

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-1-16-25>

УДК 539.3

Моделирование и численное решение задачи с односторонними связями и трением при динамическом действии нагрузки

Докт. техн. наук, доц. А. А. Лукашевич¹⁾,
кандидаты техн. наук Н. К. Лукашевич¹⁾, Н. В. Островская¹⁾

¹⁾Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет
(Санкт-Петербург, Российская Федерация)

© Белорусский национальный технический университет, 2021
Belarusian National Technical University, 2021

Реферат. Задачи с односторонними связями нередки в практике расчетов строительных конструкций и сооружений. Определенные трудности в их решении возникают при трении на контакте, а также при динамическом действии нагрузки. Известно, что такие задачи с математической точки зрения являются недостаточно корректными, решение их усложняется и зависит от истории нагружения и деформирования конструкции. В то же время возможность учета сложных условий работы конструкции делает ее расчет более полным и точным. В статье рассмотрено решение динамической контактной задачи на основе метода конечных элементов и метода шагового нагружения. Односторонние связи с кулоновским трением моделируются с помощью контактных конечных элементов рамно-стержневого типа. Для соблюдения ограничений в условиях по предельному трению-скольжению применяется способ компенсирующих нагрузок. На основе рассмотренной дискретной модели контакта и метода пошагового анализа разработан численный алгоритм, позволяющий в одном пошаговом процессе выполнять одновременно интегрирование уравнений движения и реализацию контактных условий с трением Кулона. С помощью предложенного подхода получены и проанализированы численные решения задачи контакта сооружения с основанием при различных параметрах динамической нагрузки. Сравнение результатов с решением, выполненным известным методом итераций по предельным силам трения, позволяет сделать вывод об эффективности и надежности разработанного алгоритма при сложных условиях контакта и динамическом нагружении.

Ключевые слова: конструкция, контактное взаимодействие, односторонние связи, трение Кулона, пошаговый анализ, динамическое нагружение, дискретная модель, метод конечных элементов

Для цитирования: Лукашевич, А. А. Моделирование и численное решение задачи с односторонними связями и трением при динамическом действии нагрузки / А. А. Лукашевич, Н. К. Лукашевич, Н. В. Островская // *Наука и техника*. 2021. Т. 20, № 1. С. 16–25. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-1-16-25>

Modelling and Numerical Solution of the Problem with Unilateral Constraints and Friction under Dynamic Action of the Load

A. A. Lukashevich¹⁾, N. K. Lukashevich¹⁾, N. V. Ostrovskaya¹⁾

¹⁾Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
(Saint Petersburg, Russian Federation)

Abstract. Problems with unilateral constraints are not uncommon in the practice of calculating building construction and structures. Certain difficulties in solving them arise during contact friction, as well as the dynamic action of the load. It is known that such problems from a mathematical point of view are not correct enough, their solution becomes more

Адрес для переписки

Лукашевич Анатолий Анатольевич
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
2-я Красноармейская ул., 4,
190005, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
Тел.: +7 911 821-25-53
aaluk@bk.ru

Address for correspondence

Lukashevich Anatoly A.
Saint Petersburg State University
of Architecture and Civil Engineering
4, Vtoraya Krasnoarmeiskaya str.,
190005, Saint Petersburg, Russian Federation
Tel.: +7 911 821-25-53
aaluk@bk.ru

complicated and depends on the history of loading and deformation of the structure. At the same time, the ability to take into account the complex working conditions of the structure makes its calculation more complete and accurate. The paper considers the solution of a dynamic contact problem on the basis of the finite element method and the step-by-step loading method. Unilateral constraints with Coulomb friction are modeled using contact finite elements of a frame-rod type. The method of compensating loads is applied in order to comply with the limitations under ultimate friction-sliding conditions. Based on the considered discrete contact model and the step-by-step analysis method, a numerical algorithm has been developed, which allows in one step-by-step process to integrate simultaneously the equations of motion and implement contact conditions with Coulomb friction. With the help of the proposed approach, numerical solutions of the problem pertaining to a structure contact with the base have been obtained and analyzed at various parameters of dynamic load. Comparison of the results with the solution obtained by the well-known iteration method on the ultimate friction forces allows to conclude about the efficiency and reliability of the developed algorithm under complex contact conditions and dynamic loading.

Keywords: structure, contact interaction, unilateral constraints, Coulomb friction, step-by-step analysis, dynamic loading, discrete model, finite element method

For citation: Lukashovich A. A., Lukashovich N. K., Ostrovskaya N. V. (2021) Modelling and Numerical Solution of the Problem with Unilateral Constraints and Friction under Dynamic Action of the Load. *Science and Technique*. 20 (1), 16–25. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2021-20-1-16-25> (in Russian)

Введение

Конструктивно нелинейные задачи с односторонними связями нередки в практике расчетов различного рода конструкций и сооружений. При этом наибольшую трудность в решении представляют задачи с усложненными условиями контакта, в частности при учете контактного трения, динамического действия нагрузки. Такого рода задачи с математической точки зрения являются недостаточно корректными (в этом случае не удается доказать существования и единственности решения), что значительно усложняет их численное решение. Статические контактные задачи с идеальными и неидеальными односторонними связями рассматривались в [1–10]. В то же время имеются расчеты конструкций, где нужно учитывать динамическое действие приложенных нагрузок [11–14].

