

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-2-129-133>

УДК 624.071.3

Оптимизация прямоугольных шарнирно опертых железобетонных гладких и ребристых плит методом сокращения ресурсов

Кандидаты техн. наук О. Л. Вербицкая¹⁾, Л. И. Шевчук¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2022
Belarusian National Technical University, 2022

Реферат. Рассмотрена задача оптимизации шарнирно опертых железобетонных прямоугольных гладких и ребристых плит. Статический расчет плит выполнен с использованием метода конечных элементов. Модель построена из прямоугольных конечных элементов, содержащих по четыре узла и имеющих двенадцать степеней свободы. Нагрузка представлена в виде узловых вертикальных сил. Для учета нелинейности деформирования железобетона конечные элементы приняты как неоднородные многослойные пластины. Модуль упругости изменялся по гиперболической зависимости. Определение напряженно-деформированного состояния выполнено итерационным способом. Для оптимизации использован метод сокращения ресурсов по прочности, жесткости и раскрытию трещин с градиентным спуском по границе допустимой области. В качестве целевых функций приняты стоимость материала, затраченного на изготовление плиты, и объем бетона. Поставлены ограничения по прочности, жесткости и ширине раскрытия трещин. Путем сканирования установлены границы допустимой области поиска оптимального решения, имеющие криволинейное очертание. По результатам расчета получены траектории движения поиска оптимального решения. Приведены примеры и найдены оптимальные решения при различных стартовых точках. Установлено, что для принятых условий задачи экстремальные точки располагаются вблизи границ допустимой области. Скорость градиентного спуска и расположение стартовых точек не оказывают существенного влияния на результаты. В связи с тем что целевая функция может иметь несколько минимумов, предложен способ поиска глобального минимума предварительным сканированием и анализом значений экстремумов. Подтверждено, что применяемый метод обеспечивает стабильность оптимального решения.

Ключевые слова: оптимизация, железобетон, прямоугольные плиты, градиентный спуск, сокращение ресурсов, прочность, жесткость, конечные элементы

Для цитирования: Вербицкая, О. Л. Оптимизация прямоугольных шарнирно опертых железобетонных гладких и ребристых плит методом сокращения ресурсов / О. Л. Вербицкая, Л. И. Шевчук // *Наука и техника*. 2022. Т. 21, № 2. С. 129–133. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-2-129-133>

Optimization of Rectangular Articulated Reinforced Concrete Smooth and Ribbed Slabs Using Resource Reduction Method

O. L. Verbitskaya¹⁾, L. I. Shevchuk¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper considers the optimization problem of hinged reinforced concrete rectangular smooth and ribbed slabs. The static calculation of the slabs has been performed while using the finite element method. The model is built from rectangular finite elements containing four nodes each and having twelve degrees of freedom. The load is presented in the form of nodal vertical forces. To take into account the nonlinearity of the deformation of reinforced concrete, the finite elements

Адрес для переписки

Шевчук Леонид Иванович
Белорусский национальный технический университет
пр-т Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
shevchuk4848@yandex.ru

Address for correspondence

Shevchuk Leonid I.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
shevchuk4848@yandex.ru

are taken as inhomogeneous multilayer plates. The modulus of elasticity changed according to the hyperbolic dependence. The determination of the stress-strain state has been carried out by the iterative method. For optimization, a method has been used to reduce resources for strength, stiffness, and crack opening with gradient descent along the boundary of the allowable area. The cost of the material spent on the manufacture of the slab and the volume of concrete are taken as objective functions. Restrictions on strength, stiffness and width of cracks are set. By scanning, the boundaries of the admissible search area for the optimal solution are set; the boundary of this region has a curvilinear outline. According to the results of the calculation, the trajectories of the search for optimal solution are obtained. Examples are given and optimal solutions are found for various starting points. It has been established that for the accepted conditions of the problem, the extreme points are located near the boundaries of the admissible region. The speed of gradient descent and the location of the starting points do not significantly affect the results. Due to the fact that the objective function can have several minima, a method is proposed to search for a global minimum by preliminary scanning and analysis of extrema values. It is confirmed that the applied method ensures the stability of the optimal solution.

