

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-173-178>

УДК 004.383

## Спектральный анализ сигнала в системе Wolfram Mathematica

Канд. физ.-мат. наук, доц. М. А. Гундина<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2021  
Belarusian National Technical University, 2021

**Реферат.** Выполнены спектральный анализ сигналов различной природы, построение скалограммы сигнала с помощью вейвлета Морле, модификация скалограммы для получения более информативного графического представления сигнала. Путем преобразования Фурье строится спектральный анализ сигнала. С помощью системы Mathematica разработана модификация графического представления результата вейвлет-преобразования. Для этого использовалась вейвлет-скалограмма как двумерное представление исходного сигнала. На ней введена шкала для значения амплитуды сигнала в зависимости от времени и периода ее составляющих компонент. Такое графическое представление позволяет получить дополнительную информацию о динамических свойствах исходного сигнала. Разработана модификация представления скалограммы исходного сигнала для более полного спектрального анализа (определение периода составляющих компонент). Приведен пример использования модифицированной скалограммы для анализа сигнала, содержащего два импульса – звукового сигнала и белого шума. Базисным вейвлетом в этом случае является вейвлет Морле. Произведено сравнение скалограмм – полученной с помощью встроенной функции и модифицированной. Недостаток первой скалограммы – невозможность оценки периодичности сигнала, а ее достоинство – возможность оценки локализации импульса. Для модифицированной скалограммы достоинством является оценка периодичности сигнала, а недостатком – неточность определения диапазона локализации импульса. Для спектрального анализа в системе Mathematica рекомендуется использовать сочетание двух подходов (использование стандартной встроенной функции для определения локализации импульса) и модифицированной скалограммы (для определения периодов составляющих компонент).

**Ключевые слова:** Wolfram Mathematica, обработка сигнала, преобразование Фурье, спектральный анализ, частота сигнала, вейвлет-преобразование, звуковые файлы, скалограмма

**Для цитирования:** Гундина, М. А. Спектральный анализ сигнала в системе Wolfram Mathematica / М. А. Гундина // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 2. С. 173–178. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-173-178>

## Spectrum Analysis of Signal in Wolfram Mathematica System

М. А. Hundzina<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The purpose of this paper is a spectrum analysis of signals of various nature, construction of the signal scalogram using Morlet wavelet, modification of the scalogram to obtain a more informative graphic representation of the signal. Spectral analysis of the signal is constructed by means of the Fourier transform. A modification of the graphical representation of the result of the wavelet transform has been developed with the help of the Mathematica system. For this, a wavelet scalogram has been used as a two-dimensional representation of the original signal. A scale has been introduced on it for the value of the signal amplitude depending on the time and period of its constituent components. This graphical representation allows us to obtain additional information about the dynamic properties of the original signal. A modification of the representation of the original signal scalogram has been developed for a more complete spectrum analysis (determination of the period of the constituent components). The paper contains an example using a modified scalogram for the analysis of a signal

### Адрес для переписки

Гундина Мария Анатольевна  
Белорусский национальный технический университет  
ул. Я. Коласа, 22,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 292-67-84  
hundzina@bntu.by

### Address for correspondence

Hundzina Maryia A.  
Belarusian National Technical University  
22, Ya. Kolasa str.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 292-67-84  
hundzina@bntu.by

containing two pulses, an audio signal and white noise. The basic wavelet in this case is the Morlet wavelet. A comparison of the scalogram, obtained using the built-in function, and the modified scalogram has been made in the paper. The disadvantage of the first scalogram is the impossibility of assessing the frequency of the signal; its advantage is the ability to assess the localization of the pulse. For a modified scalogram, the advantage is the estimation of the signal periodicity, and the disadvantage is the inaccuracy in determining the range of pulse localization. For spectrum analysis in Mathematica, it is recommended to use a combination of two approaches (using a standard built-in function to determine the localization of the pulse) and a modified scalogram (to determine the periods of the constituent components).

