

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-141-149>

УДК 539.3

Особенности нелинейного расчета изгибаемых стержней, частично опертых на упругое основание

Асп. П. Д. Скачѣк¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2023
Belarusian National Technical University, 2023

Реферат. Исследуются результаты решения пространственных контактных задач о свободном опирании изгибаемых стержней (далее – балок) на упругие четвертьпространство и октант пространства. В задачи исследования входят: определение напряженного состояния контактных площадок, получение картины распределения по ним контактных напряжений и изучение особенностей, возникающих при решении данных контактных задач. Основной метод решения – метод Б. Н. Жемочкина, основанный на дискретизации контактных областей путем замены непрерывного контакта точечным. Такой подход позволяет свести контактную задачу к расчету статически неопределимой системы хорошо разработанными методами строительной механики. Математическая модель решаемых контактных задач строится в предположении линейно-упругой (геометрическая и физическая линейность) работы как изгибаемого элемента, так и упругого основания. Поскольку в процессе деформирования концевые участки балки могут оторваться от опорных площадок, решаемые контактные задачи относятся к группе контактных задач с заранее неизвестной областью контакта. Расчетные схемы таких задач являются конструктивно нелинейными, и их расчет ведется итерационными методами. По результатам решения рассматриваемых контактных задач обнаружено, что при геометрически симметричном опирании балки слева и справа на упругие четвертьпространства (октанты пространства) с равными опорными площадками, но различными механическими характеристиками, а также симметричном нагружении значения опорных реакций, рассматривая их как равнодействующие контактных напряжений на левой и правой контактной площадке, и координаты точек их приложения не равны между собой. К подобному результату приводит и решение контактной задачи в случае опирания балки с одной стороны на упругое четвертьпространство, а с другой – на край октанта пространства. К тому же по всей длине балки появляется постоянный крутящий момент, свидетельствующий о том, что балка находится в условиях поперечного изгиба с кручением.

Ключевые слова: упругое четвертьпространство, октант упругого пространства, метод Б. Н. Жемочкина, напряженное состояние, контактная площадка, смешанный метод, опорная реакция, крутящий момент, конструктивная нелинейность

Для цитирования: Скачѣк, П. Д. Особенности нелинейного расчета изгибаемых стержней, частично опертых на упругое основание / П. Д. Скачѣк // Наука и техника. 2023. Т. 22, № 2. С. 141–149. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-141-149>

Features of Nonlinear Calculation of Bending Rods Partially Supported on Elastic Foundation

P. D. Skachok¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper investigates the results of solving spatial contact problems on the free support of bending rods (hereinafter referred to as beams) on elastic quarter-space and octant of space. The objectives of the study include determining the stress state of contact pads, obtaining a picture of the distribution of contact stresses over them, and studying the features

Адрес для переписки

Скачѣк Павел Дмитриевич
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
ps2017y@yandex.com

Address for correspondence

Skachok Pavel D.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
ps2017y@yandex.com

that arise when solving these contact problems. The main solution method is the method of B. N. Zhemochkin, based on the discretization of contact areas by replacing a continuous contact with a point one. This approach allows us to reduce the contact problem to the calculation of a statically indeterminate system using well-developed methods of structural mechanics. The mathematical model of the contact problems to be solved is built on the assumption of linear elastic (geometric and physical linearity) work of both the bending element and the elastic foundation. Since in the process of deformation the end sections of the beam element can break away from the support areas, the contact problems to be solved belong to the group of contact problems with a previously unknown contact area. The design schemes of such problems are constructively nonlinear, and their calculation is carried out by iterative methods. Based on the results of solving the considered contact problems, it has been found that with a geometrically symmetrical support of the beam element on the left and right on elastic quarter-spaces (space octants) with equal support areas, but different mechanical characteristics, as well as symmetrical loading, the values of support reactions, considering them as resultants of contact stresses on the left and right contact pads, and the coordinates of the points of their application are not equal to each other. The solution of the contact problem leads to a similar result in the case of a bending beam element resting on the elastic quarter-space on one side, and on the edge of the space octant on the other. In addition, a constant torque appears along the entire length of the beam element, indicating that the beam element is in a torsional transverse bending condition.

