

## Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании

### Часть 2. Результаты расчета

Канд. техн. наук, доц. О. В. Козунова<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022  
Belarusian National Technical University, 2022

**Реферат.** Предлагаемая статья является продолжением представленной ранее публикации автора в развитие теории и методики расчета гибких ортотропных железобетонных плит на упругом основании с учетом физической нелинейности материала плит. В статье приводятся численные результаты упругого и нелинейного расчетов изолированной прямоугольной ортотропной плиты на упругом основании (под действием внешней статической нагрузки с учетом собственного веса железобетонной плиты), моделируемом упругим однородным изотропным слоем, жестко соединенным с недеформируемым основанием. В расчете исследуемой конструкции учитывалось изменение ее жесткости в момент трещинообразования и дальнейшего активного раскрытия трещин. Расчет гибкой ортотропной плиты на упругом основании в нелинейной постановке выполнялся итерационным путем методом Б. Н. Жемочкина. Для определения коэффициентов канонических уравнений и свободных членов был использован смешанный метод строительной механики. На первой итерации железобетонная плита рассчитывалась как линейно-упругая, однородная и ортотропная, на последующих – как линейно-упругая, неоднородная и ортотропная на каждом участке Жемочкина. Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы определялись методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении, которое автор предложил впервые в части 1 статьи. Алгоритм решения реализован при помощи компьютерной программы Wolfram Mathematica 11.3. Приведены численные и графические результаты упругого и нелинейного расчетов осадок дорожной железобетонной плиты, контактных напряжений и эпюры изгибающих моментов в плите.

**Ключевые слова:** гибкая ортотропная железобетонная плита, метод Жемочкина, упругий слой, нелинейный расчет, зависимость «жесткость – кривизна», метод Ритца, трещинообразование, дорожная железобетонная плита, осадки, контактные напряжения, изгибающие моменты

**Для цитирования:** Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 2: Результаты расчета / О. В. Козунова // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 4. С. 290–296. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-4-290-296>

## Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base

### Part 2. Calculation Results

O. V. Kozunova<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The proposed paper is a continuation of the author's theoretical work presented earlier in the development of the theory and methodology for calculating flexible orthotropic reinforced concrete plates on an elastic foundation, taking into account the physical nonlinearity of the plate material. The paper presents numerical results of elastic and nonlinear calculations of an isolated rectangular orthotropic plate on an elastic foundation, modeled by an elastic homogeneous isotropic layer

---

#### Адрес для переписки

Козунова Оксана Васильевна  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 65,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 293-93-04  
kozunova@gmail.com

#### Address for correspondence

Kozunova Oksana V.  
Belarusian National Technical University  
65, Nezavisimosty Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 293-93-04  
kozunova@gmail.com

rigidly connected to a non-deformable foundation under the action of an external static load, taking into account the own weight of the reinforced concrete plate. The change in its stiffness at the time of cracking and further active opening of cracks has been taken into account in the calculation of the structure under study. The nonlinear calculation of the studied structure takes into account the change in its rigidity at the time of cracking and further active crack opening. The calculation of a flexible orthotropic plate on an elastic foundation in a nonlinear formulation is performed iteratively by the method of B. N. Zhemochkin. A mixed method of structural mechanics has been used to determine the coefficients of canonical equations and free terms. At the first iteration, the reinforced concrete plate is calculated as linearly elastic, homogeneous, and orthotropic; at the subsequent ones – as linearly elastic, inhomogeneous, and orthotropic at each Zhemochkin site. Camber plates with a clamped normal in the primary system of mixed method due to the action of a concentrated force are determined by the Ritz method when the deflections were represented as a power polynomial in a new original expression that has been proposed for the first time in the Part 1 of the paper. The solution algorithm has been implemented using the Wolfram Mathematica 11.3 computer program. Numerical and graphical results of elastic and non-linear calculations of sediment concrete road plate, contact stresses and bending moment diagrams on the plate are presented in the paper.