**Keywords:** Wolfram Mathematica, signal processing, Fourier transform, spectrum analysis, signal frequency, wavelet transform, sound files, scalogram

**For citation:** Hundzina M. A. (2021) Spectrum Analysis of Signal in Wolfram Mathematica System. *Science and Technique*. 20 (2). 173–178. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-2-173-178> (in Russian)

## Введение

При обработке сигналов часто используется спектральный анализ, применяемый в задачах распознавания речи, обнаружения надводных кораблей и подводных лодок, в системах сжатия полосы речевого сигнала, при получении информации о скорости цели в радиолокационных системах [1, 2]. Поэтому развитие данного направления является актуальным для различных областей науки и техники. В отечественной и зарубежной литературе широко освещены существующие методы и задачи спектрального анализа сигналов, представлена подробная классификация методов спектрального анализа и рассмотрены наиболее применяемые из них на сегодняшний день. Особое внимание уделяется классическим методам спектрального анализа сигналов, построенных на преобразовании Фурье [3]. В этом случае сигнал раскладывается на элементарные гармонические колебания с различными частотами [4], а свойства и зависимости выражаются с помощью одной базисной экспоненциальной функции.

Известно, что преобразование Фурье нашло широкое применение в прикладных исследованиях. Одна из актуальных областей его использования – биометрическая идентификация человека по радужной оболочке [5]. Также обработке могут подвергаться речевые сообщения. Например, для сокрытия двоичных данных в речевых сообщениях могут использоваться преобразование Фурье и вейвлет-преобразование, что позволяет повысить стойкость скрытых сообщений [6, 7].

Спектральный анализ широко применяется для сбора дополнительной информации о данных, полученных промышленным оборудо-

ванием [8, 9]. Система Mathematica может использоваться для реализации известных и разработки новых методов обработки сигналов [10–12].

Цель исследования автора – проведение спектрального анализа некоторых сигналов, построение скалограммы сигнала с помощью встроенных возможностей системы, модификация скалограммы для получения дополнительной информации о сигнале.

## Основная часть

Путем преобразования Фурье строится спектральный анализ сигнала. С помощью системы Mathematica разработана модификация графического представления вейвлет-коэффициентов преобразования. Спектральный анализ является одним из наиболее распространенных видов анализа сигналов и в системе Mathematica имеет ряд особенностей.

**Сигнал, содержащий две периодические составляющие.** Рассмотрим сигнал, который представляет собой сумму синусоид  $\sin(100\pi t) + \sin(300\pi t)$ . График этого сигнала показан на рис. 1а.

Спектр вычисляется с помощью преобразования Фурье, примененного к массиву значений, которые соответствуют отсчетам сигнала во временной области. Вычисление комплексного спектра осуществляется с помощью функции *Fourier*. Здесь для его отображения используется модуль комплексного спектра (амплитудный спектр).

Для построения представления комплексного спектра применяется функция *ComplexListPlot*, результат действия которой изображен на рис. 1б.

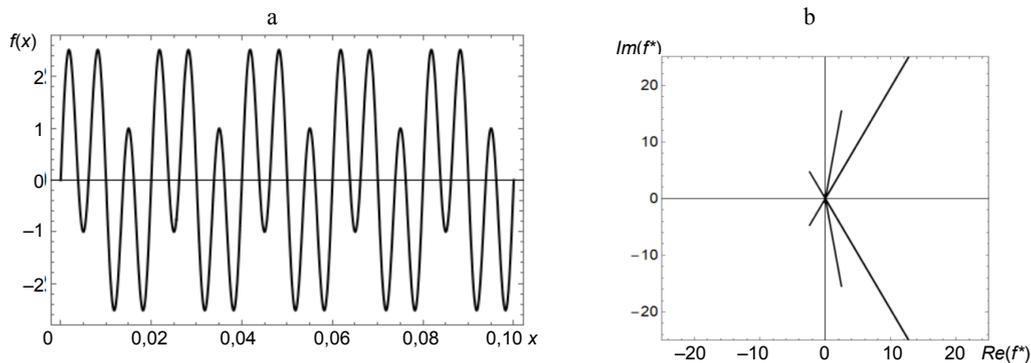


Рис. 1. График исходного сигнала (а) и представление комплексного спектра (б):  $f(x)$  – значение сигнала;  $Re(f^*)$ ,  $Im(f^*)$  – действительная и мнимая части преобразования Фурье

Fig. 1. Source signal graph (a) and complex spectrum representation (b):  $f(x)$  – signal value;  $Re(f^*)$ ,  $Im(f^*)$  – real and imaginary parts of the Fourier transform

Следует отметить, что графики на рис. 1 не дают достаточно информации о сигнале: для простых сигналов представляет собой отдельные линии, для сложных – набор отрезков. В этом случае необходимо построение графика модуля спектра (рис. 2).