При решении конструктивно нелинейных контактных задач применяются как итерационные (последовательных приближений), так и инкрементальные (пошаговые) методы. Так, в [11, 12] для численного решения динамической контактной задачи используется итерационный алгоритм корректировки скоростей типа Удзавы, в [15, 16] предлагается вариант итерационного алгоритма Шварца. В [17, 18] на основе вариационных формулировок контактных задач применяются различные варианты метода итераций по предельным силам трения. Как отмечается в этих и других работах, использование методов последовательных приближений позволяет строить экономичные итерационные алгоритмы, обладающие вычислительной устойчивостью и гарантирующие выполнение контактных условий для идеальных односторонних связей. Однако выполнение

условий трения-скольжения на контакте здесь имеет определенные трудности и не всегда может быть реализовано.

В [19] для выполнения условий контакта применяется слабая формулировка в виде эллиптического квазивариационного неравенства, решение вариационной задачи производится с помощью неявной схемы интегрирования по времени. Различные схемы численного решения уравнений движения также рассматриваются в [20, 21]. В первой из них на каждом временном шаге используются множители Лагранжа и принцип минимальной работы, во второй – на каждом шаге решается невыпуклая линейная задача дополнителности. Достоинство шаговых методов в том, что решение задачи становится известно на любой стадии динамического нагружения. При этом имеется возможность точнее удовлетворить условиям трения-скольжения, поскольку решение задачи с учетом трения зависит от истории нагружения и деформирования конструкции [1–3]. При динамическом нагружении конструктивная нелинейность односторонних связей проявляется в изменении состояния односторонних связей по времени.

Данная статья посвящена построению расчетных моделей и методов решения задач с неидеальными односторонними связями при динамическом действии нагрузки. Для решения применяется дискретизация задачи по времени с использованием прямых схем интегрирования уравнений движения [22]. Расчетный шаг по времени назначается из анализа состояния контакта на заданном интервале времени Δt . Для ожидаемого момента изменения состояния контакта уточняется величина шага интегрирования и выполняется его перерасчет. Выполнение условий предельного трения-скольжения

производится с помощью корректировки контактных усилий по методу компенсирующих нагрузок. Таким образом, рассматриваемый подход имеет ясную физическую природу и предоставляет возможность отслеживать текущее состояние конструкции в любой момент времени.

Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим динамическую задачу контактного взаимодействия упругодеформируемых тел V^+ и V^- , имеющих контактирующие поверхности S_c^+ и S_c^- соответственно. Для конечно-элементной модели данной системы справедливо матричное уравнение движения с начальными условиями [22]:

$$[M]\{\ddot{U}^{t+\Delta t}\} + [C]\{\dot{U}^{t+\Delta t}\} + [K]\{U^{t+\Delta t}\} = \{P^{t+\Delta t}\};$$

$$\{U\}_{t=0} = \{U_0\}; \quad \{\dot{U}\}_{t=0} = \{\dot{U}_0\}, \quad (1)$$

где $[M]$, $[C]$, $[K]$ – матрица масс, демпфирования и жесткости системы соответственно; $\{U^{t+\Delta t}\}$, $\{\dot{U}^{t+\Delta t}\}$, $\{\ddot{U}^{t+\Delta t}\}$, $\{P^{t+\Delta t}\}$ – вектор узловых перемещений, скоростей, ускорений и внешней узловой нагрузки в момент времени $t + \Delta t$.

Принимается модель пропорционального демпфирования (по Рэлею) $[C] = \alpha[M] + \beta[M]$.

На поверхности S_g^\pm заданы граничные условия в усилиях, на S_u^\pm – в перемещениях.

Представив $U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta U^{t+\Delta t}$, сведем решение нелинейной динамической задачи к решению последовательности линейных задач на основе метода пошагового анализа изменения состояния контакта [23]:

$$[M]\{\ddot{U}^{t+\Delta t}\} + [C]\{\dot{U}^{t+\Delta t}\} + [K]\{\Delta U^{t+\Delta t}\} =$$

$$= \{P^{t+\Delta t}\} - [K]\{U^t\}; \quad (2)$$

$$\{U\}_{t=0} = \{U_0\}; \quad \{\dot{U}\}_{t=0} = \{\dot{U}_0\}.$$

Для решения уравнения (2) используется конечно-разностная схема Ньюмарка, предполагающая линейный закон изменения ускорений в интервале Δt . При интегрировании применяются следующие зависимости между перемещениями, скоростями и ускорениями в момент времени $t + \Delta t$ [22]:

$$\ddot{U}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} (\Delta U^{t+\Delta t} - \Delta t \dot{U}^t) - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \ddot{U}^t; \quad (3)$$

$$\dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + ((1-\beta)\ddot{U}^t + \beta\ddot{U}^{t+\Delta t})\Delta t,$$

где $\alpha = 1/4$, $\beta = 1/2$ – параметры интегрирования, принятые из условия постоянного среднего ускорения в интервале Δt .