**Keywords:** flexible orthotropic reinforced concrete plate, Zhemochkin's method, elastic layer, nonlinear calculation, “stiffness – curvature” dependence, Ritz method, cracking, reinforced concrete road plate, settlements, contact stresses, bending moments

**For citation:** Kozunova O. V. (2022) Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. *Science and Technique*. 21 (4), 290–296. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-4-290-296> (in Russian)

### Общая постановка задач расчета ортотропных плит на упругом основании и алгоритм их расчета с учетом трещинообразования

В предлагаемой статье, являющейся продолжением представленной ранее публикации автора [1] в развитие теории и методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании с учетом физической нелинейности материала плит, рассматривается прямоугольная железобетонная плита под действием статической поверхностной нагрузки ([1], рис. 4). При моделировании основание заменялось упругим изотропным слоем, соединенным жестко с несжимаемым слоем. Принимались следующие гипотезы и допущения:

- в контактной зоне отсутствуют касательные напряжения;
- для гибкой плиты справедливы гипотезы технической теории изгиба [2].

Расчет прямоугольной ортотропной плиты автор предлагает вести смешанным методом строительной механики [3] с использованием способа Б. Н. Жемочкина [4], приняв за неизвестные силы в вертикальных связях Жемочкина, а также два угловых и линейное перемещение введенного защемления нормали в центре плиты. Для описания контакта плиты с упругим основанием после того, как плита разбивается на одинаковые прямоугольные участки размерами  $\Delta x \times \Delta y$ , в центре каждого участка размещается вертикальная связь. Считается, что усилие в связи вызывает равномерное распределе-

ние контактных напряжений при определении перемещений центра участка.

Для сформулированной в [1] задачи в нелинейной постановке, т. е. с учетом трещинообразования в железобетонной плите со слабо выраженной ортотропией, предлагается итерационный алгоритм способа Б. Н. Жемочкина с использованием зависимости «жесткость – кривизна» [5]. На первой итерации плита рассчитывается как линейно-упругая, ортотропная и однородная [1], на последующих – как линейно-упругая, ортотропная и неоднородная на каждом участке Жемочкина. Вертикальные перемещения поверхности упругого слоя от сосредоточенной силы  $P$  определены из соотношения, приведенного в статье С. В. Босакова [6], и представлены в теоретической части данной публикации. Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы ([1], рис. 5) определены методом Ритца [7] при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении, которое впервые предложено в [1].

Функционал полной энергии гибкой железобетонной пластинки с защемленной нормалью определен как квадратичная функция коэффициентов  $A_{i,k}$  [1], что позволяет из системы линейных алгебраических уравнений найти эти коэффициенты и таким образом вычислить прогибы плиты с защемленной нормалью. Так формируется система уравнений способа Жемочкина на каждой итерации.

### Последовательность нелинейного расчета в соответствии с требованиями нормативных документов

Значения нелинейных жесткостей железобетонных элементов следует устанавливать в зависимости от стадии расчета, требований к расчету и характера напряженно-деформированного состояния элемента. На первой стадии расчета конструктивной системы, характеризуемой тем, что армирование железобетонных элементов неизвестно, нелинейную работу элементов рекомендуется учитывать путем понижения их жесткостей с помощью условных обобщенных коэффициентов ([8], п. 6.2.5). На последующих стадиях расчета конструктивной системы, когда известно армирование железобетонных элементов, в расчет следует вводить уточненные значения жесткостей элементов, определяемые с учетом армирования, образования трещин и развития неупругих деформаций в бетоне и арматуре согласно указаниям действующих нормативов по проектированию железобетонных конструкций ([9], главы 5.3, 5.4, п. 5.5.3).

В [10] моделирование железобетонной плиты в линейной постановке выполняется для решения задач, характеризующих работу материала такой несущей конструкции до достижения предела упругости (величина напряжений, при которых не возникает остаточных деформаций), а также в качестве первой стадии расчета с целью получения данных для дальнейшего нелинейного расчета. Неупругую работу (физическую нелинейность) рекомендуется учитывать косвенно с помощью пониженных значений модуля упругости материалов в соответствии с СП 52-103-2007 [8]. Модуль упругости для конечного элемента (КЭ) плит принимается пониженным с коэффициентом 0,3 (0,2), учитывающим ползучесть бетона и наличие трещин. Следует отметить, что в модуле упругости при построении точки 3 (рис. 1) на диаграммах «момент – кривизна», «жесткость – кривизна» по В. И. Соломину [5] для элемента прямоугольного сечения из бетона класса С20/25 (В25) использовался понижающий коэффициент 0,3, точки 4 – 0,2, что отражено на рис. 1.