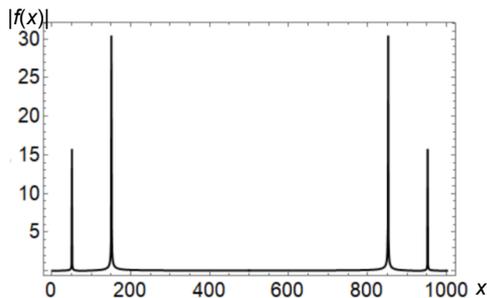


Рис. 2. Отображение модуля комплексного спектра:  $|f(x)|$  – абсолютное значение сигнала

Fig. 2. Complex spectrum module display:  $|f(x)|$  – absolute signal value

График на рис. 2 более информативен, но по оси абсцисс отложены отсчеты сигнала. На оси  $Ox$  необходимо представить вектор частот, соответствующий отсчетам спектра. Для этого определим число отсчетов в массиве и частоту дискретизации с помощью команды `signal/Length`.

Под разрешением спектрального анализа будем понимать минимальную разницу между соседними значениями частоты в спектре. Частота дискретизации определяется по формуле

$$fs = d/h,$$

где  $d$  – длина всего интервала;  $h$  – разрешение спектрального анализа.

Спектр вычисляется в диапазоне частот от нуля до частоты дискретизации с помощью следующей пользовательской функции:

$$fv[n\_]:=Table[i/(n-1)fs, \{i, 1, n-1\}].$$

Заметим, что спектр данного сигнала периодичен, значит, информативной частью спектра является его половина. Тогда вектор частот формируется как нормированный вектор от нуля до половины частоты дискретизации, причем размерность вектора равна размерности исходного массива:

$$fv1[n\_]:=Table[i/(n-1)fs, \{i, 1, n/2\}].$$

Массив точек, где первой координатой является частота, а второй – значение амплитуды, определяется следующим образом:

$$sp[n\_]:=Table[\{fv1[n][[i]], Abs[Fourier[sig]][[i]]\}, \{i, 1, n/2\}],$$

где  $sig$  – значение исходного сигнала.

Под скалограммой будем представлять двумерное описание одномерного сигнала, где на оси  $Ox$  задается время, на оси  $Oy$  – шкала, представляющая собой оценку локального спектра энергии [13, 14].

Для построения скалограммы существует встроенная функция `WaveletScalogram`. Вначале на исходный массив данных воздействуем вейвлет-преобразованием на основе вейвлета Морле, затем строим скалограмму. Команды, реализующие эти действия, выглядят следующим образом: `dwd=ContinuousWaveletTransform[sig, n]; MorletWavelet[[]]; WaveletScalogram[dwd]`. Результат выполнения перечисленных команд представлен на рис. 3а.

Данная функция строит представление коэффициентов вейвлет-преобразования и дает графическую интерпретацию в виде рядов цветных прямоугольников, в которых большие значения отражаются темнее, а каждая после-

дующая строка соответствует различным спецификациям индекса вейвлета. Недостатком такого представления является сложность определения периода компонент сигнала. Согласно рис. 3, периода – два, но их значения на графике отсутствуют.

Для устранения этого недостатка используем разработанную модифицированную скалограмму. Вначале определяем коэффициент вейвлет-преобразования как функцию от параметров  $a, b$  следующим образом:

$$W[a, b] := 1/a^{(1/2)} \text{Sum}[f[i - b]/a] dt[[i], \{i, 1, n\}].$$

Затем определяем массив коэффициентов для некоторого диапазона значений исходных параметров

$$w = \text{Flatten}[\text{Table}[\{a, b, W[a, b]\} // \text{Chop}, \{a, 1, n\}, \{b, 1, n\}], 1].$$

После этого строим контурное распределение  $\text{ListContourPlot}[w]$ . Результат выполнения этих команд представлен на рис. 3b.