Keywords: optimization, reinforced concrete, rectangular slabs, gradient descent, resource reduction, strength, rigidity, finite elements

For citation: Verbitskaya O. L., Shevchuk L. I. (2022) Optimization of Rectangular Articulated Reinforced Concrete Smooth and Ribbed Slabs Using Resource Reduction Method. *Science and Technique*. 21 (2), 129–133. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2022-21-2-129-133> (in Russian)

Введение

В промышленном строительстве при установке технологического оборудования часто требуется отступать от типовых конструкций и устраивать на отдельных участках монолитные перекрытия. При этом нужно разрабатывать конструкцию монолитных плит, выбирая варианты с наличием ребер или их отсутствием. Армирование плит, размеры их ребер и толщина должны соответствовать требованиям и рекомендациям строительных норм Республики Беларусь. Установлено, что жесткость железобетонных плит нелинейно зависит от нагрузки [1]. Согласно исследованиям, железобетонные плиты деформируются нелинейно, что сказывается на характере распределения внутренних сил в них. Образование и развитие трещин тоже оказывают влияние на величину прогибов плит.

С помощью подбора толщины плиты и высоты ребер можно получить оптимальную конструкцию. Для этого в статье использован метод оптимизации сокращения ресурсов и градиентного спуска по границе [2, 3]. Рассмотрены два примера по оптимизации прямоугольных железобетонных плит.

Статический расчет плиты

Статический расчет железобетонной плиты выполнен методом конечных элементов [4, 5]. Расчетная модель плиты построена из совокупности несовместных прямоугольных конечных элементов с четырьмя узлами и двенадцатью степенями свободы. Конечные элементы связаны друг с другом только в узлах, и поэтому яв-

ляются несовместными [5]. Плита шарнирно опирается по контуру и равномерно нагружена распределенной нагрузкой, которая представлена системой вертикальных узловых сил.

Известно, что железобетон при изгибе деформируется по нелинейному закону, имеющему сложный вид. В связи с этим конечные элементы представлены в виде m горизонтальных слоев, на участках которых модули упругости уточняются в зависимости от получаемых нормальных напряжений. Статический расчет плиты выполнен итерационно с применением релаксации решений.

Оптимизационный расчет

Для поиска экономически выгодной плиты применен метод оптимизации сокращения ресурсов с градиентным спуском по границе [6, 7]. В качестве целевой функции взята стоимость материалов (бетона и арматуры), затраченных на изготовление плиты. Оптимизацию выполняли в трехмерном пространстве, координатами которого являлись толщина самой полки t , высота ребра h и площадь арматуры A_s . То есть переменные t , h , A_s – параметры оптимизации [8]. Требуется минимизировать функцию $C(t, h, A_s)$, которая в случае наличия двух ребер может быть представлена как линейная следующего вида:

$$C(t, h, A_s) = C_t a (bt + 2b_r h) + 2C_{as} A_s a, \quad (1)$$

где C_t , C_{as} – стоимость бетона и арматуры; a , b – размер плиты в плане; t , h , b_r – толщина плиты, высота и ширина ребер; A_s – площадь арматуры по поперечному сечению ребра.

Вводили ограничения на параметры оптимизации:

$$t_{\min} \leq t \leq t_{\max}; \quad h_{\min} \leq h \leq h_{\max}; \quad A_{s,\min} \leq A_s, \quad (2)$$

где $t_{\min}$, $t_{\max}$, $h_{\min}$, $h_{\max}$, $A_{s,\min}$ – минимально и максимально допустимые значения толщины плиты, высоты ребра и площади продольной арматуры.

Также ставились ограничения по прочности бетона

$$R_u - \sigma_{beq} = 0, \quad (3)$$

где R_u – расчетное сопротивление бетона плиты; σ_{beq} – максимальное эквивалентное напряжение в бетоне.

Ограничение по прочности продольной арматуры

$$R_s - \sigma_{seq} = 0, \quad (4)$$

где R_s – расчетное сопротивление арматуры плиты; σ_{seq} – максимальное эквивалентное напряжение в арматуре.

Ограничение по жесткости плиты (прогибам)

$$W_{\max} - W_{\lim} = 0, \quad (5)$$

где $W_{\max}$, $W_{\lim}$ – максимальный и максимально допустимый прогибы плиты.

Ограничение по ширине раскрытия трещин

$$w_{\max} - w_{\lim} = 0, \quad (6)$$

где $w_{\max}$, $w_{\lim}$ – максимальная и максимально допустимая ширина раскрытия трещин.

Целевая функция $C(t, h, A_s)$ представляет собой плоскость в трехмерном пространстве, построенном на параметрах оптимизации t , h , A_s . Условия ограничения не могут быть выражены в явном виде через t , h , A_s , так как расчет плиты выполняли численным методом. Поэтому для поиска оптимального решения использовали метод градиентного спуска [9, 10]

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{a_i s}{\sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}}, \quad (7)$$

где x_i^k – значение i -го параметра оптимизации, полученного на k -й итерации; k – номер итера-

ции; a_i – коэффициент полинома целевой функции; s – шаг продвижения поисковой точки.