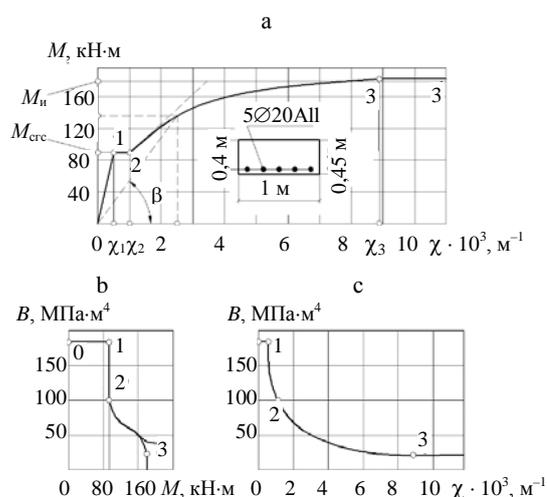


Рис. 1. Зависимости кривизны элемента балки (а) и коэффициента жесткости (б) от момента, жесткости от кривизны (с)

Fig. 1. Dependences of curvature of beam element (a) and stiffness coefficient (b) on the moment, of stiffness on curvature (c)

### Построение диаграммы «жесткость – кривизна» для плиты и ее упругий расчет

При нахождении переменной (секущей) жесткости плиты для участка Жемочкина на каждой итерации используется зависимость «жесткость – кривизна» (рис. 2) в направлениях  $X$ ,  $Y$ . Зависимость «жесткость – кривизна», согласно [5], построена по изложенной выше методике, отраженной в [8–10], с использованием приведенной цилиндрической жесткости плиты по направлению осей ортотропии.

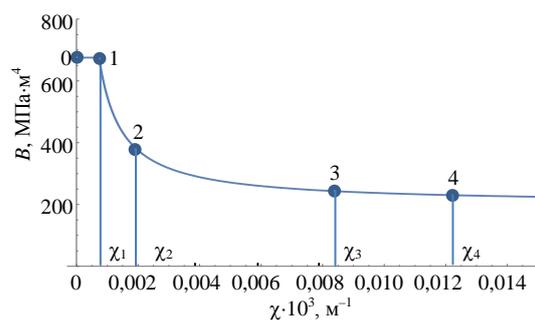


Рис. 2. Зависимость «жесткость – кривизна» по [5]

Fig. 2. Dependence “stiffness – curvature” according to [5]

Упругий расчет выполняли для дорожной железобетонной плиты размерами  $4 \times 3 \times 0,14$  м из тяжелого бетона класса С20/25 с упругими характеристиками: модуль деформации бетона  $E_6 = 29,05$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu_6 = 0,17$ . Плита находилась на упругом изо-

тропном слое мощностью (толщиной)  $H = 7$  м, жестко соединенном с недеформируемым основанием. Параметры упругого слоя:  $E_0 = 20$  кПа,  $\nu_0 = 0,33$ . Внешняя нагрузка от колеса  $Q = 65$  кН распределялась по площади  $0,4 \times 0,4$  м и была приложена в центре плиты. В расчете учитывался собственный вес плиты  $q = 3,5$  кН/м<sup>2</sup>.

Начальная цилиндрическая жесткость ортотропной плиты:

– в плоскости  $YOZ$

$$D_x^{(0)} = B_x^{(0)} = EJ_x^{(0)} = \frac{E_0 \cdot 0,14^3}{12(1-\nu_0^2)} = \frac{29,05 \cdot 10^6 \cdot 0,14^3}{12(1-0,17^2)} = 6840,46 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

– в плоскости  $XOZ$

$$D_y^{(0)} = B_y^{(0)} = EJ_y^{(0)} = 1,15EJ_x^{(0)} = 1,15 \cdot 6840,46 = 7866,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Начальная жесткость кручения гибкой плиты, формула которой приведена в [1], после вычислений получается

$$D_k^{(0)} = \frac{\nu_x + \nu_y}{2} \sqrt{D_x^{(0)} D_y^{(0)}} = \frac{0,17 + 0,17}{2} \sqrt{6840,46 \cdot 7866,56} = 1247,05 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для анализа параметров напряженно-деформированного состояния по формуле из [11] определяли показатель гибкости изолированной плиты конечных размеров  $a$  и  $b$

