

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221>

УДК 624.072.21.7

Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании

Часть 1. Теория расчета

Канд. техн. наук, доц. О. В. Козунова¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Рассмотрена прямоугольная ортотропная изолированная плита на упругом основании, моделируемом упругим однородным изотропным слоем, жестко соединенным с недеформируемым основанием. Выполнены упругий и нелинейный расчеты этой плиты с учетом ее собственного веса под действием внешней статической нагрузки. В нелинейном расчете учитывалось изменение жесткости плиты в момент трещинообразования и дальнейшего активного раскрытия трещин. Расчет гибкой ортотропной плиты на упругом основании в нелинейной постановке выполняли итерационным путем методом Б. Н. Жемочкина. Для определения коэффициентов канонических уравнений и свободных членов использовали смешанный метод строительной механики. На первой итерации плиту рассматривали как линейно-упругую, ортотропную и однородную, на последующих – как линейно-упругую, ортотропную и неоднородную на каждом участке Жемочкина. В основной системе смешанного метода прогибы плиты с защемленной нормалью от действия сосредоточенной силы определяли методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом выражении, которое автором предложено впервые в проведенных исследованиях. Это выражение удовлетворяет не только граничным условиям защемленной плиты по перемещениям, но и бигармоническому уравнению. В нелинейных расчетах при нахождении переменной (секущей) жесткости для участка Жемочкина на каждой итерации использовали зависимость «жесткость – кривизна» для каждого из направлений X и Y , аппроксимированную нелинейной функцией, характер зависимости которой графически свидетельствует о нелинейно-упругой работе ортотропной плиты и ее деформировании с учетом трещинообразования и раскрытия трещин. Алгоритм предлагаемого решения реализован с помощью компьютерной программы Wolfram Mathematica 11.3.

Ключевые слова: ортотропная плита, метод Жемочкина, упругий слой, зависимость «жесткость – кривизна», осадки, контактные напряжения, изгибающие моменты

Для цитирования: Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1: Теория расчета / О. В. Козунова // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 3. С. 211–221. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221>

Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base

Part 1. Calculation Theory

O. V. Kozunova¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers a rectangular orthotropic insulated slab on an elastic foundation, modeled by an elastic homogeneous isotropic layer rigidly connected to a non-deformable foundation. Elastic and nonlinear calculations of this plate

Адрес для переписки

Козунова Оксана Васильевна
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
kozunova@gmail.com

Address for correspondence

Kozunova Oksana V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
kozunova@gmail.com

have been carried out while taking into account its own weight under the action of an external static load. The nonlinear calculation takes into consideration the change in the rigidity of plate at the time of crack formation and further active crack opening. The calculation of a flexible orthotropic slab on an elastic foundation in a nonlinear formulation is carried out iteratively by the method of B. N. Zhemochkin. To determine the coefficients of the canonical equations and free terms, a mixed method of structural mechanics was used. The deflections of a slab with a pinched normal in the main system of the mixed method due to the action of a concentrated force are determined by the Ritz method when the deflections are represented as a power polynomial in a new original expression, which is proposed by the author for the first time in the studies. This expression satisfies not only the boundary conditions of the pinched slab in terms of displacements, but also the biharmonic equation. In nonlinear calculations, when finding the variable (secant) stiffness for the Zhemochkin section, at each iteration, the “stiffness – curvature” dependence is used for each of the X and Y directions, approximated by a nonlinear function, the nature of the dependence of which graphically indicates the nonlinear-elastic operation of the orthotropic plate and its deformation taking into account crack formation and crack opening. The algorithm for the above solution is implemented using the Wolfram Mathematica 11.3 computer program.

Keywords: orthotropic plate, Zhemochkin’s method, elastic layer, “stiffness – curvature” dependence, settlements, contact stresses, bending moments

For citation: Kozunova O. V. (2022) Improvement of Calculation Technique for Flexible Orthotropic Plates on Elastic Base. Part 1: Calculation Theory. *Science and Technique*. 21 (3), 211–221. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-3-211-221> (in Russian)

Введение

Задача расчета плитных конструкций на упругом основании состоит в определении реактивных давлений (контактных напряжений), возникающих под подошвой фундаментных и дорожных конструкций, а также осадок сооружения в его плитной части, контактирующей с упругим основанием. Вместе с тем одна из основных задач – определение напряженно-деформированного состояния самой конструкции на упругом основании [1, 2].

Из истории развития расчета конструкций на упругом основании следует, что в результате научно-технического прогресса с введением в вычисления и нормативы компьютерных алгоритмов и их численной реализации совершенствовались и уточнялись методы расчета таких конструкций [3–6]. Это можно проследить на различных моделях упругого основания, которыми моделировались реальные грунты в естественном залегании или в искусственном основании при постановке принципиально новых задач расчета плит на упругом основании.

Разнообразие практических задач приводит к неоднозначному моделированию упругого основания. Особую трудность представляет собой выбор расчетной модели упругого основания для разных видов грунтов. Обзор моделей упругого основания для расчета фундаментов из перекрестных лент, изолированных плит сплошного сечения и балочных плит приводится в [7, 8]. В [9] в ходе статического расчета перекрестных лент фундаментов мелкого зало-

жения систематизируются и классифицируются модели упругого основания с их дальнейшим практическим использованием. Например, первая модель такого основания – модель Винклера – применяется для анализа понтонов водных переправ, фундаментов на песчаных и слабых грунтах. Для расчета фундаментных балок и дорожных плит действующими нормативными документами рекомендованы модели упругого основания в виде упругих слоев или упругого полупространства.

