

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-127-130>

УДК 539.3

## Контактная задача для торца упругой полуполосы

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2023  
Belarusian National Technical University, 2023

**Реферат.** В статье рассмотрены контактные задачи для штампа, расположенного на торце упругой полуполосы без трения под действием сосредоточенной силы. Практическим аналогом этой задачи является зона опирания балки или фермы на оголовки колонны прямоугольного сечения, так как опорные части балок или колонн обладают большой изгибной жесткостью. Расчет выполняется в два этапа. На первом вариационно-разностным методом решается задача о действии произвольно приложенной сосредоточенной силы на торец упругой полуполосы. Решение этой задачи позволяет составить квадратную матрицу вертикальных перемещений точек торца полуполосы от действия единичной силы. На втором этапе способом Жемочкина решается контактная задача для штампа, произвольно расположенного на торце упругой полуполосы. Коэффициенты канонических уравнений метода сил в способе Жемочкина находятся на основании полученной ранее матрицы вертикальных перемещений точек торца упругой полуполосы. Рассмотрены три задачи для штампов, расположенных на торце упругой полуполосы. Приводятся графики распределения контактных напряжений, эпюры изгибающих моментов и определяется положение силы, вызывающей поступательное перемещение штампа, находящегося на краю полуполосы. Отмечается подобие полученных результатов и результатов для штампа, расположенного на упругой полуплоскости.

**Ключевые слова:** полуполоса, контактная задача, штамп, способ Жемочкина

**Для цитирования:** Босаков, С. В. Контактная задача для торца упругой полуполосы / С. В. Босаков // *Наука и техника*. 2023. Т. 22, № 1. С. 127–130. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-127-130>

## Contact Problem for the End of Elastic Half-Strip

S. V. Bosakov<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The paper considers contact problems for a stamp located at the end of an elastic half-strip without friction under the action of a concentrated force. A practical analogue of this problem is the support zone of a beam or truss on the head of a rectangular column, since the supporting parts of beams or columns have high bending rigidity. The calculation is performed in two stages. At the first stage, the variational-difference method solves the problem of the action of an arbitrarily applied concentrated force on the end of an elastic half-strip. The solution of this problem makes it possible to compose a square matrix of vertical displacements of the points of the end of the half-strip from the action of a single force. At the second stage, the Zhemochkin method solves the contact problem for a stamp arbitrarily located at the end of the elastic half-strip. The coefficients of the canonical equations of the forces method in the Zhemochkin method are based on the previously obtained matrix of vertical displacements of the end points of the elastic half-strip. Three problems for stamps located at the end of an elastic half-strip are considered in the paper. Graphs of the distribution of contact stresses, a plot of bending moments are given and the position of the force causing the translational movement of the stamp located on the edge of the half-strip is determined. The similarity of the obtained is noted with the results for a stamp located on an elastic half-plane.

**Keywords:** half-strip, contact problem, stamp, Zhemochkin method

**For citation:** Bosakov S. V. (2023) Contact Problem for the End of Elastic Half-Strip. *Science and Technique*. 22 (2), 127–130. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2023-22-2-127-130> (in Russian)

---

### Адрес для переписки

Босаков Сергей Викторович  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 65,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 293-93-04  
sevibo@yahoo.com

---

### Address for correspondence

Bosakov Siarhei V.  
Belarusian National Technical University  
65, Nezavisimosti Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 293-93-04  
sevibo@yahoo.com

## Введение

Модель упругого основания в виде упругой полосы является одной из моделей грунтового основания, закрепленных в отечественных нормативных документах. Методы расчета балочных плит на упругой полосе в разное время разрабатывали О. Я. Шехтер, К. Е. Егоров, на которых ссылаются Горбунов-Посадов [1], Г. Я. Попов [2], И. И. Воронович с соавторами и другие [3–5]. Контактные задачи для упругой полуполосы исследованы гораздо меньше. Однако упругая полуполоса является одной из расчетных моделей колонны, широко применяемой в современном строительстве, и совершенствование методов ее расчета – необходимая инженерная задача.