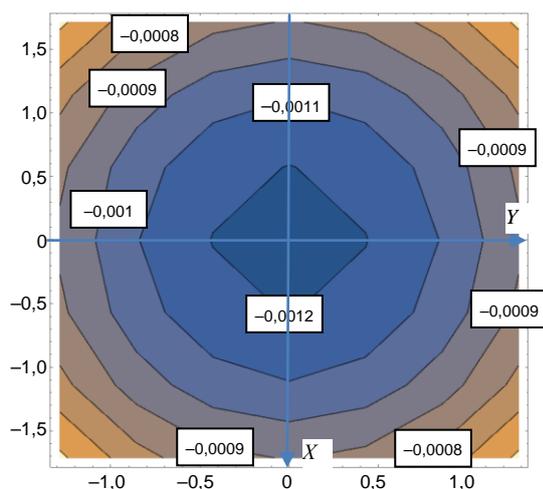


Рис. 3. Эпюры осадок, м, дорожной железобетонной плиты (упругий расчет)

Fig. 3. Diagrams of precipitation, m, of road reinforced concrete slab (elastic calculation)

$$\beta = \frac{\pi E_0 a^3}{(1-\nu_0^2) EJ_0}, \quad (1)$$

где  $E_0$ ,  $\nu_0$  – упругие параметры изотропного слоя;  $EJ_0$  – цилиндрическая жесткость плиты.

После подстановки параметров плиты и упругого основания в (1) получили следующее значение показателя гибкости, которое свидетельствует о том, что в данной задаче рассчитываются именно гибкие плиты:

$$\beta = \frac{3,14 \cdot 20 \cdot 10^6 \cdot 1,5^3}{(1-0,33^2) 6840,46 \cdot 10^3} = 34,789.$$

На рис. 3, 4 в изолиниях для демонстративности построены: эпюры осадок дорожной железобетонной плиты по методике расчета ортотропных плит, приведенной выше, и контактных напряжений в зоне взаимодействия плиты с упругим основанием, моделируемым упругим изотропным слоем. Наибольшие значения получены в центре тяжести плиты, где приложена сосредоточенная сила от колеса машины: осадки плиты  $w_{\max} = 0,0012558$  м; контактные напряжения  $P_{\max} = 10,38$  кПа.

На рис. 5, 6 построены эпюры изгибающих моментов  $M_y$ ,  $M_x$  (упругий расчет) в изолиниях, которые симметричны относительно осей изгиба и в полной мере подтверждают наличие геометрической ортотропии в дорожных плитах.

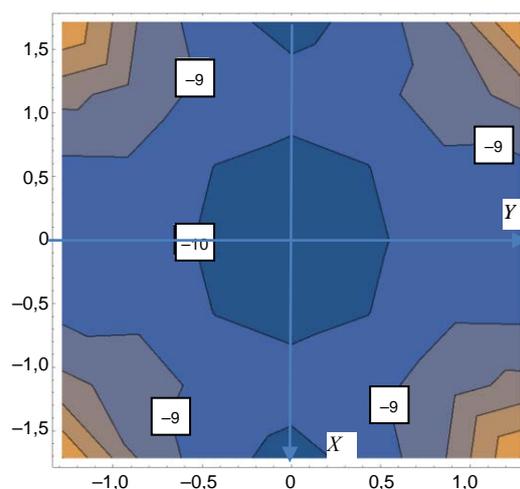


Рис. 4. Эпюры контактных напряжений, кПа (упругий расчет)

Fig. 4. Diagrams of contact voltages, kPa (elastic calculation)

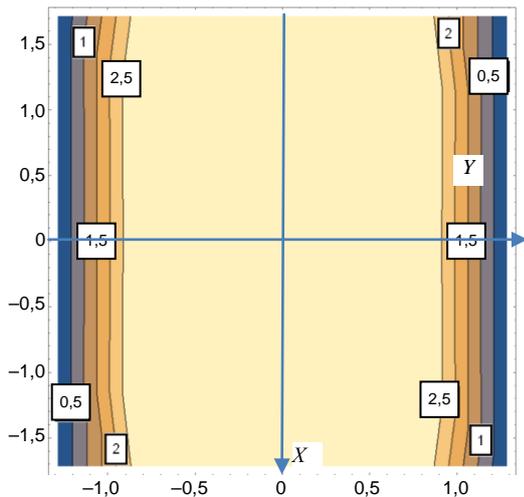


Рис. 5. Эпюры изгибающих моментов  $M_y$ , кН, железобетонной плиты (упругий расчет)

Fig. 5. Diagrams of bending moments  $M_y$ , кН, of reinforced concrete slab (elastic calculation)