В настоящее время интенсивно разрабатываются модели, учитывающие остаточные деформации, зоны пластического течения и другие нелинейные проявления упругого основания под эксплуатационной нагрузкой. Так, в [10] коллективом авторов предложена модель трехслойного упругого основания, представляющая собой комбинированную модель из пружин Винклера и двухслойного основания Когана [11], которая в дальнейшем была использована при статическом анализе прочности изотропных дорожных плит [12] и дорожного покрытия в целом [13]. Такая модель может применяться для широкого класса инженерных задач, а при дополнительном исследовании – и для ортотропных плит.

О методах расчета и моделировании упругого основания под гибкой плитой

С механической точки зрения, расчет плитных конструкций на упругом основании – это решение контактной задачи соприкасающихся тел [14]. Данные задачи сводятся к решению

интегральных уравнений, зависящему от ядра интегрального уравнения и формы соприкасающихся тел [15]. При простых формах контактирующих тел основная трудность состоит в определении ядра интегрального уравнения, которое еще называют функцией Грина контактирующих тел [6, 14, 15], представляющей собой функцию перемещений точек поверхности упругого основания от действия единичной сосредоточенной силы [6].

В инженерной практике нецелесообразно решать каждую контактную задачу через интегральные уравнения в связи с трудоемкими математическими вычислениями. Поэтому используют метод Б. Н. Жемочкина [16], который сводит контактную задачу к задаче строительной механики.

Вопросы расчета фундаментных и дорожных плит на упругом основании с учетом их анизотропии (в частности, ортотропии) и трещинообразования в силу неоднозначности и неопределенности исходных данных неоднородных и композиционных упругих тел (железобетона и грунтов) и в связи с этим с большой математической сложностью реализации постановок и алгоритмов решаемых задач до настоящего времени не исследованы в полной мере. Известны работы М. И. Горбунова-Посадова [2], И. А. Симвулиди [17], Г. Я. Попова [18], С. Д. Семенюка [9], С. Н. Клепикова [4], С. В. Босакова [6], в которых различными подходами проведены исследования по расчету фундаментных изотропных плит и пространственных монолитных фундаментов как системы перекрестных лент на упругом основании.

О новой модели трехслойного упругого основания

Конструкцию неоднородного (слоистого) основания предлагается моделировать [11] в виде поверхностного слоя щебня, располо-

женного на слое песка, который, в свою очередь, находится на естественном грунтовом полупространстве (рис. 1). Новая модель трехслойного (слоистого) упругого основания была рассмотрена в [11] и представима в виде основания Винклера (слой щебня), расположенного на двухслойном основании Когана (песок + естественный грунт).

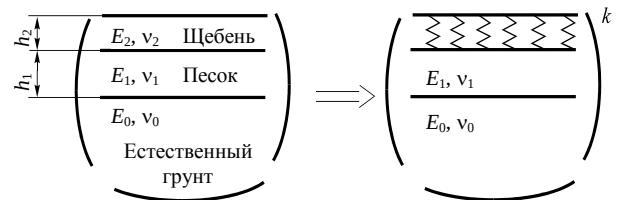


Рис. 1. Модель трехслойного (слоистого) упругого основания

Fig. 1. Model of three-layer (layered) elastic base

В [10] приведено выражение для определения перемещений $M(x_i, y_i)$ поверхности трехслойного основания от действия равномерно распределенной по прямоугольному участку размером $\left(x_k \pm \frac{\Delta x}{2}\right) \times \left(y_k \pm \frac{\Delta y}{2}\right)$ единичной силы в следующем виде:

$$W(x_i, y_i) = \frac{P(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1 h_1} F_{i,k}, \quad (1)$$

где P – внешняя нагрузка, равномерно распределенная по прямоугольному участку размером $\left(x_k \pm \frac{\Delta x}{2}\right) \times \left(y_k \pm \frac{\Delta y}{2}\right)$; E_1, ν_1, h_1 – упругие характеристики и толщина несущего слоя (песка); $F_{i,k}$ – безразмерная функция, которая определяется по формулам, полученным в [10] с учетом [6, 11, 19], и имеет следующий вид для перемещения центра загруженного прямоугольного участка:

$$F_{i,i} = \frac{1}{k \Delta x \Delta y} + 2 \frac{\Delta x}{\Delta y} \left[\ln \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \ln \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) + \ln \left(1 + \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + 1} \right) \right] + \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n(z) \left(\frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right). \quad (2)$$

В других случаях

$$F_{i,k} = \frac{h_1}{R} + \sum_{n=0}^3 a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h_1^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \times \\ \times P_n(z) \left(\frac{2h_1}{\sqrt{R^2 + 4h_1^2}} \right), \quad (3)$$

где $\Gamma(n+1)$ – гамма-функция [20]; $P_n(z)$ – полином Лежандра [20]; R – равнодействующая внешних сил, $R = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$; a_n – неопределенный коэффициент разложения в ряд; n – количество членов ряда разложения функции при аппроксимации искомого решения (назначается автором в зависимости от заданной точности решения задачи, для рассматриваемой задачи достаточно $n = 3$); k – коэффициент постели верхнего слоя трехслойного основания, определяемый по формуле [2]

$$k = \frac{E_2(1 - \nu_2)}{(1 + \nu_2)(1 - 2\nu_2)h_2}; \quad (4)$$

E_2, ν_2 – модуль упругости и коэффициент Пуассона верхнего слоя трехслойного основания (щебня, рис. 1); $\Delta x, \Delta y$ – размер прямоугольного участка Жемочкина; E_2, ν_2, h_2 – упругие характеристики и толщина поверхностного слоя (щебня).