Выразив с помощью соотношений (3) ускорения $\ddot{U}^{t+\Delta t}$ и скорости $\dot{U}^{t+\Delta t}$ в (2) через перемещения $U^{t+\Delta t}$, получим матричное уравнение для определения $\Delta U^{t+\Delta t}$

$$[\widehat{K}]\{\Delta U^{t+\Delta t}\} = \{\widehat{P}^{t+\Delta t}\}, \quad (4)$$

где $[\widehat{K}] = [K] + \alpha_0[M] + \alpha_1[C]$; $\{\widehat{P}^{t+\Delta t}\} = \{P^{t+\Delta t}\} + [M](\alpha_2\{\dot{U}^t\} + \alpha_3\{\ddot{U}^t\}) + [C](\alpha_4\{\dot{U}^t\} + \alpha_5\{\ddot{U}^t\}) - [K]\{U^t\}$; $\alpha_0 - \alpha_5$ – коэффициенты, равные:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2}; \quad \alpha_1 = \frac{\beta}{\alpha\Delta t}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t};$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; \quad \alpha_4 = \frac{\beta}{\alpha} - 1; \quad \alpha_5 = \frac{\beta\Delta t}{2\alpha} - \Delta t.$$

В произвольный момент времени t' , находящийся в интервале Δt ($t \leq t' \leq t + \Delta t$), значения перемещений $U(t')$, скоростей $\dot{U}(t')$ и ускорений $\ddot{U}(t')$ могут быть вычислены по формулам, полученным из (3) путем замены величины $t + \Delta t$ на t' :

$$\ddot{U}(t') = \ddot{U}^t + \frac{t' - t}{\Delta t} (\ddot{U}^{t+\Delta t} - \ddot{U}^t);$$

$$\dot{U}(t') = \dot{U}^t + \frac{t' - t}{2} (\ddot{U}^t + \ddot{U}^{t+\Delta t}); \quad (5)$$

$$U(t') = U^t + (t' - t)\dot{U}^t + \frac{(t' - t)^2}{4} (\ddot{U}^t + \ddot{U}^{t+\Delta t}).$$

Кроме того, при решении динамической задачи с односторонними связями и трением дополнительно к начальным и граничным условиям на S_g^\pm , S_u^\pm должны выполняться контактные условия на S_c^\pm . Контактное взаимодействие будем моделировать с помощью рамностержневых контактных конечных элементов (ККЭ) [4, 9]. Данные ККЭ вводятся между контактирующими поверхностями взаимодействующих тел, тем самым дискретизируя пограничный слой между ними (рис. 1).

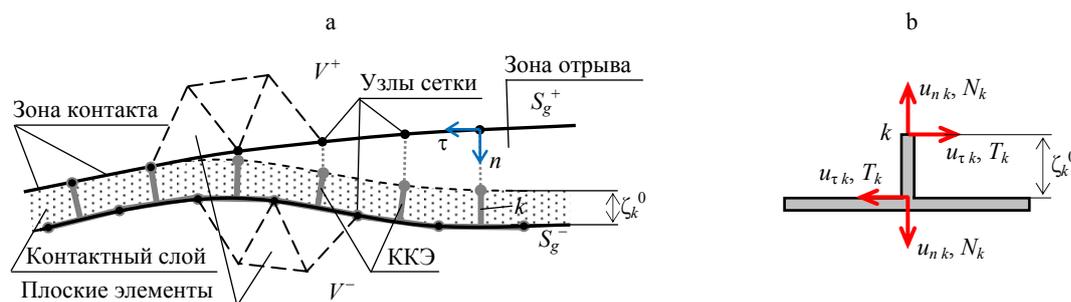


Рис. 1. Моделирование контактного взаимодействия с помощью контактных конечных элементов (ККЭ):
а – ККЭ в зоне контакта; б – перемещения и усилия в ККЭ

Fig. 1. Modeling of contact interaction using contact finite elements (CFE):
a – CFE in the contact zone; b – displacements and forces in the CFE

Запишем условия на контакте в терминах перемещений и усилий для каждой k -й дискретной односторонней связи (т. е. k -го ККЭ) для момента времени t :

$$u_{nk}^t \geq 0; N_k^t \leq 0; u_{nk}^t N_k^t = 0, k \in S_c; \quad (6)$$

$$|T_k^t| \leq |T_{Uk}^t|; T_k^t \dot{u}_{tk}^t \geq 0; (T_k^t - T_{Uk}^t) \dot{u}_{tk}^t = 0, k \in S_c, \quad (7)$$

где u_{nk}^t, u_{tk}^t – взаимное смещение контактных поверхностей для k -й дискретной односторонней связи по нормали и по касательной; $\dot{u}_{tk}^t = \partial u_{tk}^t / \partial t$ – скорость взаимного касательного смещения; N_k^t, T_k^t – контактное усилие в направлении нормали и касательной (усилия в k -м ККЭ); $T_{Uk}^t = -f_k N_k^t$ – предельная «кулоновская» сила трения для k -го контакта; $f_k \geq 0$ – коэффициент трения-скольжения.

Таким образом, состояние контакта в односторонней связи определяется условиями $u_{nk}^t = 0, N_k^t < 0$, состояние отрыва – условиями $u_{nk}^t > 0, N_k^t = 0$. Условию $\dot{u}_{tk}^t = 0, |T_k^t| < |T_{Uk}^t|$ отвечает состояние сцепления (допредельного трения), а $\dot{u}_{tk}^t \neq 0, |T_k^t| = |T_{Uk}^t|$ – состояние проскальзывания, при этом направление проскальзывания совпадает с направлением поперечной силы. Событием будем называть момент изменения текущего состояния на противоположное: событие проскальзывания (из состояния сцепления), событие сцепления (наоборот), событие контакта (включение односторонней связи), событие отрыва (выключение связи).