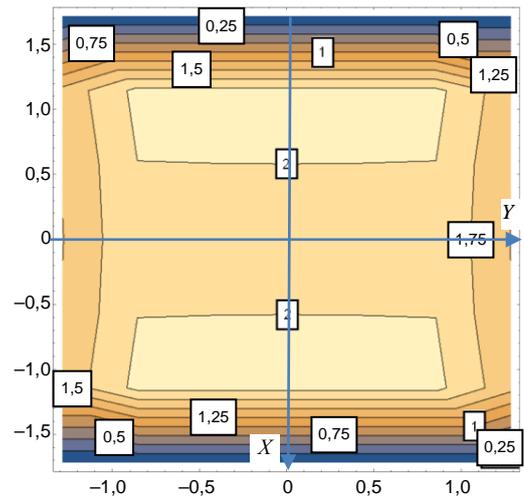


Рис. 6. Эпюры изгибающих моментов  $M_x$ , кН, железобетонной плиты (упругий расчет)

Fig. 6. Diagrams of bending moments  $M_x$ , кН, of reinforced concrete slab (elastic calculation)

**Нелинейный расчет**

На рис. 7, 8 приведены результаты нелинейного расчета (3-я итерация): эпюры осадок дорожной железобетонной плиты и контактных напряжений. Наибольшие значения при упругом расчете получены в центре тяжести плиты, где приложена сосредоточенная сила от колеса машины: осадки плиты  $w_{max} = 0,0012582$  м; контактные напряжения  $P_{max} = 10,43$  кПа.

На рис. 9, 10 построены эпюры изгибающих моментов  $M_y$ ,  $M_x$  (3-я итерация) в изолиниях,

которые почти симметричны относительно осей изгиба.

Сопоставление результатов упругого и нелинейного расчетов (3-я итерация) проводилось для осадок ортотропной плиты и контактных напряжений в зоне взаимодействия плиты с упругим основанием. На рис. 11 показано графическое сравнение эпюр осадок железобетонной плиты между упругим и нелинейным решением (3-я итерация), которое свидетельствует о практически полном совпадении результатов при незначительном их увеличении с учетом переменной кривизны и жесткости.

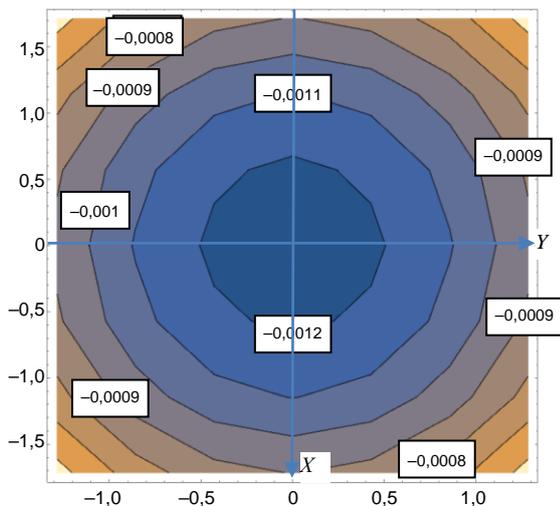


Рис. 7. Эпюры осадок, м, дорожной железобетонной плиты (3-я итерация)

Fig. 7. Diagrams of precipitation, m, of road reinforced concrete slab (3<sup>rd</sup> iteration)

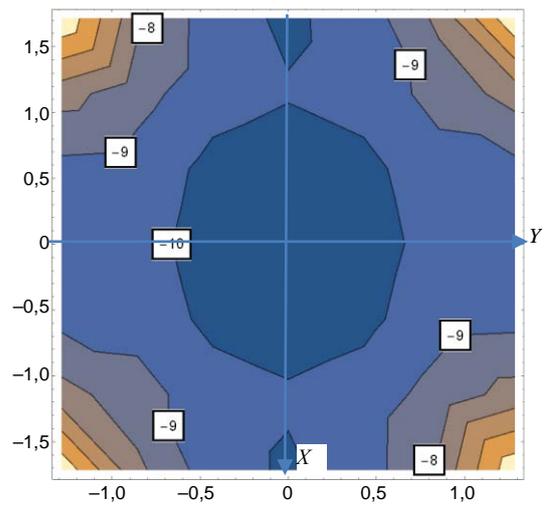


Рис. 8. Эпюры контактных напряжений, кПа (3-я итерация)