В статье с использованием вариационно-разностного метода построена матрица вертикальных перемещений точек торца полуполосы от сосредоточенной силы. На основании этих перемещений способом Жемочкина [6] без учета трения в контактной зоне решены задачи для штампа разных размеров, прижимаемого к торцу полуполосы. Проведено сопоставление полученных показателей с ранее опубликованными результатами других авторов.

## Основная часть

Рассмотрим упругую полуполосу, на торец которой действует вертикальная сосредоточенная сила (рис. 1). Разобьем полуполосу прямоугольной сеткой с  $nx$  узлами по горизонтали и  $ny$  узлами по вертикали (рис. 2).

Используя конечные разности, выразим линейные и угловую деформации в центре каждого прямоугольника через узловые перемещения вершин прямоугольника по методике О. В. Козуновой [7]. Составим функционал полной энергии [8] полуполосы и действующей на нее силы в точке  $m$  согласно формуле (1).

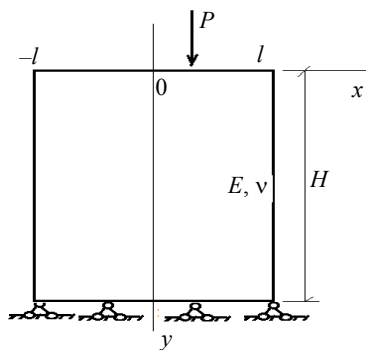


Рис. 1. Упругая полуполоса, на торец которой действует сосредоточенная сила

Fig. 1. Elastic half-strip, on the end of which concentrated force acts

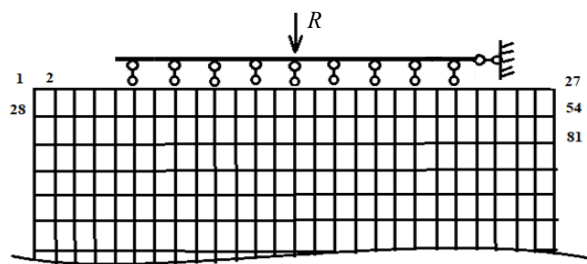


Рис. 2. Принятая прямоугольная сетка на полуполосе с  $nx = 27$

Fig. 2. Adopted rectangular grid on the half-strip with  $nx = 27$

Продифференцируем функционал по каждому из узловых перемещений. Получаем систему линейных алгебраических уравнений, решением которой являются узловые перемещения прямоугольной сетки:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2} \sum_{i=1}^{ny} \left( \sum_{k=1}^{nx-1} \left( \frac{1}{1 - \nu_{k+(i-1)(nx-1)^2}} \times \right. \right. \\ & \times \left( \left( \frac{1}{2\Delta x} (U_{k+1+(i-1)nx} + U_{k+1+inx} - U_{k+(i-1)nx} - U_{k+inx}) \right)^2 + \right. \\ & + \left( \frac{1}{2\Delta y} (V_{k+1+inx} + V_{k+inx} - V_{k+1+(i-1)nx} - V_{k+(i-1)nx}) \right)^2 + \\ & + 2\nu_{k+(i-1)(nx-1)} \times \\ & \times \left( \frac{1}{2\Delta x} (U_{k+1+(i-1)nx} + U_{k+1+inx} - U_{k+(i-1)nx} - U_{k+inx}) \times \right. \\ & \times \left. \frac{1}{2\Delta y} (V_{k+1+inx} + V_{k+inx} - V_{k+1+(i-1)nx} - V_{k+(i-1)nx}) \right) + \\ & + \left. \frac{1}{2(1 + \nu_{k+(i-1)(nx-1)})} \times \right. \\ & \times \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\Delta x} (V_{k+1+(i-1)nx} + V_{k+1+inx} - V_{k+(i-1)nx} - V_{k+inx}) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{1}{2\Delta y} (U_{k+1+inx} + U_{k+inx} - U_{k+1+(i-1)nx} - U_{k+(i-1)nx}) \right)^2 \right) \times \\ & \times \Delta x \Delta y \Big) - PV_m, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $U, V$  – узловые перемещения по осям  $x$  и  $y$ .