Представим алгоритм пошагового анализа при решении динамической контактной задачи. Будем считать, что в момент времени t состояние односторонних связей известно – часть их ($k \in S_{1c}$) находится в состоянии контакта со сцеплением, другая часть ($k \in S_{2c}$) – в состоянии контакта с проскальзыванием, оставшиеся связи ($k \in S_{3c}$) – в состоянии отрыва, при этом $S_c = S_{1c} \cup S_{2c} \cup S_{3c}$.

1. Выполняется очередной шаг интегрирования Δt . После решения уравнения (4) находятся величины $\Delta u_{nk}^{t+\Delta t}, \Delta u_{tk}^{t+\Delta t}, u_{nk}^{t+\Delta t}, u_{tk}^{t+\Delta t}, \dot{u}_{tk}^{t+\Delta t}, N_k^{t+\Delta t}, T_k^{t+\Delta t}, T_{Uk}^{t+\Delta t}$ для каждой k -й односторонней связи в момент времени $t + \Delta t$.

2. Для каждой k -й связи определяется момент \hat{t}_k наступления ближайшего по времени события на контакте:

– момент наступления события проскальзывания

$$\hat{t}_k = t + \Delta t \left(\frac{T_{Uk}^t - T_k^t}{(T_k^{t+\Delta t} - T_k^t) - (T_{Uk}^{t+\Delta t} - T_{Uk}^t)} \right), k \in S_{1c}; \quad (8)$$

– момент наступления события сцепления

$$\hat{t}_k = t + \Delta t \left(\frac{-\dot{u}_{tk}^t}{\dot{u}_{tk}^{t+\Delta t} - \dot{u}_{tk}^t} \right), k \in S_{2c}; \quad (9)$$

– моменты наступления соответственно событий отрыва или контакта:

$$\hat{t}_k = t + \Delta t \left(\frac{-N_k^t}{N_k^{t+\Delta t} - N_k^t} \right), k \in S_{1c}, S_{2c}; \quad (10)$$

$$\hat{t}_k = t + \Delta t \left(\frac{-u_{nk}^t}{u_{nk}^{t+\Delta t} - u_{nk}^t} \right), k \in S_{3c}.$$

С помощью метода последовательных приближений может быть произведено итерационное уточнение величины \hat{t}_k , время расчета при этом возрастает незначительно [13, 23].

3. Устанавливается момент наступления ближайшего по времени очередного события: $\hat{t} = \min(\hat{t}_k), k \in S_c$. При $\hat{t} > t + \Delta t$ назначается базовый шаг Δt , и шаговый процесс продолжается с пункта 1. Если $t < \hat{t} < t + \Delta t$ – текущий шаг пересчитывается при $\Delta \hat{t} = \hat{t} - t$.

4. На каждом шаге интегрирования с целью выполнения условий по предельному трению-скольжению используется метод компенсирующих нагрузок [9, 23]. Корректировка сил трения на контакте производится путем приложения к соответствующим противоположащим узлам компенсирующих сил

$$\hat{F}_{\tau k} = -\Delta \hat{T}_{Uk} = -\frac{\Delta \hat{t}}{\Delta t} (T_{Uk}^{t+\Delta t} - T_{Uk}^t), k \in S_{2c}. \quad (11)$$

Одновременно корректируется величина поперечного усилия в k -м контактном элементе $T_k^{\hat{t}} = T_k^t + \Delta \hat{T}_{Uk}$.

5. В результате выполнения уточненного шага $\Delta \hat{t}$ определяются перемещения $u_{nk}^{\hat{t}}$, скорости $\dot{u}_{\tau k}^{\hat{t}}$ и усилия $N_k^{\hat{t}}, T_k^{\hat{t}}$ для момента времени \hat{t} . Производится проверка условий наступления очередного события на контакте: при $T_k^{\hat{t}} = T_{Uk}^{\hat{t}}$ – это будет проскальзывание, при $\dot{u}_{\tau k}^{\hat{t}} = 0$ – сцепление, при $N_k^{\hat{t}} = 0$ – выключение связи, при $u_{nk}^{\hat{t}} = 0$ – включение связи. В случае несрабатывания соответствующего условия необходимо повторить уточнение величины \hat{t} в интервале (t, \hat{t}) или $(\hat{t}, t + \Delta t)$.

6. При наступлении ожидаемого события производится изменение текущего состояния для соответствующей односторонней связи.

Назначается следующий шаг интегрирования Δt , и шаговый процесс продолжается с пункта 1.

Изложенный алгоритм реализован в вычислительной программе [24], предназначенной для проведения численных исследований различных моделей и алгоритмов решения задач с односторонними связями. Для сравнительной оценки полученных результатов в данной программе также реализованы известные методы расчета систем с односторонними связями и трением, в частности метод итераций по предельным силам трения [17, 18].