Полученный спектр позволяет оценить точное значение частоты сигнала. Из рис. 3 видно, что периодами для данных компонент исходного сигнала являются значения 50 и 150.

**Сигнал, представляющий собой белый шум.** Воспроизведем белый шум с помощью встроенной функции системы  $\text{sig} = \text{RandomFunc}$

$\text{tion}[\text{WhiteNoiseProcess}[], \{0, 40\}]$ . График сигнала и его гистограмма представлены на рис. 4.

С целью оценки качества работы генератора проанализируем распределение значений отсчетов выходного сигнала и построим его спектр. Для представления информации о функции распределения сигнала можно использовать команду  $\text{Histogram}[\text{sig}, 10]$ . Чтобы оценить частотные характеристики сигнала, вычислим частоту дискретизации с помощью команды  $Fs = 1/(\text{sig}[[2]] - \text{sig}[[1]])$ . Модуль комплексного спектра можно оценить как  $sp = \text{Abs}[\text{Fourier}[\text{sig}]]$ .

Стандартная и модифицированная скалограммы изображены на рис. 5. Их интерпретация подтверждает информацию, что тот сигнал, который обрабатывается, представляет собой белый шум.

Из рис. 5 видно, что в спектре присутствуют отдельные дискретные составляющие на нижних частотах, но в широкой полосе частот сформированный сигнал близок к случайному процессу с постоянной спектральной плотностью мощности.

При необходимости могут быть проанализированы и другие характеристики сигнала, например интервал корреляции, дисперсия, пик-фактор и т. д.

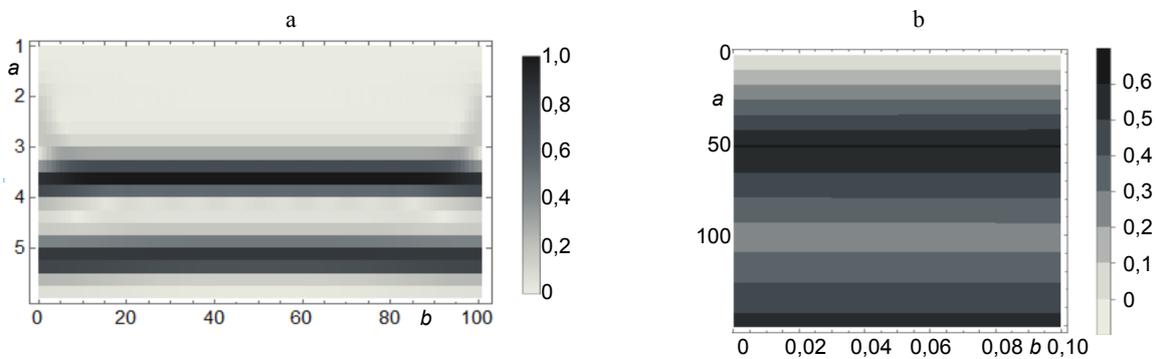


Рис. 3. Скалограмма сигнала, полученная с помощью встроенной функции (а), и модифицированная скалограмма (б):  $a, b$  – параметры разложения

Fig. 3. Signal scalogram obtained with the built-in function (a), and modified scalogram (b):  $a, b$  – decomposition parameters

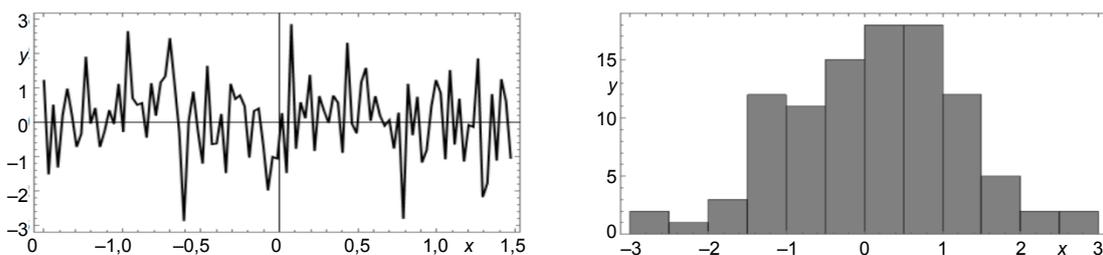


Рис. 4. Выходной сигнал схемы генератора шума и гистограмма сигнала:  $x, y$  – значения исходного сгенерированного сигнала