Keywords: elastic quarter space, elastic space octant, method of B. N. Zhemochkin, tense state, contact pad, mixed method, support reaction, torque, constructive non-linearity

For citation: Skachok P. D. (2023) Features of Nonlinear Calculation of Bending Rods Partially Supported on Elastic Foundation. *Science and Technique*. 22 (2), 141–149. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-141-149> (in Russian)

Введение

Взаимодействие различных строительных конструкций, деталей машин, фундаментов с грунтовым основанием и т. п. порождает класс задач, называемых контактными. В фундаментостроении особый интерес к расчету конструкций на упругом основании обусловлен тем, что места контакта являются концентраторами напряжений, а контактные области – местами передачи нагрузок. Решение вопроса о напряженно-деформированном состоянии области контакта способствует адекватной формулировке граничных условий, необходимых для расчета самой конструкции. Известно, что решение любой контактной задачи сводится к решению интегрального или интегро-дифференциального уравнения [1, 2], которое зависит от ядра интегрального уравнения, являющегося функцией влияния контактирующих тел. Аналитические решения удастся получить лишь для ограниченного числа задач, в которых контактирующие тела являются классическими областями, ядра которых имеют специальный вид. Отдельная проблема – получение ядер (функций влияния) для неклассических областей. Большинство контактных задач решается численными и численно-аналитическими методами [2, 3].

Мостовую балку, опираемую на фундаментные массивы, балку, лежащую на грунто-

вом основании с проседанием или отсутствием грунта в центральной ее части [4], балку, покоящуюся на толстых стенах, с инженерной степенью точности можно рассматривать как балку, опираемую по концам на упругие четвертьпространства и 1/8 пространства. Данная контактная задача имеет ряд особенностей. Упругое изотропное четвертьпространство и 1/8 пространства – неклассические области. Рассматривается балка конечной жесткости, что в процессе совместного деформирования упругих оснований и балки приводит к отрыву ее концов от опорных поверхностей. Таким образом, решаемая контактная задача относится к контактным задачам с заранее неизвестной областью контакта, что является признаком ее конструктивной нелинейности.

Получить аналитическое решение данной задачи достаточно сложно. Будем использовать численно-аналитический метод Б. Н. Жемочкина, основанный на замене непрерывного контакта дискретным [5, 6]. Он позволяет решать контактные задачи с любой степенью точности, учитывать конструктивную нелинейность, переменность жесткостных характеристик контактирующих тел, пригрузку оснований, наличие начальных напряжений и т. д. [7]. Поскольку данный метод приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений, решаемые им задачи легко алгоритмизируются.

Постановка задач

Рассматривается свободное опирание балки на упругие четвертьпространство и 1/8 (октант) пространства. Возможны три принципиально различных варианта опирания: с двух сторон на четвертьпространства; с двух сторон на 1/8 пространства; с одной стороны на четвертьпространство, со второй – на 1/8 пространства (рис. 1). Во всех рассматриваемых вариантах балка имеет геометрически симметричные площадки опирания и воспринимает вертикальную симметричную статическую нагрузку. Задачами расчета являются определение контактных напряжений в местах опирания балки и обнаружение взаимосвязи опорных реакций и возникающих в балке усилий от механических характеристик опорных поверхностей.

Построение математических моделей поставленных задач осуществляется в рамках следующих допущений:

- для балки справедливы гипотезы изгиба [8];
- балка, четвертьпространство и 1/8 пространства – линейно-упругие и линейно-деформируемые;
- связи Б. Н. Жемочкина между опорными поверхностями балки и упругого основания принимаются односторонними, работающими только на сжатие;
- в зоне контакта не учитываются касательные напряжения.

Для всех случаев опирания построение расчетной схемы осуществляется одним и тем же

образом. А именно, в месте контакта с упругим основанием балка заменяется срединной плоскостью, жесткость которой в направлении оси Y принимается бесконечной, а в пролете – продольной осью. Расчет выполняется методом Б. Н. Жемочкина. Для этого область контакта разбивается на n прямоугольных участков (участки Б. Н. Жемочкина) (рис. 2). Предполагается, что контакт балки с опорными поверхностями осуществляется через жесткие односторонние связи, устанавливаемые в середине каждого участка. При этом принимается, что усилия z_i в связях Б. Н. Жемочкина вызывают равномерное распределение контактных напряжений по участку. В середине пролета балки вводится условное защемление, препятствующее вертикальному перемещению u_0 и угловым перемещениям φ_x , φ_y относительно осей X и Y соответственно. Полученная статически неопределимая система считается смешанным методом строительной механики, где за основные неизвестные принимаются усилия z_i в связях Б. Н. Жемочкина и перемещения во введенном защемлении u_0 , φ_x , φ_y . Результатом расчета данной статически неопределимой системы являются усилия в связях Б. Н. Жемочкина и реальные перемещения во введенном защемлении, а именно вертикальное перемещение и два угла поворота относительно осей X и Y .