Результаты численных исследований

Продемонстрируем рассмотренный подход на примере расчета плоской стержневой системы, которая, например, может моделировать участок трубопровода с перепадом рельефа в условиях динамического нагружения (рис. 2а). Считается, что система закреплена от боковых смещений (т. е. из плоскости xy) и опирается на две жесткие опоры, допускающие отрыв и проскальзывание опирающейся на них конструкции. Находящаяся изначально в состоянии покоя, система нагружается импульсной нагрузкой $P(t)$ с амплитудой 100 кН (рис. 2б). Величины жесткости стержней: $EA = 9 \cdot 10^6$ кН, $EI = 2 \cdot 10^6$ кН·м²; распределенная масса $m = 0,4$ т/м. Матрица демпфирования приближенно считалась пропорциональной матрице масс $[C] = \alpha[M]$, при этом коэффициенты демпфирования $\alpha = 0,2\omega_1, \beta = 0$. Для моделирования одностороннего контакта с трением-скольжением на опорах применялись рамно-стержневые контактные элементы [4, 9].

Ввиду относительно большой жесткости сечения трубопровода, проблема динамической устойчивости не рассматривается. Поскольку продолжительность действия импульсной нагрузки (0,1 с) на порядок больше времени прохождения звука на двух размерах пролета (0,008 с), волновыми процессами в балке также пренебрегаем.

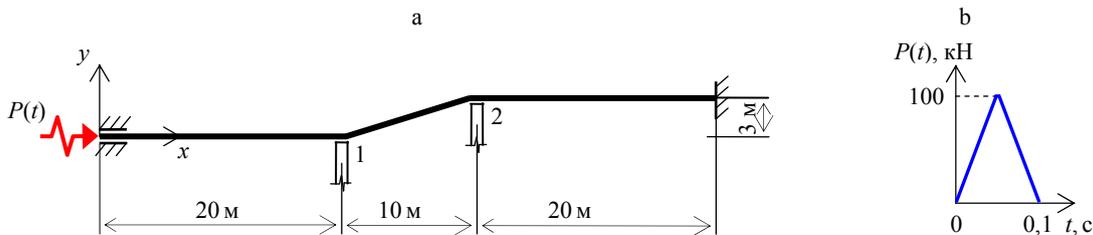


Рис. 2. Стержневая система на односторонних опорах

Fig. 2. Framed system based on unilateral supports

В исходном состоянии нормальные контактные усилия N_k^0 приравнивались усилиям от собственного веса конструкции, при этом $T_k^0 = 0$. С началом динамического воздействия возможны изменения состояния контакта рассчитываемой системы: проскальзывание на опорах и обратный переход в состояние сцепления, а также отрыв от опор и последующий контакт с ними.

Численное решение рассматриваемой задачи как предложенным, так и для сравнительной оценки альтернативным методом производилось с помощью компьютерной программы [24]. Оценивалось влияние величины коэффициента трения f на поведение конструкции при заданной динамической нагрузке. Так, на рис. 3, 4 представлены графики смещений конструкции по времени при ее проскальзывании

или отрыве от первой опоры (значение коэффициента f варьировалось от 0 до 1,3).

Изменение контактных усилий T_k и N_k и состояния опорных контактов по времени (при $f = 1,3$) приводится на рис. 5, 6.

Графики, отображающие зависимости между перемещениями опорных узлов конструкции и значениями коэффициента трения на опоре, представлены на рис. 7.

Достоверность полученных результатов подтверждается программной проверкой выполнения условий равновесия и совместности деформаций системы после каждого шага по времени. Кроме того, для сравнительной оценки результатов выполнялся расчет с использованием альтернативного алгоритма, в котором контактные условия на каждом временном шаге реализуются с помощью метода итераций по предельным силам трения (рис. 5 – пунктир).