Таким образом, сформирована матрица вертикальных перемещений точек торца полуполосы (рис. 2), которая приведена в табл. 1 для точек 2, 4, 6, ..., 26 при  $nx = 27$  и  $\nu = 0,167$  при  $H = 5l$ .

На основании данных табл. 1 можно способом Жемочкина решать контактные задачи для балок различной длины, лежащих на торце полуполосы и находящихся под действием произвольной вертикальной нагрузки (рис. 2).

Таблица 1

Матрица вертикальных перемещений точек торца полуполосы от сосредоточенной силы  $P$  в долях от  $P/E$  при  $H = 5l$

Matrix of vertical displacements of points of half-strip end from concentrated force  $P$  in shares of  $P/E$  at  $H = 5l$

|         |         |         |         |        |        |        |        |        |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 15.3976 | 9.5421  | 7.0382  | 5.3372  | 4.0149 | 2.9124 | 1.9439 | 1.0567 | 0.2151 | -0.6069 | -1.4301 | -2.2714 | -3.1395 |
| 9.5421  | 11.2104 | 7.0332  | 5.2385  | 3.9645 | 2.9426 | 2.0686 | 1.2846 | 0.5535 | -0.1503 | -0.8466 | -1.5506 | -2.2714 |
| 7.0382  | 7.0332  | 9.388   | 5.6256  | 4.1285 | 3.0866 | 2.2553 | 1.545  | 0.9062 | 0.3082  | -0.2707 | -0.8466 | -1.4301 |
| 5.3372  | 5.2385  | 5.6256  | 8.2658  | 4.7311 | 3.4249 | 2.5488 | 1.8662 | 1.2926 | 0.7827  | 0.3082  | -0.1503 | -0.6069 |
| 4.0149  | 3.9645  | 4.1285  | 4.7311  | 7.5569 | 4.1865 | 3.0293 | 2.2915 | 1.7399 | 1.2926  | 0.9062  | 0.5535  | 0.2151  |
| 2.9124  | 2.9426  | 3.0866  | 3.4249  | 4.1865 | 7.1592 | 3.9267 | 2.9013 | 2.2915 | 1.8662  | 1.545   | 1.2846  | 1.0567  |
| 1.9439  | 2.0686  | 2.2553  | 2.5488  | 3.0293 | 3.9267 | 7.0306 | 3.9267 | 3.0293 | 2.5488  | 2.2553  | 2.0686  | 1.9439  |
| 1.0567  | 1.2846  | 1.545   | 1.8662  | 2.2915 | 2.9013 | 3.9267 | 7.1592 | 4.1865 | 3.4249  | 3.0866  | 2.9426  | 2.9124  |
| 0.2151  | 0.5535  | 0.9062  | 1.2926  | 1.7399 | 2.2915 | 3.0293 | 4.1865 | 7.5569 | 4.7311  | 4.1285  | 3.9645  | 4.0149  |
| -0.6069 | -0.1503 | 0.3082  | 0.7827  | 1.2926 | 1.8662 | 2.5488 | 3.4249 | 4.7311 | 8.2658  | 5.6256  | 5.2385  | 5.3372  |
| -1.4301 | -0.8466 | -0.2707 | 0.3082  | 0.9062 | 1.545  | 2.2553 | 3.0866 | 4.1285 | 5.6256  | 9.388   | 7.0332  | 7.0382  |
| -2.2714 | -1.5506 | -0.8466 | -0.1503 | 0.5535 | 1.2846 | 2.0686 | 2.9426 | 3.9645 | 5.2385  | 7.0332  | 11.2104 | 9.5421  |
| -3.1395 | -2.2714 | -1.4301 | -0.6069 | 0.2151 | 1.0567 | 1.9439 | 2.9124 | 4.0149 | 5.3372  | 7.0382  | 9.5421  | 15.3976 |

Для штампа длиной  $2l$  под действием симметрично приложенной силы получается чисто сопряженное решение, что отмечено в [9].