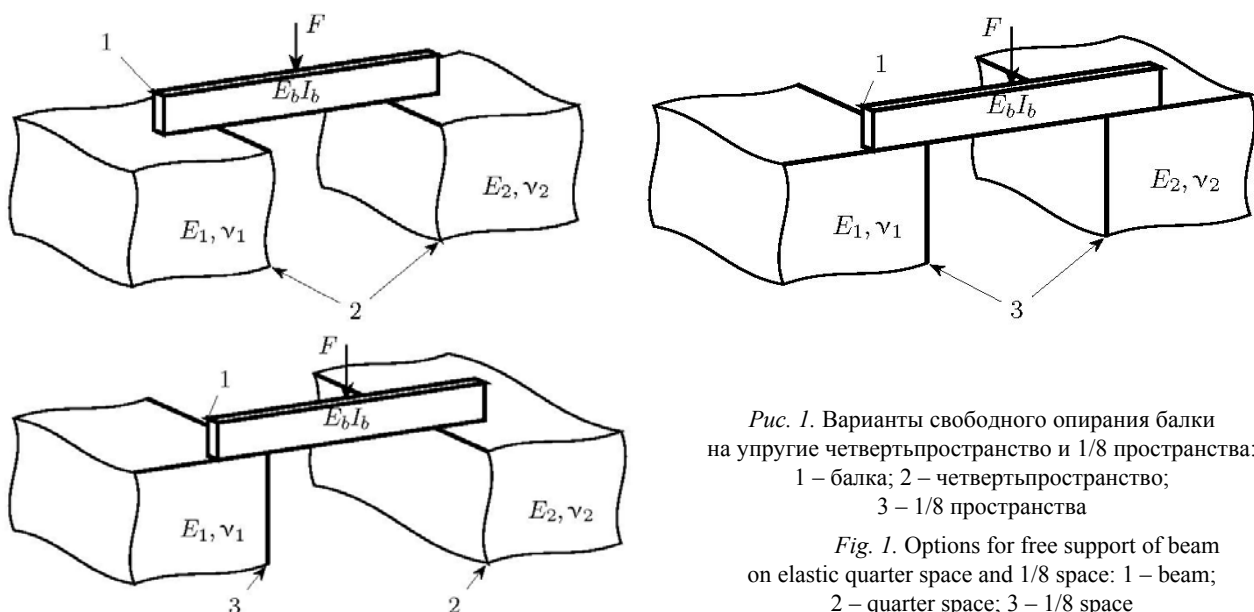


Рис. 1. Варианты свободного опирания балки на упругие четвертьпространство и 1/8 пространства: 1 – балка; 2 – четвертьпространство; 3 – 1/8 пространства

Fig. 1. Options for free support of beam on elastic quarter space and 1/8 space: 1 – beam; 2 – quarter space; 3 – 1/8 space

ности связей Б. Н. Жемочкина). Появившиеся в результате решения СЛАУ отрицательные (т. е. растягивающие) усилия в связях Б. Н. Жемочкина необходимо удалить из расчетной схемы, заново сформировать СЛАУ и ее решить. И так далее. Итерационный процесс считается завершенным, когда на границе области контакта реактивные давления тождественно равны нулю и в оставшихся связях Б. Н. Жемочкина возникают только усилия сжатия. Изменения в расчетной схеме рассматриваемых контактных задач свидетельствуют об их конструктивной нелинейности. Необходимо отметить, что алгоритм удаления «растянутых» связей Б. Н. Жемочкина для рассматриваемых контактных задач строится таким образом, что на каждой итерации удаляются сразу все «растянутые» связи левой и правой контактной площадки. Такая реализация итерационного алгоритма обладает достаточно высокой скоростью (порядка 3–5 итераций) для данной жесткости контактирующих тел.

Численные результаты

Для всех задач в качестве изгибаемого балочного элемента принята железобетонная балка конструктивной длиной 5,96 м и шириной 0,2 м, модуль упругости бетона балки $E_b = 30$ ГПа. Размеры площадок опирания на левой и правой опорах $0,2 \times 0,2$ м. Балка загружена в середине пролета сосредоточенной силой $F = 50$ кН.