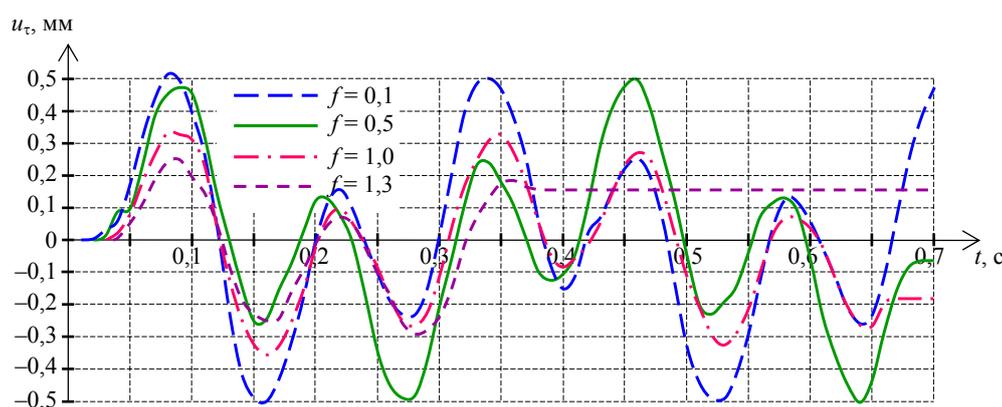


Рис. 3. Горизонтальные смещения конструкции на первой опоре по времени

Fig. 3. Horizontal displacements of structure on the first support in time

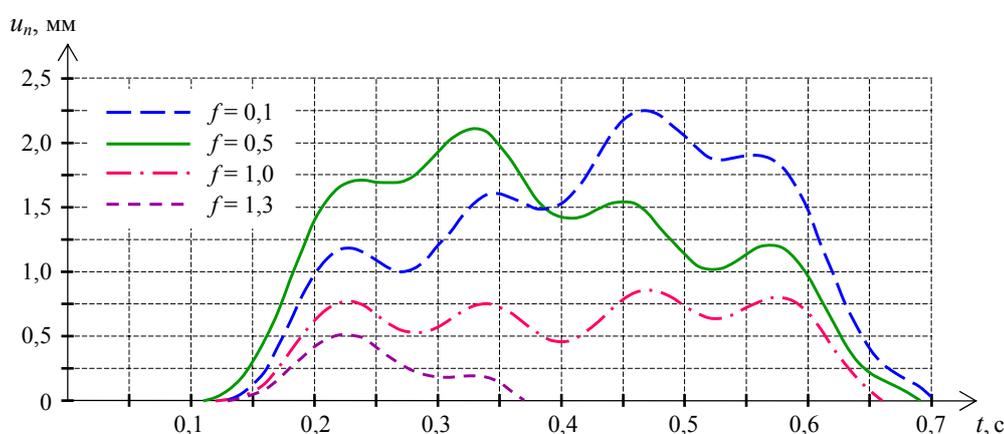


Рис. 4. Вертикальные смещения конструкции на первой опоре по времени

Fig. 4. Vertical displacements of structure on the first support in time

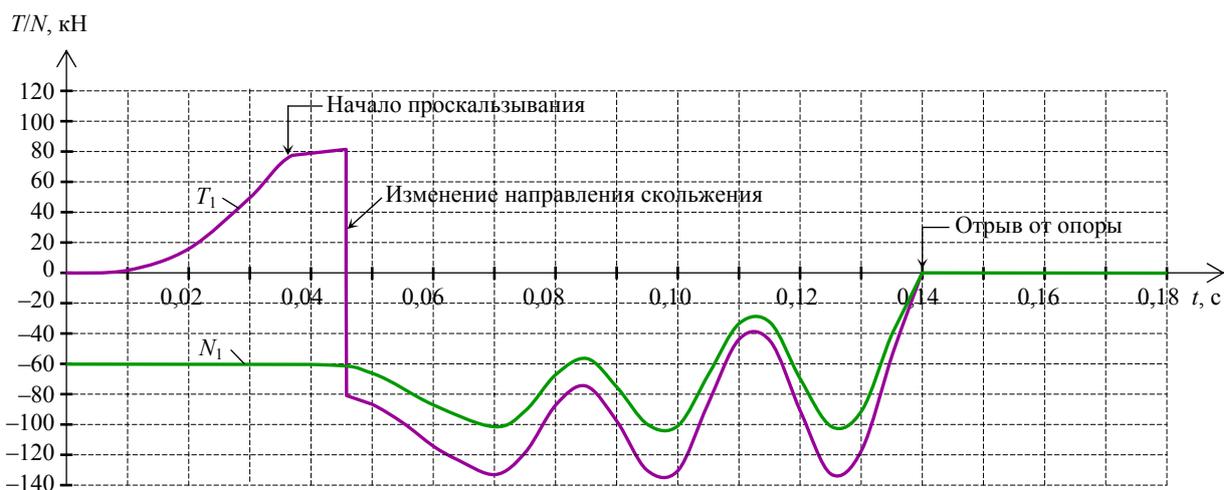


Рис. 5. Изменение величин контактных усилий по времени на первой опоре

Fig. 5. Change of contact forces values in time on the first support

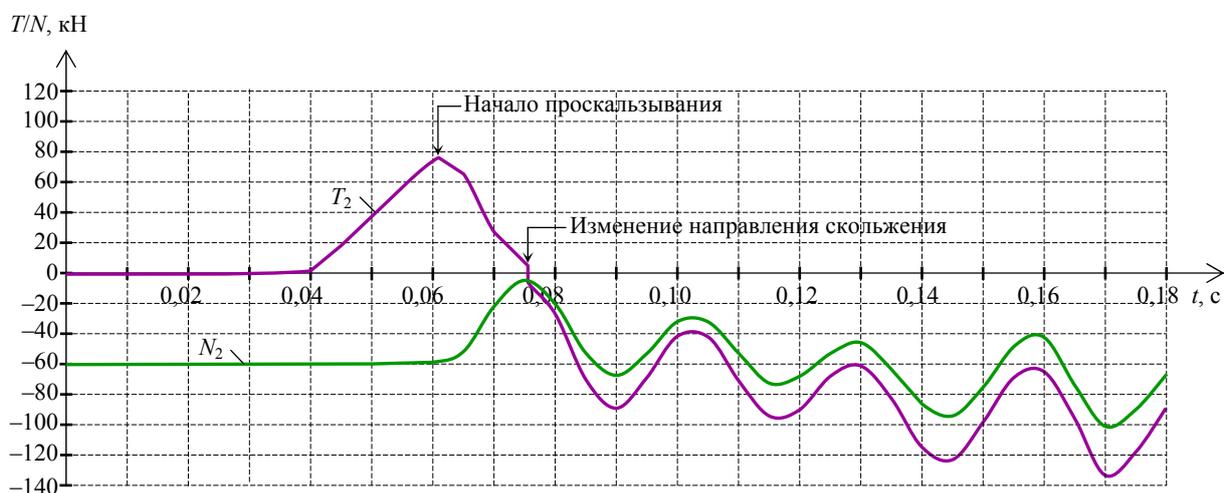


Рис. 6. Изменение величин контактных усилий по времени на второй опоре

Fig. 6. Change of contact forces values in time on the second support

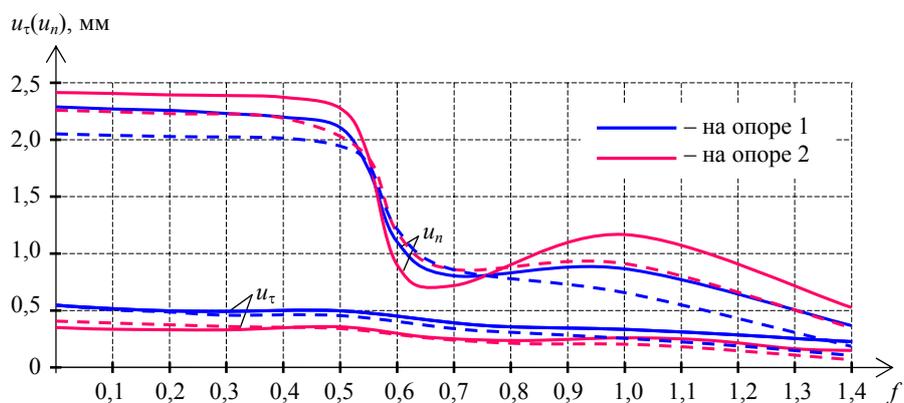


Рис. 7. Амплитуды горизонтальных и вертикальных смещений конструкции на опорах для разных значений коэффициента трения

Fig. 7. Amplitudes of horizontal and vertical structure displacements on supports at different values of friction coefficient

Как видно, результаты расчетов предложенным и альтернативным методами хорошо согласуются между собой, однако алгоритм итераций по предельным силам требует существенно больших затрат времени расчета (для рассмотренной задачи – почти в два раза).

Из приведенных на рис. 3–5 графиков видно, что при возрастании коэффициента трения как горизонтальные, так и вертикальные смещения на опорах уменьшаются. Также сопоставлялись решения, полученные при разных начальных шагах интегрирования. Проведенные численные исследования продемонстрировали хорошую внутреннюю сходимость предложенного алгоритма в достаточно большом диапазоне заданных шагов интегрирования по времени. Надо отметить, что при решении уравнения движения выбор эффективного шага представляет собой трудную задачу [22]. В этом случае рекомендуется задавать начальный шаг по времени таким, чтобы при его увеличении, например в два раза, расхождение в решениях не превышало заданной точности расчета.

Заметим, что хотя предложенный подход проиллюстрирован на примере стержневой системы с дискретными односторонними связями, он может применяться и для расчета контактного взаимодействия континуальных систем. Посредством рассмотренных равностержневых контактных конечных элементов можно моделировать неидеальные односторонние связи между узлами конечно-элементной сетки, расположенными на контактных поверхностях плоских и пространственных областей, изгибаемой плиты и основания, в зоне деформационных и технологических швов, берегов трещин и т. п. [4, 6, 9, 13, 23].

ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена задача контактного взаимодействия упругодеформируемых систем при динамическом нагружении. Для ее решения предложен численный алгоритм, совмещающий в одном пошаговом процессе интегрирование уравнений движения с пошаговым по времени анализом состояния контакта. Для точного соблюдения ограничений в условиях по предель-

ному трению-скольжению применен способ компенсирующих нагрузок.

2. В основе предложенного подхода лежит пошаговый метод, имеющий ясную физическую интерпретацию. Разработанный алгоритм обеспечивает возможность анализа состояния контакта на каждом временном шаге и имеет преимущество в тех случаях, когда решение задачи зависит от истории нагружения, в частности при динамическом нагружении и учете трения-скольжения в односторонних связях.

3. Используется дискретная расчетная модель метода конечных элементов, при этом для моделирования односторонних связей с кулоновским трением применяются контактные элементы в виде стержневой системы. Данные контактные конечные элементы вводятся между контактирующими поверхностями взаимодействующих тел, обеспечивая дискретный контакт между узлами смежных сеток. Они позволяют определять усилия и смещения в зоне контакта с одинаковой и высокой точностью, применять несогласованные конечно-элементные сетки, учитывать физические и геометрические свойства контактного шва.

4. Проведенные численные исследования позволяют заключить об эффективности разработанного метода, в частности при решении контактных задач с учетом трения и динамического нагружения. Так, сравнение предложенного подхода с известным алгоритмом итераций по предельным силам показывает значительную экономию времени расчета. Кроме того, можно отметить, что возможность учета сложных условий контактного взаимодействия приближает расчетную схему к реальным условиям работы конструкций и тем самым позволяет получать более точную и полную информацию о ее прочности и надежности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзикович, С. М. Механика контактных взаимодействий / С. М. Айзикович, В. М. Александров, И. И. Аргатов. М.: Физматлит, 2003. 672 с.
2. Wriggers, P. Computational Contact Mechanics / P. Wriggers. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. 521 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>
3. Laursen, T. A Contact Searching Algorithm Including Bounding Volume Trees Applied to Finite Sliding Mortar Formulations / T. Laursen, B. Yang // Computational Mechanics. 2008. No 41. P. 189–205. <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0116-z>.