Для выполнения оптимального расчета плиты была составлена компьютерная программа Progress. В качестве примера выполнили оптимизационный расчет квадратной шарнирно опертой гладкой железобетонной плиты (рис. 1). Плита армирована сеткой, размеры которой и толщину определяла программа Progress в процессе оптимизационного расчета. При этом учитывалась нелинейность деформирования железобетона при изгибе.

Для расчета плиты принимали следующие исходные данные:

- размеры плиты в плане $a \times b = 5,2 \times 5,2$ м; толщина защитного слоя $C_z = 25$ мм; нижний предел толщины плиты $h_{\min} = 60$ мм; нижний предел площади арматуры $A_{s,\min} = 50$ мм²; модуль упругости арматурной стали $E_s = 200$ ГПа;
- модуль упругости бетона $E_b = 38$ ГПа; коэффициент поперечной деформации бетона $\nu = 0,18$; интенсивность равномерно распределенной нагрузки $p = 4,0$ кН/м²; стоимость бетона $C_t = 78$ руб./м³ и арматурной сетки $C_{as} = 2627$ руб./т; допустимый прогиб плиты $W_{\lim} = 25$ мм; допустимая ширина раскрытия трещин $w_{\lim} = 0,40$ мм; коэффициент безопасности по бетону $k_b = 1,5$.

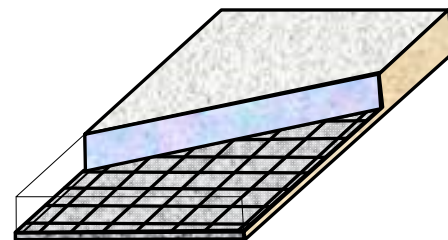


Рис. 1. Сплошная прямоугольная плита, армированная сеткой

Fig. 1. Solid rectangular slab reinforced with mesh

Оптимизационный расчет по программе Progress показал следующие результаты. При нагрузке $p = 4,0$ кН/м² и площади поперечного сечения арматурной сетки $A_s = 80$ мм²/м требуемая толщина плиты в оптимальном варианте 150 мм, что соответствует арматурной сетке 5Bp1/100/5Bp1/100. Стоимость материалов, затраченных на изготовление плиты, составила 405 руб.

Для оценки надежности примененного метода оптимизации с сокращением ресурсов рас-

смотрена задача оптимизации квадратной плиты с различной толщиной ее участков (рис. 2).

Пусть размер стороны квадратной плиты 6,2 м, модуль упругости $E = 20$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,18$. Средняя нагрузка составляет 10 кН/м^2 и сосредоточена на ребрах плиты. Приняты следующие ограничения: линейные $h_{\text{lim}} = 11$ см, по прочности $R = 8,4$ МПа, по жесткости $W_{\text{lim}} = 0,7$ мм. Ребра плиты армированы каркасом с двумя рабочими стержнями диаметром 12 мм каждый, а полка – сеткой 5Вр1/100/5Вр1/100.

Поскольку ставилась задача, используя метод сокращения ресурсов, оптимизировать квадратную плиту переменной жесткости по ее объему $V(h_1, h_2)$, сканирование выполняли только по двум параметрам h_1 и h_2 . Третий параметр – арматура – принимали, как консервативный, и в процессе поиска оптимального решения не изменяли. При этом учитывали нелинейный закон деформирования материала плиты [1]. Модуль упругости ставили в зависимость от относительной линейной деформации ε

$$E(\varepsilon) = \frac{A}{\sqrt[2]{\left(\frac{A}{2E_0}\right)^2 + A\varepsilon}}, \quad (8)$$

где A – коэффициент, $A = \frac{4E_0^2 E_s^2 \varepsilon_s}{E_0^2 - E_s^2}$; E_0 – начальный модуль упругости; E_s – фиксированный модуль упругости при относительной продольной деформации ε_s .