1. Для первого варианта опирания, когда балка с обеих сторон опирается на четверть-

пространства, принимаем следующие значения модуля деформации и коэффициента Пуассона упругих оснований: $E_1 = 29$ ГПа, $\nu_1 = 0,2$, $E_2 = 2,25$ ГПа, $\nu_2 = 0,25$.

На рис. 3 построены изолинии контактных напряжений для левой и правой контактных площадок балки. Полученное решение обладает рядом особенностей:

- на левой площадке, где балка опирается на более жесткое основание, она в процессе своего изгиба отрывается от опорной поверхности и опирание сводится по первому ряду связей Б. Н. Жемочкина;

- на правой площадке, где балка опирается на менее жесткое основание, она также отрывается от опорной поверхности, но при этом зона опирания имеет конечные размеры;

- геометрически симметричное опирание и загрузка балки вызывают несимметричное распределение контактных напряжений на левой и правой опорных площадках балки. При этом опорные реакции, как равнодействующие контактных напряжений, не равны между собой $R_L = 25,092$ кН $\neq R_R = 24,908$ кН, как и значения координат точек их приложения $2,79$ м $\neq 2,81052$ м.

На первый взгляд, результат ожидаемый, так как на левой и правой опорных площадках фактические области контакта имеют разные размеры, однако подобные результаты обнаруживаются и при отсутствии всякого отрыва на опорных площадках, когда рассматривается опирание бесконечно жесткой балки (рис. 4).

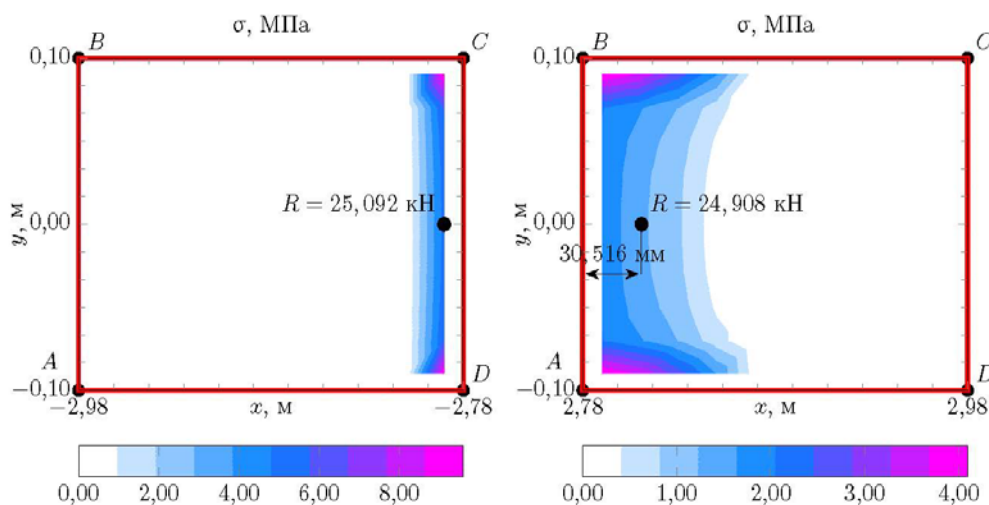


Рис. 3. Изолинии контактных напряжений на левой и правой контактных площадках балки при ее опирании на четвертьпространства различных механических характеристик

Fig. 3. Isolines of contact stresses on left and right contact pads of beam when it rests on quarter space of various mechanical characteristics