Fig. 8. Diagrams of contact voltages, кПа (3<sup>rd</sup> iteration)

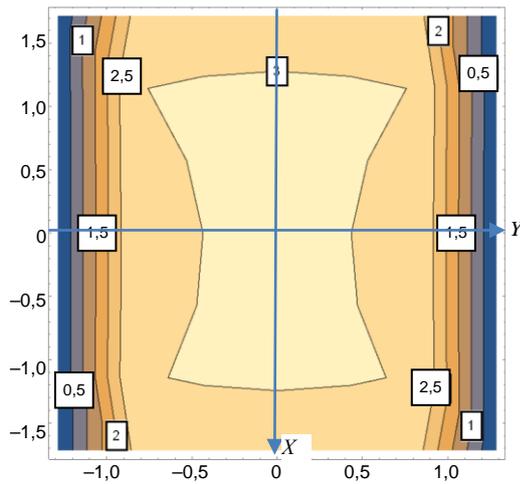


Рис. 9. Эпюры изгибающих моментов железобетонной плиты  $M_y$ , кН (3-я итерация)

Fig. 9. Diagrams of bending moments of reinforced concrete slab  $M_y$ , kN (3<sup>rd</sup> iteration)

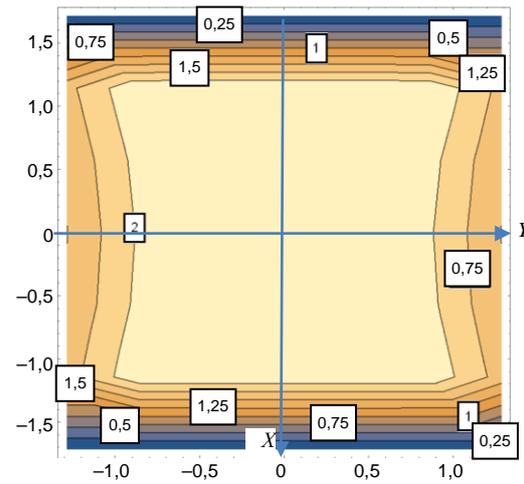


Рис. 10. Эпюры моментов железобетонной плиты  $M_x$ , кН (3-я итерация)

Fig. 10. Diagrams of moments of reinforced concrete slab  $M_x$ , kN (3<sup>rd</sup> iteration)

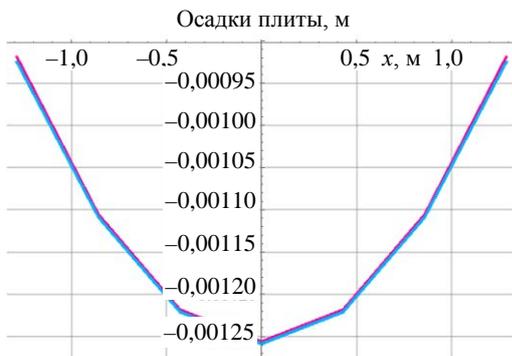


Рис. 11. Осадки дорожной железобетонной плиты: красный цвет – упругое решение; синий цвет – 3-я итерация

Fig. 11. Precipitation of road reinforced concrete slab: red color – elastic solution; blue color – 3<sup>rd</sup> iteration

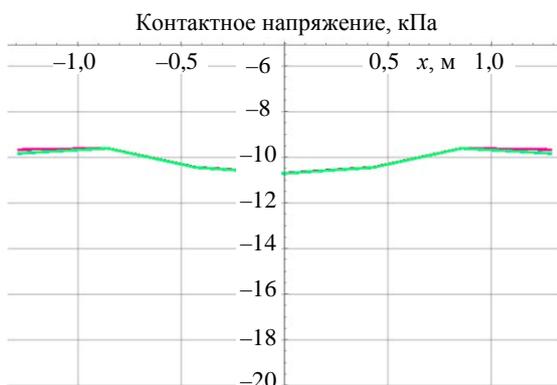


Рис. 12. Контактные напряжения: красный цвет – упругое решение; зеленый цвет – 3-я итерация

Fig. 12. Contact stresses: red color – elastic solution; green color – 3<sup>rd</sup> iteration

На рис. 12 приведено графическое сравнение эпюр контактных напряжений в зоне взаимодействия между упругим и нелинейным решением (3-я итерация), которое свидетельствует о практически полном совпадении результатов в центре плиты и небольшом (до 3 %) расхождении к краям плиты при учете переменной кривизны и жесткости.