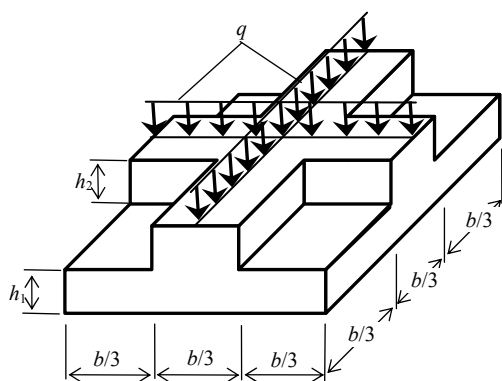


Рис. 2. Прямоугольная плита переменной толщины

Fig. 2. Rectangular plate of variable thickness

Расчет выполняли по программе Progress. В результате сканирования получены границы ограничений по прочности $\sigma = R$ и жесткости $W = W_{\text{lim}}$. Также получены трассы поиска

оптимального решения при старте из различных точек допустимой области (рис. 3).

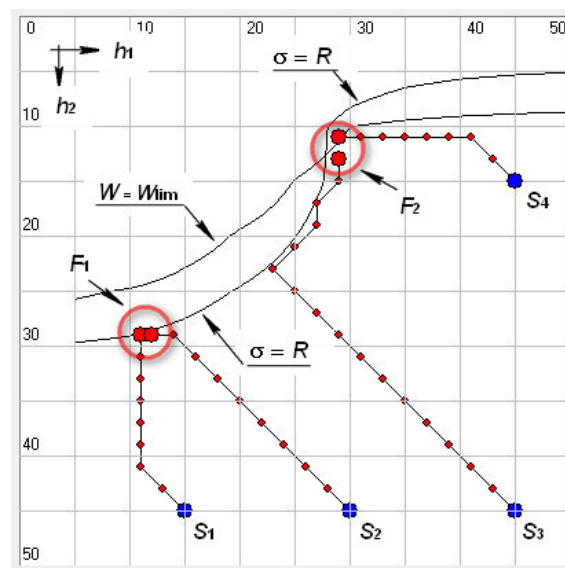


Рис. 3. Результаты сканирования и трассы поиска оптимального решения по программе Progress

Fig. 3. Scan results and traces of the search for the optimal solution using the Progress program

Сканирование показало (рис. 3), что допустимая область ограничена и по жесткости $W = W_{\text{lim}}$, и прочности $\sigma = R$ и имеет достаточно сложный вид. При этом обе границы пересекаются – на одном участке границу определяет прочность $\sigma = R$, а на другом – жесткость $W = W_{\text{lim}}$ (рис. 3). Как показали расчеты в Progress, финал поисков расположен в точках F_1 и F_2 . Две траектории S_1-F_1 и S_2-F_1 заканчивались в одной финальной точке F_1 , которая соответствует одному из оптимальных решений с параметрами $h_1 = 11$ см и $h_2 = 29$ см при объеме бетона $10,42 \text{ м}^3$. Две другие траектории поиска S_3-F_2 и S_4-F_2 заканчивались в другой финальной точке F_2 , соответствующей оптимальному решению с параметрами оптимизации $h_1 = 29$ см и $h_2 = 12$ см при объеме бетона $13,71 \text{ м}^3$. В первом случае поиск оптимального решения останавливался на границе $\sigma = R$, во втором – на границе $W = W_{\text{lim}}$ (рис. 3). Второе решение исключается, так как не приводит к абсолютному минимуму, а первое может быть принято как абсолютный минимум.

По значениям, полученным во втором примере, видно, что сканирование позволяет определить примерное положение абсолютного экстремума. В результате анализа определяется количество стартовых точек, которые должны

обеспечивать прохождение трассы поиска через найденные зоны и уточнение оптимального решения. Данный метод надежно гарантирует определение количества экстремумов целевой функции $V(h_1, h_2)$ и дает возможность получения абсолютного минимума. Такой способ будет эффективным и при решении задач с большим количеством параметров оптимизации.

ВЫВОДЫ

1. Построена конечно-элементная модель шарнирно опертой прямоугольной железобетонной плиты с учетом нелинейности деформирования бетона и образования трещин. Для получения статического решения использованы конечно-элементная модель и итерационный метод с релаксацией.

2. Выполнена задача оптимизации прямоугольной поперечно загруженной железобетонной плиты. В качестве целевой функции принимали стоимость плиты и объем бетона. Для получения решения использовали метод оптимизации сокращения ресурсов и градиентного спуска по границе.