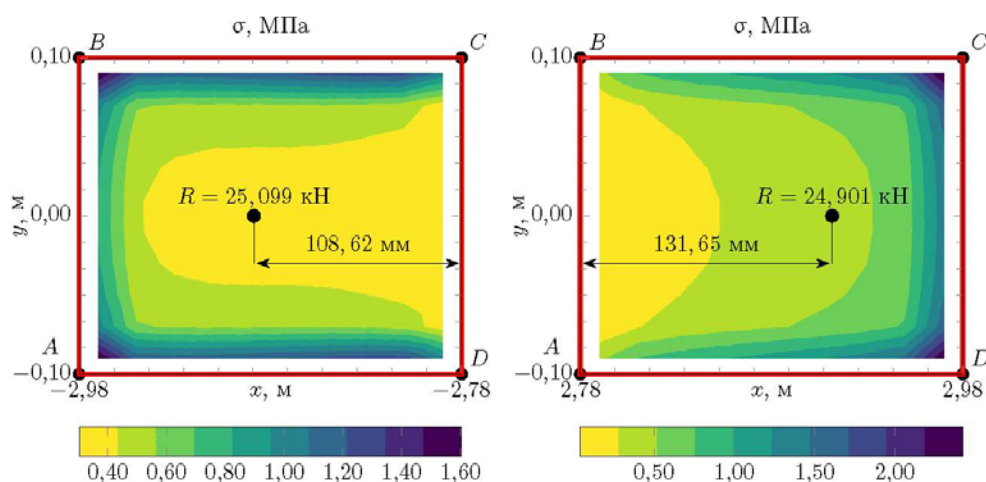


Рис. 4. Изолинии контактных напряжений на левой и правой контактных площадках жесткой балки при ее опирании на четвертьпространства различных механических характеристик

Fig. 4. Isolines of contact stresses on left and right contact pads of rigid beam when it rests on quarter space of various mechanical characteristics

То есть система, обладающая полной симметрией, имеет разные по значению и точке приложения реакции, зависящие от соотношения жесткостей опорных поверхностей. При этом условия равновесия балки не нарушаются.

Представленное решение подтверждает известный факт, что в статически неопределимой системе более жесткие элементы воспринимают большие усилия [8].

Введя коэффициент соотношения жесткостей упругих оснований μ , получим зависимость опорных реакций от μ (рис. 5)

$$\mu = \frac{E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)}, \quad (3)$$

где E_1 , ν_1 – модуль деформации и коэффициент Пуассона левой опоры балки; E_2 , ν_2 – то же правой опоры балки.

При значении коэффициента $\mu=1$, что соответствует равным механическим характеристикам опорных конструкций, опорные реакции равны между собой и принимают значение половины действующей нагрузки. С изменением μ контактные напряжения на опорных площадках балки распределяются таким образом, что большие опорные реакции возникают в более жесткой опоре. При этом равновесие балки не нарушается и $R_{left} + R_{right} = \text{const} = F$.

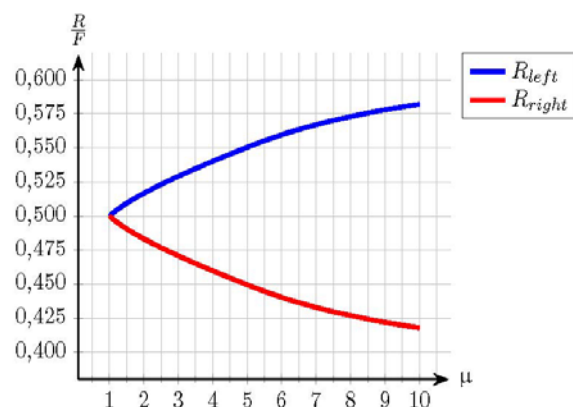


Рис. 5. Зависимость опорных реакций в опорах балки от соотношения жесткостей опорных конструкций: R_{left} – опорная реакция на левой контактной площадке; R_{right} – то же на правой контактной площадке

Fig. 5. Dependence of support reactions in beam nodes on ratio of support structure rigidity: R_{left} – support reaction on left pad; R_{right} – support reaction of right node

2. Рассмотрим второй вариант опирания, когда балка слева и справа опирается на края упругих 1/8 пространства (рис. 1). Для большей наглядности полученного решения характеристики упругих оснований берем прежними, а балку – бесконечно жесткую.

Представленное на рис. 6 решение имеет также ряд особенностей:

– геометрически симметричное опирание и загрузка жесткой балки не вызывает ее отрыва от опорных поверхностей и опорные реакции не равны между собой;

– помимо различных реакций деформирования балки сопровождается появлением по ее длине постоянного крутящего момента, т. е. балка, в конечном счете, работает на поперечный изгиб с кручением. При этом равновесие балки не нарушается.

3. В третьем варианте жесткую балку свободно опираем слева на 1/8 пространства и справа на четвертьпространство (рис. 1). В данном случае упругие основания примем с равными механическими характеристиками $E_1 = E_2 = 2,25$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$. На рис. 7 представлено распределение контактных напряжений на опорных площадках балки.

Картина распределения контактных напряжений на левой и правой опорных площадках (рис. 7) показывает, что жесткая балка не отрывается от опорных поверхностей, значения опорных реакций не равны между собой. При этом точки приложения реакций расположены по разные стороны от продольной оси балки, что вызывает появление постоянного по ее длине крутящего момента, т. е. в данном варианте опирания балка также работает на поперечный изгиб с кручением.