Fig. 4. Noise generator circuit output and signal histogram:  $x, y$  – values of original generated signal

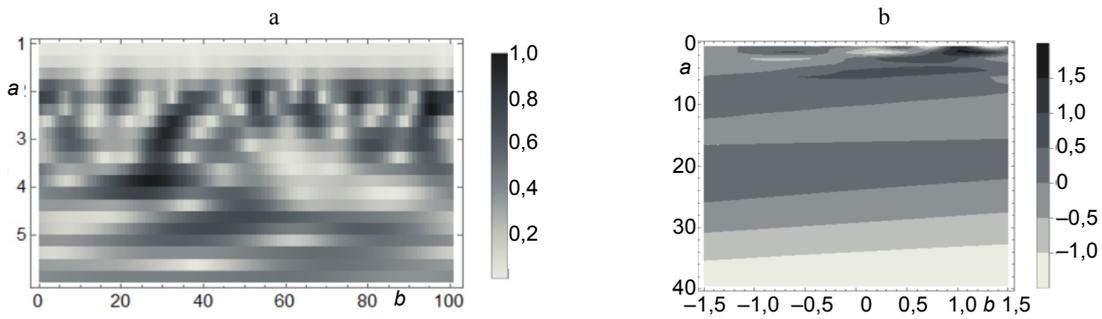


Рис. 5. Скалограмма сигнала: а – полученная с помощью встроенной функции; б – модифицированная; а, b – параметры разложения

Fig. 5. Signal scalogram: a – obtained using built-in function; b – modified; a, b – decomposition parameters

**Обработка звукового сигнала.** Описанный подход может применяться к обработке звуковых сигналов. В системе Mathematica есть набор стандартных звуков, а также возможность импорта звукового файла.

Значение массива данных может быть определено с помощью встроенной функции *Sound* следующим образом:

```
sig=Sound[SoundNote["C"]].
```

Обращение к встроенным образцам звука осуществляется с помощью функции *ExampleData*.

Рассмотрим сигнал звука ноты си:

```
sig=ExampleData[{"Sound", "SubwayTrain"}].
```

Результат действия функции *ListPlot[sig]* и распределение модуля комплексного спектра

ра представлены на рис. 6, скалограммы – на рис. 7.

**ВЫВОД**

При использовании модифицированной скалограммы появляется возможность определения по графику периода входящих в сигнал компонент и значений параметров, при которых коэффициенты вейвлет-преобразования достигают наибольших величин. Для спектрального анализа в системе Mathematica рекомендуется использование сочетания двух подходов: стандартной встроенной функции (для определения локализации импульса) и модифицированной скалограммы (для определения периодов составляющих компонент).