Следует отметить, что формула (4) справедлива в практическом применении исследований [2] при рекомендуемой толщине упругого слоя $h_2 < \frac{b}{2}$ в зависимости от ширины b плиты, опираемой на этот слой.

Напряженно-деформированное состояние ортотропных пластин в приближенной теории изгиба. Потенциальная энергия изгиба

Приближенная теория изгиба анизотропных пластинок (тонких плит) достаточно полно и основательно изложена С. Г. Лехницким в [21]. Основы теории изгиба анизотропных пластинок ранее (в середине и конце XIX в.) были заложены в работах Ф. Геринга [22] и И. Буссинеска [23]. В начале XX в. главным образом

в трудах М. Т. Губера [24–26] предложена и в силу математических возможностей того времени разработана приближенная теория изгиба анизотропных пластинок.

В [21] рассмотрено упругое равновесие плоской однородной анизотропной пластинки постоянной толщины, закрепленной по всему краю (или по его части) и деформируемой изгибающей нагрузкой, распределенной по плоским поверхностям и нормальной к срединной поверхности в недеформированном ее состоянии. За плоскость изгиба (плоскость XY) принимается срединная плоскость недеформированной пластинки. Поместив начало координат в произвольной точке O , ось Z направляется в сторону ненагруженной внешней поверхности (рис. 2) и в силу симметрии поставленных задач в дальнейшем является одной из главных осей, а точка O совпадает с центром тяжести плиты. Объемными силами пренебрегают. По сделанному предположению относительно упругих свойств для ортотропной пластинки считаются справедливыми уравнения обобщенного закона Гука в виде (2.7) и (2.8) из [21].

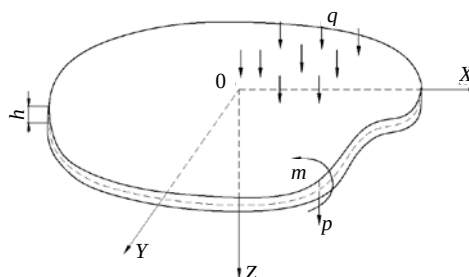


Рис. 2. Общий вид гибкой пластинки под нагрузкой
Fig. 2. General view of flexible plate under load

Приближенная теория изгиба пластинок (тонких и гибких плит) строится на двух предположениях:

1) прямолинейные отрезки, которые в недеформированном состоянии пластинки были нормальными к ее плоской срединной поверхности, при изгибе остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности («гипотеза прямых нормалей»);

2) нормальное напряжение σ_z в сечениях, параллельных срединной плоскости, есть величина, малая по сравнению с напряжениями в поперечных сечениях σ_x, σ_y и τ_{xy} .

Между составляющими напряжений, моментами и перерезывающим силами существуют простые зависимости (как (61.12) из [21]), отраженные в формулах:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{12M_x}{h^3}z; \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3}z; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{12H_{xy}}{h^3}z; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{12N_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right); \quad (5) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \frac{12N_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right),\end{aligned}$$

где M_x, M_y – изгибающий момент в плоскости XOZ, YOZ соответственно; H_{xy} – крутящий момент; N_x, N_y – перерезывающая (поперечная) сила вдоль осей X, Y ; h – толщина плиты (высота поперечного сечения); z – координата точки поперечного сечения $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right)$, в которой

определяются компоненты тензора напряжений; σ_x, σ_y – нормальное напряжение при изгибе; $\tau_{xy} (\tau_{yx})$ – касательное напряжение при кручении; $\tau_{xz} (\tau_{zx})$ – то же при изгибе (сдвиге) в плоскости XOZ ; $\tau_{yz} (\tau_{zy})$ – то же при изгибе (сдвиге) в плоскости YOZ .

На рис. 3а показаны составляющие напряжений на площадках, нормальных к осям X и Y , на рис. 3б – моменты и перерезывающие силы, к которым приводятся напряжения.

Для ортотропной пластинки, используя обобщенный закон Гука и зависимости (5), в [21] получены формулы относительных деформаций (61.13) и внутренних усилий (61.14). С учетом этого запишем выражения для изгибающих и крутящего моментов:

$$\begin{aligned}M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_k &= H_{xy} = -2D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},\end{aligned} \quad (6)$$

где $D_1(D_x), D_2(D_y)$ – цилиндрические жесткости изгиба анизотропной пластинки по направлениям осей Y и X соответственно, которые сов-

падают с главными осями; $D_k(D_{xy})$ – жесткость кручения пластинки, вычисляется по формуле из работы С. П. Тимошенко [27].