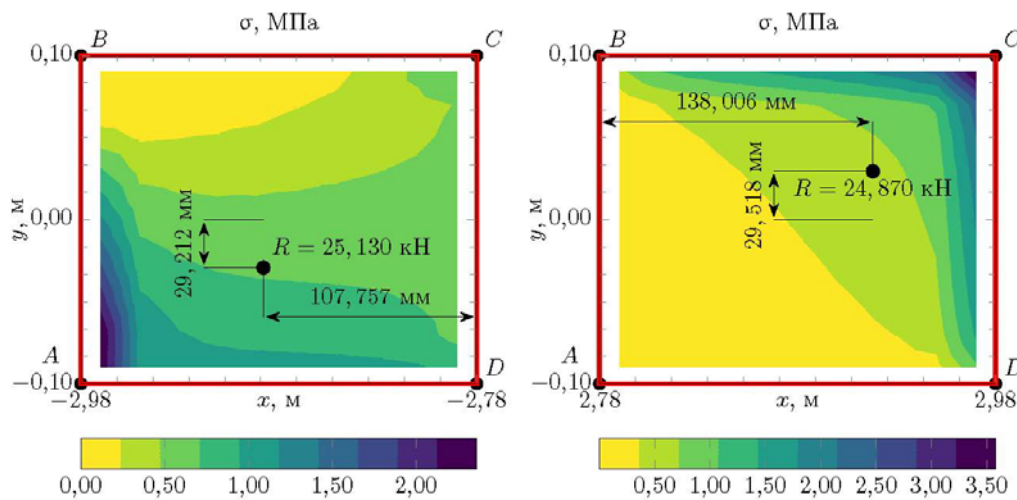


Рис. 6. Изолинии контактных напряжений на левой и правой опорных площадках жесткой балки при ее опирании на 1/8 пространства различных механических характеристик

Fig. 6. Isolines of contact stresses on left and right support pads of rigid beam when it is supported on 1/8 of space of various mechanical characteristics

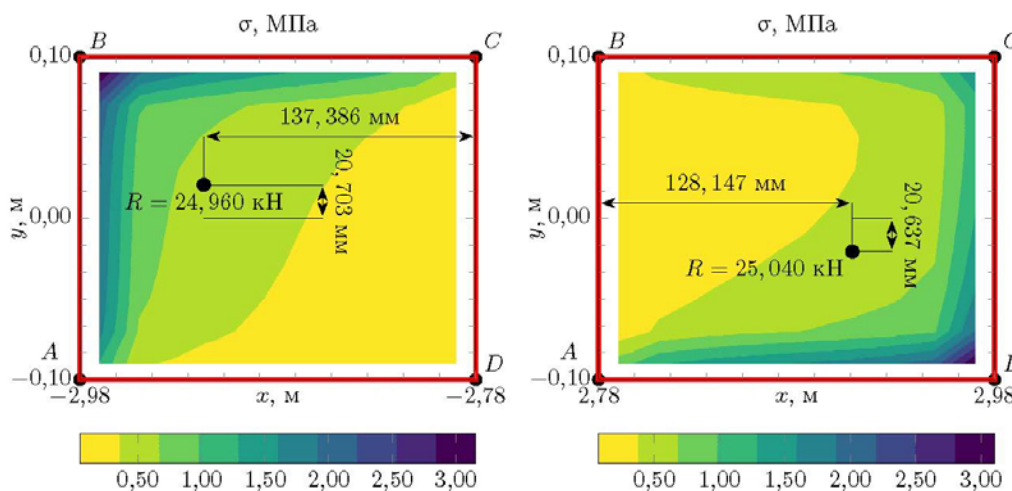


Рис. 7. Изолинии контактных напряжений на левой и правой опорах жесткой балки при ее опирании на 1/8 пространства (слева) и четвертьпространство (справа) одинаковых механических характеристик

Fig. 7. Isolines of contact stresses on left and right support of rigid beam when it is supported on 1/8 space (left) and quarter space (right) of the same mechanical characteristics

Сопоставим зависимости опорных реакций балки при различных соотношениях механических характеристик опорных поверхностей (рис. 8).