Система разрешающих уравнений способа Жемочкина для расчета симметрично расположенного и нагруженного штампа длиной  $18/13l$  на торце полуполосы (рис. 2) имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{1,1}X_1 + \dots + \delta_{1,9}X_9 + u_0 = 0; \\ \dots \\ \delta_{9,1}X_1 + \dots + \delta_{9,9}X_9 + u_0 = 0; \\ -X_1 - \dots - X_9 + R = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\delta_{i,k}$  – взаимное перемещение концов разрезанной связи  $i$  между штампом и торцом полуполосы от действия  $X_k = 1$ , определяется по табл. 1;  $X_i$  – усилие в связи Жемочкина с номером  $i$ ;  $u_0$  – вертикальное перемещение введенного защемления на штампе в основной системе смешанного метода строительной механики;  $R$  – равнодействующая внешних сил, действующих на штамп.

После решения системы (2) по усилиям в связях Жемочкина определяются контактные

напряжения и внутренние усилия в штампе. На рис. 3 приведены эпюры контактных напряжений и изгибающих моментов для симметрично расположенного и нагруженного штампа длиной  $18/13l$ .

Отметим, что приведенные на рис. 3 графики почти совпадают с подобными графиками для упругой полуплоскости [1].

Решим задачу о штампе, расположенном на краю торца полуполосы. Подобная задача возникает при одностороннем опирании балки или фермы на колонну, так как опорные части балки или фермы обладают значительной изгибной жесткостью. На рис. 4 показан график распределения контактных напряжений под штампом длиной  $5/13l$  при его поступательном вертикальном перемещении. Расстояние от края штампа до точки приложения силы, вызывающей поступательное перемещение штампа, составляет  $0,236l$  (рис. 5). При сопоставлении численных результатов этого примера с теоретическими данными для упругой четвертьполуплоскости, опубликованными в [3, 10], наблюдается качественное и количественное подобие.

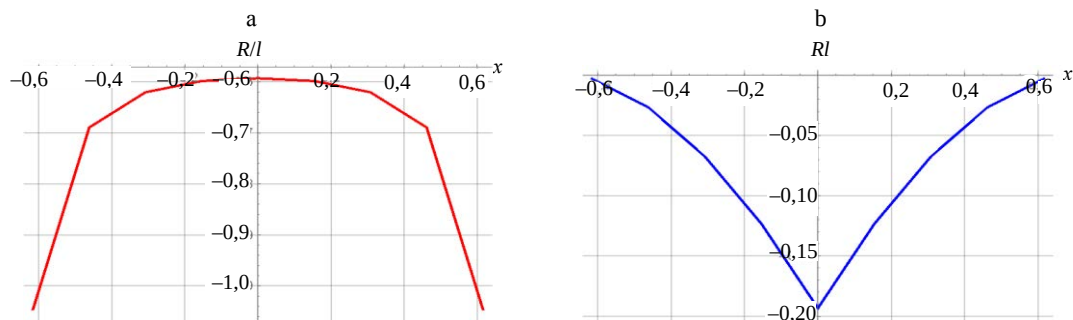


Рис. 3. Распределение контактных напряжений (а) и изгибающих моментов (б) в штампе длиной  $18/13l$ , расположенном на торце полуполосы

Fig. 3. Distribution of contact stresses (a) and bending moments (b) in a stamp  $18/13l$  long, located at the end of the half-strip

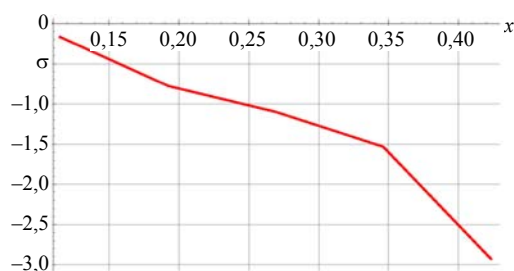


Рис. 4. Распределение контактных напряжений под штампом длиной  $5/13l$ , расположенным на краю торца полуполосы