### ВЫВОДЫ

1. Предложена в теоретическом развитии и апробирована численно методика нелинейного итерационного расчета методом Б. Н. Жемочкина железобетонной (гибкой) ортотропной плиты на упругом основании, моделируемом упругим слоем конечной толщины. В отличие от традиционных подходов в нелинейных расчетах, основанных на применении зависимости «момент – кривизна», автор статьи использовала зависимость «жесткость – кривизна», что сокращает объем вычислений. Исследования проводились в компьютерной программе Wolfram Mathematica 11.3. Впервые предложено представление прогибов плиты с заземленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы определять методом Рунге в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении.

2. Проведенный анализ показал, что учитывать нелинейные свойства железобетона через

переменную кривизну гибкой плиты в каждом направлении возможно, и такой учет целесообразен и существен в зоне активного трещинообразования при больших остаточных деформациях (например, при увеличении эксплуатационной нагрузки на дорожные или фундаментные плиты на порядок), а также при моделировании упругого основания с учетом его податливости и слоистости (через комбинированные модели, например вместо однородных). Таким образом, изучаемая отрасль исследований нелинейных задач требует дальнейшей разработки в плане как формирования общей методики решения данного вида задач, так и создания численных методов расчета.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1: Теория расчета / О. В. Козунова // Наука и техника. 2022. Т. 21, № 3. С. 211–221. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221>.
2. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. 2-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2002. 400 с.
3. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
4. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.
5. Соломин, В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. М.: Стройиздат, 1986. 208 с.
6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
7. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. Брест: БрГТУ, 2006. 107 с.
8. Свод правил по проектированию и строительству. Железобетонные монолитные конструкции зданий: СП 52-103-2007. М.: НИЦ «Строительство» – НИИЖБ им. А. А. Гвоздева, 2007. 22 с.
9. Свод правил. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения: СП 63.13330.2018. М.: НИЦ «Строительство» – НИИЖБ им. А. А. Гвоздева, 2018. 168 с.
10. Методическое пособие. Плоские безбалочные железобетонные перекрытия. Правила проектирования. М.: НИЦ «Строительство» – НИИЖБ им. А. А. Гвоздева, 2017. 158 с.
11. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1984. 680 с.

Поступила 21.12.2021

Подписана в печать 28.02.2022

Опубликована онлайн 29.07.2022

## REFERENCES

1. Kozunova O. V. (2022) Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 1: Calculation Theory. *Nauka i Tekhnika = Science & Technique*, 21 (3), 211–221. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221> (in Russian).
2. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (2002) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
3. Rzhantsyn R. A. (1991) *Structural Mechanics*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).
4. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. 2<sup>nd</sup> ed. Moscow, Gosstroizdat Publ. 240 (in Russian).
5. Solomin V. I., Shmatkov S. B. (1986) *Calculation Methods and Optimal Design of Reinforced Concrete Foundation Structures*. Moscow, Gosstroizdat Publ. 208 (in Russian).
6. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
7. Bosakov S. V. (2006) *The Ritz Method in Contact Problems of Elasticity Theory*. Brest, Brest State Technical University. 107 (in Russian).
8. SP [Construction Rules 52-103-2007]. *Code of Practice for Design and Construction. Reinforced Concrete Monolithic Structures of Buildings*. Moscow, Research and Development Center “Construction” – Scientific Research, Design and Technological Institute of Concrete and Reinforced Concrete named after A. A. Gvozdev, 2007. 22 (in Russian).
9. SP [Construction Rules] 63.13330.2018. *Code of Practice. Concrete and Reinforced Concrete Structures. Basic Provisions*. Moscow, Research and Development Center “Construction” – Scientific Research, Design and Technological Institute of Concrete and Reinforced Concrete named after A. A. Gvozdev, 2018. 168 (in Russian).
10. *Guidance Manual. Flat Beamless Reinforced Concrete Floors. Design Rules*. Moscow, Research and Development Center “Construction” – Scientific Research, Design and Technological Institute of Concrete and Reinforced Concrete named after A. A. Gvozdev, 2017. 158 (in Russian).
11. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. 3<sup>rd</sup> ed. Moscow, Stroizdat Publ. 680 (in Russian).

Received: 21.12.2021

Accepted: 28.02.2022

Published online: 29.07.2022