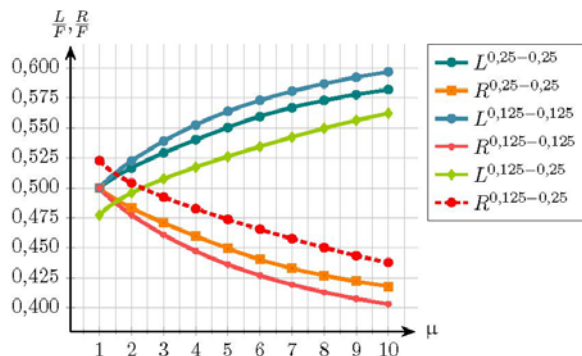


Рис. 8. Зависимость опорных реакций балки от соотношения жесткостей опорных конструкций: $L^{0,25-0,25}$, $R^{0,25-0,25}$ – опорные реакции левой и правой контактных площадок соответственно при опирании на четвертьпространства; $L^{0,125-0,125}$, $R^{0,125-0,125}$ – то же при опирании на края 1/8 пространства; $L^{0,125-0,25}$, $R^{0,125-0,25}$ – опорные реакции левой и правой контактных площадок при опирании слева на 1/8 пространства и справа на четвертьпространство

Fig. 8. Dependence of support reactions of beam on ratio of supporting structure stiffness: $L^{0,25-0,25}$, $R^{0,25-0,25}$ – support reactions of left and right contact pads, respectively, when supported by quarter of space; $L^{0,125-0,125}$, $R^{0,125-0,125}$ – support reactions of left and right contact pads, respectively, when resting on edges of 1/8 space; $L^{0,125-0,25}$, $R^{0,125-0,25}$ – support reactions of left and right contact pads, respectively, when supported on left by 1/8 of space and on right by quarter of space

Представленные на рис. 8 зависимости имеют следующие свойства:

- при увеличении коэффициента (3), что соответствует повышению жесткости левого основания относительно правого, опорная реакция на левой опоре имеет большее значение, чем на правой (т. е. более жесткое основание воспринимает большую нагрузку);

- опирание балки на основания одного вида (четвертьпространство – четвертьпространство, 1/8 пространства – 1/8 пространства) с равными механическими характеристиками вызывает симметричные по величине и точке приложения опорные реакции;

- градиент изменения опорных реакций для второго варианта опирания имеет наибольшее значение по сравнению с градиентами опорных реакций других вариантов;

– для третьего варианта опирания, когда слева 1/8 пространства и справа четвертьпространство, при равных механических характеристиках значения опорных реакций и точек их приложения не совпадают за счет разного характера деформирования упругих оснований. В данном случае графики зависимости опорных реакций левой и правой контактных площадок имеют точку пересечения, что позволяет найти такое значение коэффициента μ , при котором опорные реакции левой и правой контактных площадок будут иметь одинаковые значения.

Поскольку во втором и третьем вариантах опирания по длине балки возникает постоянный крутящий момент, на рис. 9 показаны зависимости крутящего момента от коэффициента μ .

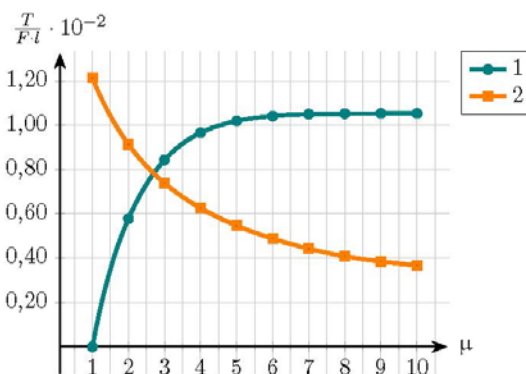


Рис. 9. Зависимость крутящего момента от соотношения жесткостей опорных конструкций: 1 – балка опирается на октанты пространства; 2 – балка слева опирается на октант пространства и справа на четвертьпространство

Fig. 9. Dependence of torque on ratio of supporting structure stiffness: 1 – beam rests on space octants; 2 – beam on left rests on octant of space and on right it rests on quarter space

Из рис. 9 видно, что увеличение коэффициента μ для случая опирания на октанты пространства приводит к повышению крутящего момента и последующему стремлению к некоторому постоянному значению (кривая 1). Для третьего варианта опирания (кривая 2) значение крутящего момента уменьшается с увеличением жесткости более податливого основания (1/8 пространства).

ВЫВОДЫ

1. Установлено, что значения опорных реакций, как равнодействующих контактных на-

пряжений, для свободно опертых балок зависят не только от характера приложения, вида и значений прикладываемых нагрузок, но и от соотношения жесткостей и принятых моделей упругого основания.