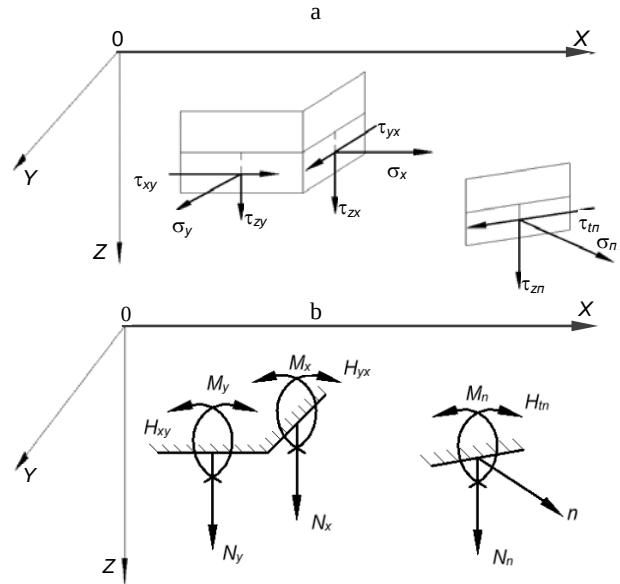


Рис. 3. Напряженное состояние гибких пластинок: а – составляющие напряжений на площадках, нормальных к осям X и Y ; б – моменты и перерезывающие силы

Fig. 3. Stress state of flexible plates:

a – components of stresses at sites normal to X and Y axes; b – moments and cutting forces

Цилиндрические жесткости изгиба пластинки определяются для главных направлений упругости и называются главными жесткостями:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}. \quad (7)$$

Запишем выражение для потенциальной энергии изгиба ортотропной пластинки, вытекающее из формул (2.2)–(2.4) в [21], если пренебречь σ_z, τ_{yz} и τ_{xz} :

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2} \iint \left[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy,\end{aligned} \quad (8)$$

где w – искомая функция прогибов $w(x, y, z)$ (вертикальных перемещений срединной плоскости гибкой ортотропной плиты под дейст-

вием статической нагрузки в деформированном состоянии).

Следует отметить, что для железобетонных гибких пластин с возможным трещинообразованием ТНПА в статических расчетах рекомендуют использовать приведенный модуль упругости (деформации) для нахождения соответствующих жесткостей. Алгоритм такого расчета приведен далее в статье.

Учет нелинейного деформирования железобетона в гибких пластинах

Полученные ранее В. И. Мурашевым [28] и А. А. Гвоздевым [29, 30] физические уравнения железобетонных балок и плит учитывают трещинообразование и другие нелинейные деформации, возникающие в этих конструкциях и описанные Н. И. Карпенко в [31]. Моделирование грунтов в фундаментных конструкциях на упругом основании также неоднозначно и разнообразно, что достаточно полно в своих работах отразили отечественные ученые М. И. Горбунов-Посадов с соавторами [2] и С. Д. Семенюк [9]. В настоящее время интенсивно разрабатываются модели, учитывающие остаточные деформации, зоны пластического течения и иные нелинейные проявления упругого основания под эксплуатационной нагрузкой.

Необходимо отметить, что в фазе уплотнения осадку жесткого фундамента и реактивные давления следует считать линейно зависящими от нагрузки на фундамент, поэтому нормы проектирования фундаментов и оснований [32] допускают рассчитывать основания по деформациям, используя линейные модели, если среднее давление на основание не превышает некоторой величины, называемой расчетным сопротивлением основания. Гораздо сложнее взаимодействие с основанием гибких железобетонных фундаментов. В этом случае изменение эпюры реактивных давлений с ростом нагрузки происходит не только за счет особенностей деформирования грунта, но также за счет уменьшения жесткости фундамента, которое начинается с образования и раскрытия в нем трещин.

Фундаментные конструкции могут рассчитываться как линейно-упругие, если действующие нагрузки не вызывают в них трещин. При больших нагрузках и для гибких кон-

струкций на упругом основании погрешности линейных расчетов могут быть значительными. Учет нелинейных деформаций в сочетании с приемами оптимального проектирования позволяет проектировать фундаментные конструкции в соответствии с требованиями первой и второй групп предельных состояний, повысить адекватность расчетов и добиться существенной экономии бетона и арматуры.

Первые задачи о расчете фундаментных конструкций с учетом физической нелинейности были решены Б. Г. Корневым [33]. Деформирование элемента балки (в координатах «момент – кривизна») он описывал диаграммой Прандтля. При расчете осесимметрично деформируемых плит эта предпосылка принималась для радиального направления. Рассматривая балки и плиты большой протяженности, Б. Г. Корнев использовал для оснований линейные модели, полагая, что в таких конструкциях значительные напряжения возникают при малых давлениях на основание, вызывающих в грунтах преимущественно линейные деформации.

Аналогичные гипотезы были приняты Р. В. Серебрянным [34] для определения несущей способности бесконечных плит на упругом полупространстве, нагруженных по кругу малого радиуса. Теоретическая разрушающая нагрузка хорошо совпала с полученной в опытах В. Д. Попова и И. Н. Толмачева. В то же время по линейному расчету разрушающая нагрузка оказалась почти в пять раз меньше. Уже эти первые попытки учета нелинейности деформаций железобетона при расчете фундаментных конструкций показали перспективность такого направления. Усилия в конструкциях получались не только более близкими к действительным, но и существенно меньшими, чем при расчете в линейной постановке. Это открывало возможность уменьшить расход бетона и арматуры при проектировании фундаментов.

Методы расчета фундаментов, учитывающие нелинейные деформации, возникающие в железобетоне до образования пластических шарниров, разрабатывались несколькими авторами, обзор которых освещают В. И. Соломин и С. Б. Шматков в [35].