3. На двух примерах рассмотрены оптимизация железобетонной плиты и сканирование области поиска решения. Приведен анализ трасс поиска решения при различных стартовых точках. Даны рекомендации поиска глобального минимума и подтверждена надежность предлагаемого метода оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вербицкая, О. Л. Оптимизация физически нелинейных прямоугольных пластин кусочно-постоянного сечения / О. Л. Вербицкая. Минск: БНТУ, 2011. 21 с.
2. Муймаров, К. В. Оптимизация железобетонных плит с выбором структур армирования / К. В. Муймаров. Брянск, 2019. 24 с.
3. Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в нелинейных расчетах пространственных железобетонных конструкций / С. Ф. Клованич, Д. И. Безушко. Одесса: Изд-во ОНМУ, 2009. 89 с.
4. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А. С. Городецкий [и др.]; под общ. ред. А. С. Городецкого. М.: Транспорт, 1981. 143 с.
5. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.
6. Вербицкая, О. Л. Оптимизация многослойной плиты на упругом основании методом сокращения ресурсов / О. Л. Вербицкая, Л. И. Шевчук // Дорожное строительство и его инженерное обеспечение: материалы Междунар. науч.-техн. конф. / редкол. С. Е. Кравченко (гл. ред.) [и др.]. Минск: БНТУ, 2020. С. 286–289.
7. Габасов, Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 280 с.
8. Шевчук, Л. И. Оптимизация центрально загруженной прямоугольной плиты на упругом основании /

Л. И. Шевчук, О. Л. Вербицкая // Автомобильные дороги, мосты и подземные сооружения: материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 90-летию Белор. нац. техн. ун-та, 21–22 окт. 2010 г. / отв. ред. И. И. Леонович [и др.]. Минск: БНТУ, 2010. Ч. 1. С. 373–378.

9. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1970. 720 с.
10. Филимонова, Е. А. Методика поиска оптимальных параметров железобетонных конструкций с учетом риска отказа / Е. А. Филимонова // Вестник МГСУ. 2012. № 10. С. 128–133.

Поступила 03.11.2021

Подписана в печать 11.01.2022

Опубликована онлайн 31.03.2022

REFERENCES

1. Verbitskaya O. L. (2011) *Optimization of Physically Non-linear Rectangular Plates of Piecewise Constant Section*. Minsk, Belarusian National Technical University Publ., 21 (in Russian).
2. Muymarov K. V. (2019) *Optimization of Reinforced Concrete Slabs with the Choice of Reinforcement Structures*. Bryansk. 24 (in Russian).
3. Klovaniich S. F., Bezushko D. I. (2009) *Finite Element Method in Nonlinear Calculations of Spatial Reinforced Concrete Structures*. Odessa, Odessa National Maritime University Publ., 89 (in Russian).
4. Gorodetskii A. S., Zovoritskii V. I., Lantukh-Lyashchenko A. I., Rasskazov A. O. (1981) *Finite Element Method in the Design of Transport Facilities*. Moscow, Transport Publ., 143 (in Russian).
5. Sekulovich M. (1993) *Finite Element Method*. Moscow, Stroiizdat Publ., 664 (in Russian).
6. Verbitskaya O. L., Shevchuk L. I. (2020) Optimization of a Multilayer Slab on an Elastic Foundation by Reducing Resources. *Dorozhnoe Stroitel'stvo i ego Inzhenernoe Obespechenie: Materialy Mezhdunar. Nauch.-Tekhn. Konf. [Road Construction and its Engineering Support: Proceedings of International Scientific and Technical Conference]*. Minsk, Belarusian National Technical University Publ., 286–289 (in Russian).
7. Gabasov R., Kirillova F. M. (1975) *Optimization Methods*. Minsk, Publishing House of Belarusian State University. 280 (in Russian).
8. Shevchuk L. I., Verbitskaya O. L. (2010) Optimization of a Centrally Loaded Rectangular Slab on an Elastic Foundation. *Avtomobil'nye Dorogi, Mosty i Podzemnye Sooruzheniya: Materialy Mezhdunar. Nauch.-Prakt. Konf., Posvyashch. 90-letiyu Belor. Nats. Tekhn. Un-ta, 21–22 Okt. 2010 g. Ch. 1* [Highways, Bridges and Underground Structures: Proceedings of International Scientific and Practical Conference Dedicated to the 90th Anniversary of the Belarusian National Technical University, Oct. 21–22, 2010. Part 1]. Minsk, Belarusian National Technical University Publ., 373–378 (in Russian).
9. Korn G., Korn T. (1970) *Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers*. Moscow, Nauka Publ., 720 (in Russian).
10. Filimonova E. A. (2012) Technique for Finding Optimal Parameters of Reinforced Concrete Structures, Taking Into Account the Risk of Failure. *Vestnik MGSU*, (10), 128–133 (in Russian).

Received: 03.11.2021

Accepted: 11.01.2022

Published online: 31.03.2022