2. Показано, что возникающие несимметричные опорные реакции при симметричном приложении внешней нагрузки распределяются таким образом, что большее из них значение воспринимается более жестким основанием.

3. Свободное опирание балки одновременно на $1/8$ пространства и четвертьпространство, а также при опирании с двух сторон на $1/8$ пространства с разными механическими характеристиками вызывает по всей ее длине появление постоянного крутящего момента. Балка, таким образом, работает на поперечный изгиб с кручением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон; под ред. Р. В. Гольдштейн; пер. с англ. В. Э. Наумова, А. А. Спектора. М.: Мир, 1989. 510 с.
3. Пожарский, Д. А. Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения / Д. А. Пожарский. Ростов н/Д.: ООО «ДГТУ-Принт», 2019. 306 с.
4. Маруфий, А. Т. Изгиб бесконечной балки на упругом винклеровском основании с учетом сложных условий ее работы / А. Т. Маруфий, А. А. Эгенбердиева // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. № 19. С. 48–56.
5. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.
6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
7. Босаков, С. В. К новым возможностям способа Б. Н. Жемочкина / С. В. Босаков // Архитектура и строительство Беларуси. 1994. № 1. С. 12–14.
8. Рабинович, И. М. Курс строительной механики стержневых систем: в 2 ч. / И. М. Рабинович. 2-е изд., перераб. М.: Гос. изд-во лит. по стр-ву и арх-ре, 1954. Ч. 2: Статически неопределимые системы. 547 с.
9. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на упругое четвертьпространство / С. В. Босаков // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сб. Минск: Вышэйш. шк., 1988. Вып. 15. С. 100–108.
10. Босаков, С. В. Действие сосредоточенной силы на $1/8$ однородного изотропного пространства / С. В. Босаков, П. Д. Скачэк // Наука и техника. 2020. Т. 19, № 5. С. 372–376. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376>.
11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. 17-е изд. М.: АЙРИС-пресс, 2020. 608 с.

Поступила 12.12.2022

Подписана в печать 23.01.2023

Опубликована онлайн 31.03.2023

REFERENCES

1. Vorovich I. I., Alexandrov V. M., Babeshko V. A. (1974) *Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ. 456 (in Russian).
2. Johnson K. (1985) *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. 452. <https://doi.org/10.1017/cbo9781139171731>.
3. Pozharsky D. A. (2019) *Fundamental Solutions of Elastic Wedge Statics and their Applications*. Rostov on Don: Publishing House of LLC "DGTU-Print". 306 (in Russian).
4. Marufiy A. T., Egenberdieva A. A. (2019) Bending of Endless Beam on Elastic Winkler Foundation, Taking into Account Difficult Conditions of its Operation. *Nauka, Novye Tekhnologii i Innovatsii Kyrgyzstana = Science, New Technologies and Innovations in Kyrgyzstan*, (19), 48–56 (in Russian).
5. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. 2nd ed. Moscow, Gosstroizdat Publ. 240 (in Russian).
6. Bosakov S. V. (2002) Static Calculations on an Elastic Foundation. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
7. Bosakov S. V. (1994) To New Possibilities of B. N. Zhemochkin's Method. *Arkhitektura i Stroitelstvo Belarusi [Architecture and Construction of Belarus]*, (1), 12–14 (in Russian).
8. Rabinovich I. M. (1954) *Course of Structural Mechanics of Bar Systems. Part 2: Statically Indeterminate Systems*. 2nd ed. Moscow, State Publishing House of Literature on Construction and Architecture. 547 (in Russian).
9. Bosakov S. V. (1988) Action of Concentrated Force on Elastic Quarter Space. *Teoreticheskaya i Prikladnaya Mekhanika: Mezhdunar. Nauchno-Tekhn. Sb. [Theoretic and Applied Mechanics: International Scientific and Technical Collection]*. Minsk, Vysheyschaya Shkola Publ., (15), 100–108 (in Russian).
10. Bosakov S. V., Skachok P. D. (2020) Concentrated Force Action on $1/8$ Homogeneous Isotropic Space. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 19 (5), 372–376. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2020-19-5-372-376> (in Russian).
11. Pismenny D. T. (2020) *Abstract of Lectures on Higher Mathematics*. 17th ed. Moscow, AIRIS-Press Publ. 608 (in Russian).

Received: 12.12.2022

Accepted: 23.01.2023

Published online: 31.03.2023