Постановка задачи. Граничные условия

В статье рассматривается прямоугольная гибкая ортотропная плита размерами $2a \times 2b$ и толщиной h под действием внешней нагрузки, опирающаяся на упругое основание (рис. 4), с цилиндрическими жесткостями в соответствующих плоскостях D_x, D_y . В расчетах также учитывается жесткость кручения плиты, которая вычисляется по формуле [27]

$$D_k = \frac{\nu_x + \nu_y}{2} \sqrt{D_x D_y}, \quad (9)$$

где D_x, D_y – цилиндрические жесткости изгиба пластинки по направлениям осей X, Y соответственно, определяемые по (7); ν_x, ν_y – коэффициент Пуассона (поперечной упругости) по направлениям осей X, Y .

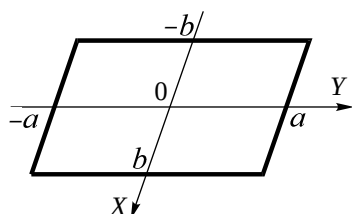


Рис. 4. Расчетная модель плиты

Fig. 4. Calculation model of plate

В ходе упругого и нелинейного расчетов определяются осадки плиты, распределение контактных напряжений под ней, внутренние усилия в плите (изгибающие моменты), а также выполняется анализ полученных результатов. Упругое основание в исследованиях моделируется в виде упругого однородного изотропного слоя, жестко соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем). Принимается, что в контактной зоне отсутствуют касательные напряжения и для плиты справедливости гипотезы технической теории изгиба [14].

Расчет прямоугольной ортотропной плиты выполняется методом Б. Н. Жемочкина [16]. Плита разбивается на одинаковые прямоугольные участки размерами $\Delta x \times \Delta y$, в центре каждого участка размещается вертикальная связь для описания контакта плиты с упругим основанием. Считается, что усилие в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений при определении перемещений центра участка.

Полученная статически неопределимая система решается смешанным методом строительной механики [19], приняв за неизвестные силы в контактных связях Жемочкина, а также два угловых и линейное перемещения введенного защемления нормали в центре плиты. Канонические уравнения смешанного метода для решения поставленной задачи имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{1,1} X_1 + \dots + \delta_{1,m} X_m - \varphi_x y_1 - \varphi_y x_1 + u_1 + \Delta_{1,p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{m,1} X_1 + \dots + \delta_{m,m} X_m - \varphi_x y_m - \varphi_y x_m + u_1 + \Delta_{m,p} = 0; \\ \sum_{k=1}^m X_k y_k - M_x = 0; \\ \sum_{k=1}^m X_k x_k - M_y = 0; \\ -\sum_{k=1}^m X_k - R = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где m – число участков Жемочкина на плите; δ_1, δ_m – коэффициенты канонических уравнений при неизвестных силах X_m в контактных связях Жемочкина; Δ_1, Δ_m – свободные члены канонических уравнений; x_m, y_m – координаты центра участка Жемочкина; $u_1, \varphi_x, \varphi_y$ – неизвестные линейное и угловые перемещения введенного защемления в центре плиты; R, M_x, M_y – равнодействующая внешних сил и моменты равнодействующей относительно координатных осей, расположенных в плоскости плиты и проходящих через ее центр; X_k – усилие в связи Жемочкина с номером k .

Алгоритм нелинейного расчета ортотропной плиты с трещиной методом Жемочкина

Сформулированную задачу в нелинейной постановке предлагается решать итерационным путем методом Б. Н. Жемочкина через зависимость «жесткость – кривизна» [35]. Надо отметить, что обычно при подобных расчетах используется зависимость «момент – кривизна», однако, как будет показано ниже, применение зависимости «жесткость – кривизна» помогает сократить промежуточные вычисления. Кроме того, эта зависимость аппроксимируется легче,

чем «момент – кривизна» [36, 37]. На первой итерации плита рассчитывалась как линейно-упругая, ортотропная и однородная, на последующих – как линейно-упругая, ортотропная и неоднородная на каждом участке Жемочкина.

Для упругого однородного изотропного слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем), вертикальные перемещения поверхности упругого слоя от сосредоточенной силы P определяются через соотношение (2.13) из [6]

$$W(R) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \times \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{R^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} P_n\left(\frac{2h}{\sqrt{R^2 + 4h^2}}\right) \right], \quad (11)$$

где $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ – радиус-вектор перемещающихся точек с координатами (x, y) исследуемой поверхности упругого слоя от силы, приложенной в точке с координатами (ξ, η) ; h – мощность (толщина) упругого слоя, м.

В [6] определены коэффициенты a_n в следующих значениях: $a_0 = -1$; $a_1 = -3/2$; $a_2 = -1$; $a_3 = -1/3$; $a_4 = 1/18$; ... После интегрирования (11) по площади прямоугольного участка размерами $\Delta x \times \Delta y$ получаем выражения для определения перемещений центра участка Жемочкина с номером i от действия сосредоточенной силы, равной 1, приложенной к центру участка с номером k . Первое слагаемое в (11) определяет функцию вертикальных перемещений для упругого однородного изотропного полупространства (решение Буссинеска), интегрируется точно (оно сингулярное), остальные – не сингулярные и не интегрируются. Для практических расчетов в формуле (11) можно ограничиться пятью членами ряда [3].