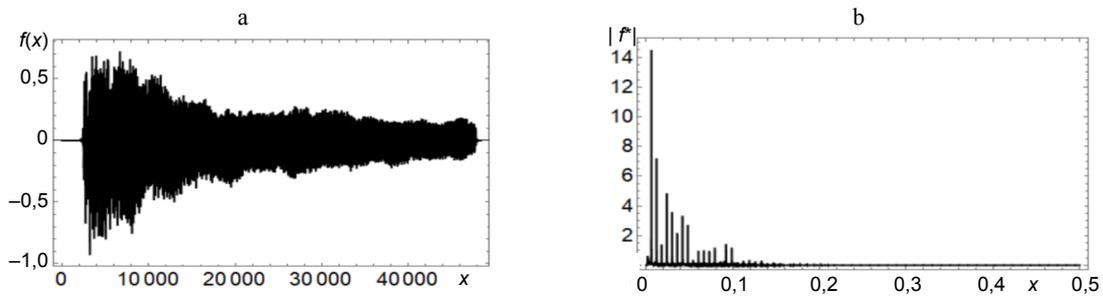


Рис. 6. График исходных сигналов и модуля комплексного спектра

Fig. 6. Plot of original signals and complex spectrum modulus

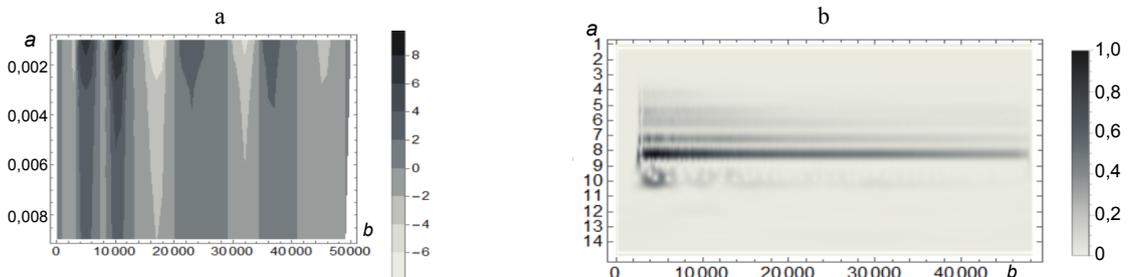


Рис. 7. Скалограмма сигнала, полученная с помощью встроенной (а) и пользовательской функций (б): а, b – параметры разложения

Fig. 7. Signal scalogram, obtained using built-in (a) and custom functions (b): a, b – decomposition parameters