Fig. 4. Contact stress distribution under a stamp  $5/13l$  long, located at the end of the half-strip

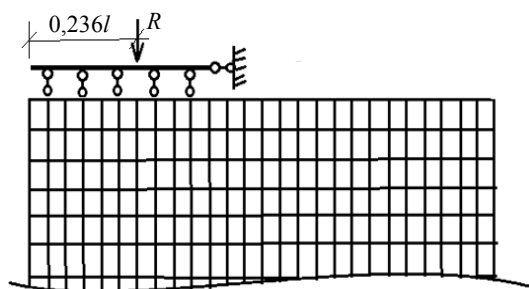


Рис. 5. Положение штампа длиной  $5/13l$ , расположенного на краю торца полуполосы

Fig. 5. Stamp position  $5/13l$  long, located on the edge of the end of the half-strip

## ВЫВОД

Матрица, приведенная в табл. 1, позволяет решать разнообразные контактные задачи для балок различной изгибной жесткости, расположенных на торце полуполосы и находящихся под действием произвольной внешней нагрузки с использованием способа Жемочкина. Приведены результаты расчета трех примеров, подтверждающие это положение. Используя зависимость «момент – кривизна» [7], также можно выполнить нелинейный расчет балки, расположенной на торце полуполосы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
2. Попов, Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. Киев, Одесса: Вища шк., 1982. 168 с.
3. Ворович, И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Александров, В. М. Контактные задачи для упругого слоя малой толщины / В. М. Александров, И. И. Ворович // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 2. С. 350–351.
5. Александров, В. М. Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу / В. М. Александров,

В. А. Кучеров // Механика твердого тела. 1968. № 4. С. 110–123.

6. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. М.: Стройиздат, 1962. 239 с.
7. Козунова, О. В. Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом / О. В. Козунова. Минск, 2017. 168 с.
8. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
9. Босаков, С. В. Контактная задача для упругой полуполосы / С. В. Босаков // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1997. № 4. С. 119–121.
10. Босаков, С. В. Решение контактной задачи для узла опирания балочной шарнирно опертой плиты / С. В. Босаков, П. Д. Скачек // Наука и техника. 2019. Т. 18, № 4. С. 274–283. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-4-274-283>.

Поступила 09.08.2022

Подписана в печать 11.10.2022

Опубликована онлайн 31.01.2023

## REFERENCES

1. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Basis*. Moscow, Stroyizdat Publ. 679 (in Russian).
2. Popov G. Ya. (1982) *Contact Problems for a Linearly Deformable Foundation*. Kiev, Odessa, Vishcha Shkola Publ. 168 (in Russian).
3. Vorovich I. I., Alexandrov V. M., Babeshko V. A. (1974) *Non-Classical Mixed Problems of Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ. 456 (in Russian).
4. Alexandrov V. M., Vorovich I. I. (1964) Contact Problems for an Elastic Layer of Small Thickness. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 28 (2), 425–427. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(64\)90174-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(64)90174-1).
5. Alexandrov V. M., Kuchеров V. A. (1968) Some Problems on the Action of Two Stamps on an Elastic Strip. *Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids*, (4), 110–123 (in Russian).
6. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Stroyizdat Publ. 239 (in Russian).
7. Kozunova O. V. (2017) *Static Analysis of the System “Beam Plate – Non-Linear-Elastic Inhomogeneous Foundation” by the Variation-Difference Method*. Minsk. 168 (in Russian).
8. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
9. Bosakov S. V. (1997) Contact Problem for an Elastic Half-Strip. *Vestsi Natsyynal'nai Akademii Navuk Belarusi. Seryya Fizika-Tekhnichnuch Navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*, (4), 119–121 (in Russian).
10. Bosakov S. V., Skachek P. D. (2019) Solution of Contact Problem for Supporting Node of Beam Hinged Plate. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 18 (4), 274–283. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-4-274-283>.

Received: 09.08.2022

Accepted: 11.10.2022

Published online: 31.01.2023