В [6] получено соотношение (3.3) для перемещения точки $M(x_i, y_i)$ поверхности упругого полупространства при загрузении на ней участка прямоугольной формы равномерно распределенной нагрузкой с равнодействующей, равной 1. Перемещения точки поверхности основания $M(x_i, y_i)$ запишем в следующем виде:

$$W(x_i, y_i) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0 \Delta x} F_{i,k}, \quad (12)$$

где $F_{i,k}$ – безразмерная функция, которую определяем из формулы (12) через соотношение (3.3) [6]

$$F_{i,k} = \left[\begin{aligned} & \frac{y_i - d}{\Delta y} \ln \frac{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} + \\ & + \frac{y_i - c}{\Delta y} \ln \frac{x_i - a + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{x_i - b + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - b}{\Delta y} \ln \frac{y_i - d + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - d)^2}}{y_i - c + \sqrt{(x_i - b)^2 + (y_i - c)^2}} + \\ & + \frac{x_i - a}{\Delta y} \ln \frac{y_i - c + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - c)^2}}{y_i - d + \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - d)^2}} \end{aligned} \right] + \quad (13)$$

$$+ \frac{\Delta x}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\left(4 + \frac{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}{h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \times P_n\left(\frac{2h}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + 4h^2}}\right).$$

Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы (рис. 5) определяли методом Ритца [38] при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом выражении, предлагаемом автором впервые.

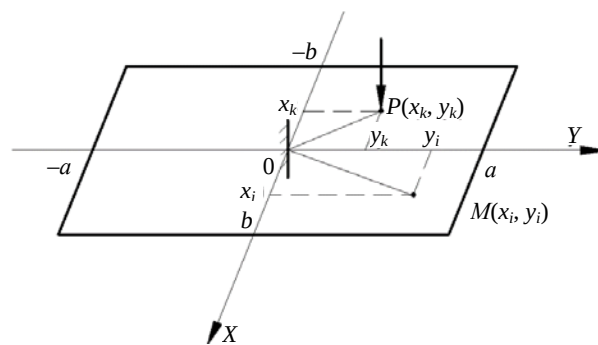


Рис. 5. Гибкая плита с защемленной нормалью

Fig. 5. Flexible plate with pinched normal

Общий вид предлагаемого автором нового решения имеет следующее представление:

$$W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i) = \left(\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} \right) \times \left(A_{0,0}^{(n)} + A_{1,0}^{(n)} \frac{x_i}{a} + A_{0,1}^{(n)} \frac{y_i}{b} + A_{2,0}^{(n)} \frac{x_i^2}{a^2} + A_{1,1}^{(n)} \frac{x_i y_i}{ab} - \frac{b^2(a^2 + 3b^2)A_{2,0}^{(n)}}{a^2(3a^2 + b^2)} \frac{y_i^2}{b^2} \right), \quad (14)$$

где x_i, y_i – координаты точки i , в которой определяются прогибы плиты $W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i)$ с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода; $A_{m,k}^{(n)}$ – постоянный коэффициент метода Ритца [38] при координатных функциях, базисной из которых является $f_{m,k}(x_i, y_i) = \frac{x_i^m y_i^k}{a^m b^k}$; $m, k = 0, 1, 2$.

Выражение (14) удовлетворяет не только граничным условиям защемленной плиты по перемещениям, но и бигармоническому уравнению [14].

После выполненных выше расчетов определяется функционал полной энергии ортотропной пластинки с защемленной нормалью и действующей на нее сосредоточенной единичной силой как квадратичная функция коэффициентов $A_{i,k}$, что позволяет из системы линейных алгебраических уравнений найти эти коэффициенты и вычислить прогибы плиты с защемленной нормалью. Так формируется система уравнений метода Жемочкина на каждой итерации.

ВЫВОДЫ

1. Предложены в развитии методика и последовательность нелинейного итерационного расчета методом Б. Н. Жемочкина железобетонной ортотропной плиты на упругом основании, моделируемом упругим слоем конечной толщины. Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы определяли методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом выраже-

нии, предлагаемом автором впервые. Кроме того, в отличие от традиционных подходов, основанных на применении зависимости «момент – кривизна», использовали зависимость «жесткость – кривизна», что сократило объем вычислений.

2. Моделированию работы фундаментной балки с трещинами посвящены труды В. И. Соломина, В. И. Мурашева и др. В них предполагается, что фундаменты или дорожные конструкции (плиты, например) будут работать и с трещинами. В этом случае необходимо учитывать нелинейные свойства железобетона через переменную кривизну плиты в каждом направлении. Проведенный автором анализ по данной тематике показал, что она изучена не в полной мере. Поэтому отрасль исследования нелинейных задач требует дальнейшей разработки как в плане создания общей методики их решения, так и численных методов расчета. Необходимо подчеркнуть, что предлагаемая методика расчета гибких ортотропных плит с учетом трещинообразования справедлива для любой модели упругого основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов, М. И. Балки и плиты на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов. М.: Машстройиздат, 1949. 238 с.
2. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин; 3-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1984. 680 с.
3. Корнев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Корнев. М.: Госстройиздат, 1954. 231 с.
4. Клепиков, С. Н. Расчет конструкций на упругом основании / С. Н. Клепиков. Киев: Будівельник, 1967. 184 с.
5. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. М.: Наука, 1976. 496 с.
6. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
7. Тарасевич, А. Н. Изгиб самонапряженных плит на упругом основании / А. Н. Тарасевич. Брест, 2001. 125 с.
8. Козунова, О. В. Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом / О. В. Козунова. Минск, 2017. 168 с.
9. Семенюк, С. Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформируемом основании / С. Д. Семенюк. Могилев: БРУ, 2003. 269 с.