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинер, Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. М.: Мир, 1978. 848 с.
2. Запрыгаев, С. А. Анализ и распознавание речевых сигналов на основе вейвлет-преобразований / С. А. Запрыгаев, А. А. Коновалов // Вестник ВГУ. Серия «Системный анализ и информационные технологии». 2009. № 2. С. 313–316.
3. Помехоустойчивое кодирование в современных форматах связи / А. С. Костюков [и др.] // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2019. Т. 15, № 2. С. 128–131.
4. Оценка эффективности различных методов анализа временных диагностических сигналов / Т. Н. Круглова [и др.] // Современные наукоемкие технологии. 2016. Т. 2, № 8. С. 237–241.
5. Идентификация изображений радужных оболочек глаз на основе спектрального анализа методами вейвлет-преобразования и преобразования Фурье / В. А. Частикова [и др.] // Научные труды КубГТУ. 2016. № 2. С. 341–347.
6. Рублёв, Д. П. Метод стеганографического встраивания сообщений в аудиоданные на основе вейвлет-преобразования / Д. П. Рублёв, О. Б. Макаревич, В. М. Федоров // Известия Южного федерального университета. Технические науки. 2009. Т. 100, № 11. С. 199–206.
7. Лебедев, А. А. Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье для преобразования данных аудиофайла при разработке ритма игры / А. А. Лебедев, Е. В. Трофименко // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. МНТК, Воронеж, 12–15 сент. 2016. С. 82–85.
8. Гундин, А. А. Обработка цифровых изображений при дефектоскопии поверхностей промышленных объектов / А. А. Гундин, М. А. Гундина, А. Н. Чешкин // Наука и техника. 2016. № 3. С. 225–232.
9. Гундина, М. А. Использование сферических гармоник для исследования радиоизлучений / М. А. Гундина // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. 2019. Т. 102, № 1. С. 11–16.
10. Lutovac, M. D. Design for Signal Processing Using MatLab and Mathematica / M. D. Lutovac, D. V. Tomic, B. L. Evans. Prentice Hall. 2001. 756 p.
11. Evans, B. L. Mathematica as an Educational Tool for Signal Processing / B. L. Evans, J. H. McClellan, K. A. West // European Neuropsychopharmacology. 1991. Vol. 2. P. 1162–1166.
12. Vaseghi, S. V. Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction / S. V. Vaseghi. Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd. 2008. 514 p.
13. Benitez, R. A Wavelet-Based Tool for Studying Non-Periodicity / R. Benitez, V. J. Bolos, M. E. Ramirez // Comput. Math. Appl. 2010. Vol. 60, No 3. P. 634–641. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.05.010>.
14. WaveletScalogram – Wolfram Mathematica [Electronic Resource]. Mode of access: <https://reference.wolfram.com/language/ref/WaveletScalogram.html>. Dade of access: 01.05.2020.
5. Zapryagaev S. A., Konovalov A. A. (2009) Analysis and Recognition of Speech Signals Based on Wavelet Transforms. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Sistemnyi Analiz i Informatsionnye Tekhnologii"* = *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, (2), 313–316 (in Russian).
3. Kostyukov A. S., Bashkirov A. V., Nikitin L. N., Bobylkin I. S., Makarov O. Yu. (2019) Noise-Resistant Coding in Modern Communication Formats. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta = Bulletin of Voronezh State Technical University*, 15 (2), 128–131 (in Russian).
4. Kruglova T. N., Shurygin D. N., Litvin D. A., Tarkovalin S. A., Vlasov A. S., Ryzhenkov S. I., Artsebashev V. V. (2016) Evaluation of the Effectiveness of Various Methods for Analysis of Temporary Diagnostic Signals. *Sovremennye Naukoyemkie Tekhnologii = Modern High Technologies*, 2 (8), 237–241 (in Russian).
5. Chastikova V. A., Sotnikov V. V., Zinoveva S. V., Sheludko A. A. (2016) Identification of Iris Images Based on Spectral Analysis Using Wavelet Transform and Fourier Transform. *Nauchnye Trudy Kubanskogo Gosudarstvennogo Tekhnologicheskogo Universiteta = Scientific Works of Kuban State Technological University*, (2), 341–347 (in Russian).
6. Rublev D. P., Makarevich O. B., Fedorov V. M. (2009) Method of Steganographic Embedding of Messages in Audio Data Based on Wavelet Transform. *Izvestiya Yuzhnogo Federalnogo Universiteta. Tekhnicheskie Nauki = Proceedings of the Southern Federal University. Technical Sciences*, 100 (11), 199–206 (in Russian).
7. Lebedev A. A., Trofimenko E. V. (2016) Using the Fast Fourier Transformation Algorithm to Convert Audio File Data in Developing the Rhythm of a Game. *Aktual'nye Problemy Prikladnoi Matematiki, Informatiki i Mekhaniki: sb. tr. MNTK, Voronezh, 12–15 Sent.* [Actual Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference, Voronezh, Sept. 12–15], 82–85 (in Russian).
8. Hundzin A. A., Hundzina M. A., Cheshkin A. N. (2016) Processing of Digital Images of Industrial Object Surfaces during Non-Destructive Testing. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, (3), 225–232 (in Russian).
9. Hundzina M. A. (2019) Use of Spherical Harmonics for Study of Radio Emissions. *Vesnik Vitsebskaga Dzyarzhavnaga Universiteta* [Bulletin of Vitebsk State University], 102 (1), 11–16 (in Russian).
10. Lutovac M. D., Tomic D. V., Evans B. L. (2001) *Design for Signal Processing Using MatLab and Mathematica*. Prentice Hall. 756.
11. Evans B. L., McClellan J. H., West K. A. (1991) Mathematica as an Educational Tool for Signal Processing. *European Neuropsychopharmacology*, 2, 1162–1166.
12. Vaseghi S. V. (2008) *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*. Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd. 514.
13. Benitez R., Bolos V. J., Ramirez M. E. (2010) A Wavelet-Based Tool for Studying Non-Periodicity. *Computers & Mathematics with Applications*, 60 (3), 634–641. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.05.010>.
14. *WaveletScalogram – Wolfram Mathematica*. Available at: <https://reference.wolfram.com/language/ref/WaveletScalogram.html>. (Accessed 1 May 2020).

Поступила 08.06.2020

Подписана в печать 25.08.2020

Опубликована онлайн 30.03.2021

REFERENCES

1. Rabiner L., Gould B. (1978) *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Moscow, Mir Publ. 848 (in Russian).

Received: 08.06.2020

Accepted: 25.08.2020

Published online: 30.03.2021