V. (2018) Methodology and Results of Field Tests of a Reinforced Concrete Slab for Road Pavement 2PP30.18-30. *Materialy, Oborudovanie i Resursosberegayushchie Tekhnologii: Materialy Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf.* [Materials, Equipment and Resource-Saving Technologies: Proceedings of Scientific and Technical Conference]. Mogilev, Belarusian-Russian University, 298–299 (in Russian).
19. TKP [Technical Code of Common Practice] 45-5.01-67–2007 (02250). *Slab Foundations. Design Rules*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction, 2018. 94 (in Russian).

Поступила 02.08.2022

Подписана в печать 11.10.2022

Опубликована онлайн 31.03.2023

REFERENCES

1. Semenyuk S. D., Kumashov R. V. (2020) Experimental Research of the Displacements of the Reinforced Concrete Slabs of Highways Pavement and Assessment of the Accuracy of the Calculation Method. *Problemy Sovremenno-go Betona i Zhelezobetona: Sb. Nauch. Tr.* [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete: Collection of Scientific Papers]. Minsk, Iss. 12, 185–208 (in Russian).
2. Solomin V. I., Shmatkov S. B. (1986) *Calculation Methods and Optimal Design of Reinforced Concrete Foundation Structures*. Moscow, Stroyizdat Publ. 206 (in Russian).

Received: 02.08.2022

Accepted: 11.10.2022

Published online: 31.03.2023