10. Босаков, С. В. Об одной модели упругого основания и ее использовании для расчета прямоугольной плиты на упругом основании / С. В. Босаков, С. И. Зиневич, О. В. Козунова // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. Т. 279, № 4. С. 2–5.
11. Коган, Б. И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б. И. Коган // Труды ХАДИ. Харьков: Харьковский автомобильно-дорожный институт, 1953. Вып. 14. С. 33–46.
12. Козунова, О. В. Статический расчет дорожной плиты на слоистом основании / О. В. Козунова // Механика. Исследования и инновации. 2018. Вып. 11. С. 134–139.
13. Козунова, О. В. Использование модели трехслойного основания в расчетах шарнирно соединенных дорожных плит / О. В. Козунова // Вестник БрГТУ. Серия: Архитектура и строительство. 2019. Т. 279, № 4. С. 2–5.
14. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. 2-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2002. 400 с.
15. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / под общ. ред. А. Б. Васильева [и др.]. М.: Физматлит, 2003. 432 с.
16. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.
17. Симвулиди, И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании / И. А. Симвулиди. М.: Высш. шк., 1987. 576 с.
18. Попов, Г. Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве / Г. Я. Попов // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1959. № 3. С. 25–33.
19. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
20. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1963. 1098 с.
21. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Госуд. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. 387 с.
22. Gehring, F. De Aequationibus Differentialibus Quibus Aequilibrium et Motus Laminae Crystallinae Definuntur / F. Gehring. Berlin, 1860.
23. Boussinesq, I. Complements a Une Etude Sur la Theorie de L'equilibre et du Movement Des Solides Elastiques / I. Boussinesq // Journal des Mathématiques Pures et Appliquées. 1879. Vol. 5, Ser. 3. P. 221–229.
24. Huber, M. T. Teorja Plyt / M. T. Huber. Lwow, 1921.
25. Huber, M. T. Einige Anwendungen der Biegungstheorie Ortotroper Platten / M. T. Huber // Zamm Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 1926. B. 6, H. 3.
26. Huber, M. T. Probleme der Statik Technisch Wichtiger Orthotroper Platten / M. T. Huber. Warszawa, 1929.
27. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физматгиз, 1963. 536 с.
28. Мурашев, В. И. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона / В. И. Мурашев. М.: Машиностроение, 1950. 268 с.
29. Гвоздев, А. А. Метод предельного равновесия в применении к расчету железобетонных конструкций / А. А. Гвоздев // Инженерный сборник. 1949. Т. 5, вып. 2. С. 3–20.
30. Гвоздев, А. А. К вопросу о предельных условиях (условиях текучести) для ортотропных сред и для изгибаемых железобетонных плит / А. А. Гвоздев // Строительная механика: сб. статей. М.: Стройиздат, 1966. С. 208–218.
31. Карпенко, Н. И. Теория деформирования железобетона с трещинами / Н. И. Карпенко. М.: Стройиздат, 1976. 204 с.
32. Основания и фундаменты зданий и сооружений. Основные положения. Строительные нормы проектирования: ТКП 45-5.01-254-2012* (02250). Введ. 01.07.2012. Минск: Минстройархитектуры, 2012. 118 с.
33. Коренев, Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании / Б. Г. Коренев. М.: Госстройиздат, 1954. 231 с.
34. Серебрянный, Р. В. Определение разрушающей нагрузки для плит на упругом основании / Р. В. Серебрянный // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1960. № 2. С. 10–12.
35. Соломин, В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. М.: Стройиздат, 1986. 208 с.
36. Босаков, С. В. Развитие теории расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. / редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. Минск: БелНИИС, 2019. Вып. 11. С. 11–24.
37. Босаков, С. В. Нелинейные колебания прямоугольных ортотропных плит с одной степенью свободы при различных опорных закреплениях / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 5. С. 8–12.
38. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. Брест: БрГТУ, 2006. 107 с.

Поступила 21.12.2021

Подписана в печать 28.02.2022

Опубликована онлайн 31.05.2022

REFERENCES

1. Gorbunov-Posadov M. I. (1949) *Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Mashstroizdat Publ. 238 (in Russian).
2. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. 3rd ed. Moscow, Stroiizdat Publ. 680 (in Russian).
3. Korenev B. G. (1954) *Issues on Calculation of Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroizdat Publ. 231 (in Russian).
4. Klepikov S. N. (1967) *Calculation of Structures on an Elastic Foundation*. Kiev, Budivelnik Publ. 184 (in Russian).
5. Galin L. A. (ed.) (1976) *Development of the Theory of Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).

6. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on an Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
7. Tarasevich A. N. (2001) *Bending of Self-Stressed Slabs on an Elastic Foundation*. Brest. 125 (in Russian).
8. Kozunova O. V. (2017) *Static Analysis of the System "Beam Slab – Non-Linear Elastic Inhomogeneous Foundation" by the Variation-Difference Method*. Minsk. 168 (in Russian).
9. Semenyuk S. D. (2003) *Reinforced Concrete Spatial Foundations of Residential and Civil Buildings on an Evenly Deformed Base*. Mogilev, Belarusian-Russian University. 269 (in Russian).
10. Bosakov S. V., Zinevich S. I., Kozunova O. V. (2018) About one Elastic Foundation Model and its Use for Calculating a Rectangular Slab on an Elastic Foundation. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzhenii = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 279 (4), 2–5 (in Russian).
11. Kogan B. I. (1953) Stresses and Deformations of Multilayer Coatings. *Trudy KhADI [Proceedings of Kharkov Automobile & Highway University]*. Kharkov, Kharkov Automobile & Highway University, (14), 33–46 (in Russian).
12. Kozunova O. V. (2018) Static Calculation of a Road Slab on a Layered Base. *Mekhanika. Issledovaniya i Innovatsii = Mechanics. Investigations and Innovations*, (11), 134–139 (in Russian).
13. Kozunova O. V. (2019) Using the Model of a Three-Layer Base in the Calculations of Hinged Road Slabs. *Vestnik Brestskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya: Arkhitektura i Stroitel'stvo = Vestnik of Brest State Technical University. Series: Architecture and Construction*, 279 (4), 2–5 (in Russian).
14. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (2002) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. 2nd ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
15. Vasil'ev A. B., Medvedev G. N., Tikhonov N. A., Urazgil'dina T. A. (2003) *Differential and Integral Equations, Calculus of Variations in Examples and Problems*. Moscow, Fizmatlit Publ. 432 (in Russian).
16. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Methods for Calculating Foundation Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. 2nd ed. Moscow, Gosstroizdat Publ. 240 (in Russian).
17. Simvulidi I. A. (1987) *Calculation of Engineering Structures on an Elastic Basis*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 576 (in Russian).
18. Popov G. Ya. (1959) On the Calculation of an Unbounded Articulated Beam Slab Lying on an Elastic Half-Space. *Izvestiya Vuzov. Stroitel'stvo i Arkhitektura = News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture*, (3), 25–33 (in Russian).
19. Rzhantsyn R. A. (1991) *Structural Mechanics*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).
20. Gradstein I. S., Ryzhik I. M. (1963) *Tables of Integrals, Sums, Series and Works*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 1098 (in Russian).
21. Lekhnitsky S. G. (1957) *Anisotropic Plates*. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature. 387 (in Russian).
22. Gehring F. (1860) *De Aequationibus Differentialibus Quibus Aequilibrium et Motus Laminae Crystallinae Definitur*. Berlin.
23. Boussinesq I. (1879) Complements a Une Etude Sur la Theorie de L'equilibre et du Movement Des Solides Elastiques. *Journal des Mathematiques Pures et Appliquees*, 5 (3), 221–229 (in French).
24. Huber M. T. (1921) *Teorja Plyt*. Lwow, 1921.
25. Huber M. T. (1926) Einige Anwendungen der Biegungstheorie Ortotroper Platten. *Zamm Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, B. 6, H. 3 (in German).
26. Huber M. T. (1929) *Probleme der Statik Technisch Wichtiger Orthotroper Platten*. Warszawa (in German).
27. Timoshenko S. P., Voynovsky-Kriger S. (1963) *Plates and Shells*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 536 (in Russian).
28. Murashev V. I. (1950) *Fracture Resistance, Stiffness and Strength of Reinforced Concrete*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 268 (in Russian).
29. Gvozdev A. A. (1949) Limit Equilibrium Method as Applied to the Calculation of Reinforced Concrete Structures. *Inzhenerny Sbornik [Engineering Compilation]*, 5 (2), 3–20 (in Russian).
30. Gvozdev A. A. (1966) On the issue of Limiting Conditions (Yield Conditions) for Orthotropic Media and for Bending Reinforced Concrete Slabs. *Stroitel'naya Mekhanika: Sbornik Statei [Building Mechanics: Collection of Articles]*. Moscow, Stroizdat Publ. 208–218 (in Russian).
31. Karpenko N. I. (1976) *Theory of Deformation of Reinforced Concrete with Cracks*. Moscow, Stroizdat Publ. 204 (in Russian).
32. TKP [Technical Code of Common Practice] 45-5.01-254–2012* (02250). *Bases and Foundations of Buildings and Structures. Basic Provisions. Building Codes of Design*. Minsk, Publishing House of Ministry of Architecture and Construction, 2012. 118 (in Russian).
33. Korenev B. G. (1954) *Issues of Calculation of Beams and Slabs on an Elastic Foundation*. Moscow, Gosstroizdat Publ. 231 (in Russian).
34. Serebryanny R. V. (1960) Determination of the Breaking Load for Slabs on an Elastic Foundation. *Osnovaniya, Fundamenty i Mekhanika Gruntov = Soil Mechanics and Foundation Engineering*, (2), 10–12 (in Russian).
35. Solomin V. I., Shmatkov S. B. (1986) *Calculation Methods and Optimal Design of Reinforced Concrete Foundation Structures*. Moscow, Stroizdat Publ. 208 (in Russian).
36. Bosakov S. V., Kozunova O. V. (2019) Development of the Theory of Calculation of Hinged Beams on an Elastic Foundation, Taking into Account their Physical Non-linearity. *Problemy Sovremennogo Betona i Zhelezobetona Sb. Nauch. Tr. [Problems of Modern Concrete and Reinforced Concrete: Collection of Scientific Papers]*. Minsk, Belarusian Scientific-Research Institute of Construction, 11, 11–24 (in Russian).
37. Bosakov S. V., Schetko N. S. (2021) Nonlinear Oscillations of Rectangular Orthotropic Plates with One Degree of Freedom at Various Support Fixtures. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy = Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, (5), 8–12 (in Russian).
38. Bosakov S. V. (2006) *The Ritz Method in Contact Problems of Elasticity Theory*. Brest, Brest State Technical University. 107 (in Russian).

Received: 21.12.2021

Accepted: 28.02.2022

Published online: 31.05.2022