4. Bukhartsev, V. N. Stability Assessment of a Structure Subject to Asymmetric Load Application on a Rock-Free Bed / V. N. Bukhartsev, A. A. Lukashevich // *Power Technology and Engineering*. 2012. Vol. 45, No 5. P. 346–350. <https://doi.org/10.1007/s10749-012-0279-z>.
5. Wriggers, P. A Finite Element Method for Contact Using a Third Medium / P. Wriggers, J. Schroder, A. Schwarz // *Computational Mechanics*. 2013. No 4. P. 837–847. <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0848-5>.
6. Lukashevich, A. A. Computational Solution of Contact Problems with Unilateral Constraints and Friction by Step-by-Step Analysis / A. A. Lukashevich // *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 941–944. P. 2264–2267. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.941-944.2264>.
7. Barboteu, M. Analysis of a Contact Problem with Normal Damped Response and Unilateral Constraint / M. Barboteu, D. Danan, M. Sofonea // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 96, No 4. P. 408–428. <https://doi.org/10.1002/zamm.201400304>.
8. Wriggers, P. A Virtual Element Method for Contact / P. Wriggers, W. T. Rust, B. D. Reddy // *Computational Mechanics*. 2016. No 6. P. 1039–1050. <https://doi.org/10.1007/s00466-016-1331-x>.
9. Lukashevich, A. A. Computational Modelling of Stiffness and Strength Properties of the Contact Seam / A. A. Lukashevich // *Magazine of Civil Engineering*. 2018. No 5. P. 149–159. <https://doi.org/10.18720/MCE.81.15>.
10. Lukashevich, A. A. Modelling of Contact Interaction with Allowance for Nonlinear Compliance in Unilateral Constraints. / A. A. Lukashevich, N. K. Lukashevich, E. I. Timohina // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2018. Vol. 463, No 042054. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/4/042054>.
11. Бычек, О. В. К исследованию динамического контактного взаимодействия деформируемых тел / О. В. Бычек, В. М. Садовский // *Прикладная механика и техническая физика*. 1998. Т. 39, № 4. С. 167–173.
12. Аннин, Б. Д. Динамические контактные задачи теории упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, О. В. Садовская, В. М. Садовский // *Вопросы материаловедения*. 2003. № 1. С. 426–434.
13. Бухарцев, В. Н. Решение задачи о взаимодействии водобойной плиты крепления с основанием при пульсации давления в сбрасываемом потоке / В. Н. Бухарцев, А. А. Лукашевич // *Гидротехническое строительство*. 2010. № 4. С. 52–55.
14. Никонов, С. А. Особенности виртуального моделирования динамических процессов в механических системах с удерживающими связями с помощью пакета Adams / С. А. Никонов, А. А. Матюков, Н. В. Островская // *Морские интеллектуальные технологии*. 2018. № 1–4. С. 223–228.
15. Application of the Schwarz Alternating Method for Simulating the Contact Interaction of a System of Bodies / M. P. Galanin [et al.] // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2015. Vol. 55, No 8. P. 1393–1406. <https://doi.org/10.1134/S0965542515080102>.
16. Galanin, M. P. Use of Various Versions of Schwarz Method for Solving the Problem of Contact Interaction of Elastic Bodies / M. P. Galanin, V. V. Lukin, A. S. Rodin // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*. 2018. Vol. 991, No 012021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012021>.
17. Кравчук, А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития / А. С. Кравчук // *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73, № 3. С. 492–502.
18. Sofonea, M. Analysis of a Sliding Frictional Contact Problem with Unilateral Constraint / M. Sofonea, Y. Souleiman // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. No 22. P. 324–342. <https://doi.org/10.1177/1081286515591304>.
19. Barboteu, M. Analysis of a Contact Problem with Unilateral Constraint and Slip-Dependent Friction / M. Barboteu, X. Cheng, M. Sofonea // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. No 21. P. 791–811. <https://doi.org/10.1177/1081286514537289>.
20. Barauskas, R. Dynamic Analysis of Structures with Unilateral Constraints: Numerical Integration and Reduction of Structural Equations / R. Barauskas // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. No 2. P. 323–342. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370209>.
21. A Numerical Approach to the Dynamic Unilateral Contact Problem of Soil-Pile Interaction under Instabilizing and Environmental Effects / A. Liolios [et al.] // *Numerical Methods and Applications, 6th International Conference, 2006, Borovets, Bulgaria, August 20–24*. P. 646–651. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70942-8_78.
22. Bathe, K.-J. *Numerical Methods in Finite Element Analysis* / K.-J. Bathe, E. L. Wilson. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976. 528 p. <https://doi.org/10.1002/nme.1620110913>.
23. Lukashevich, A. A. Numerical Decision of Problems of Structural Mechanics with Nonideal Unilateral Constraints / A. A. Lukashevich, L. A. Rozin // *Applied Mechanics and Materials. Advances in Civil and Industrial Engineering IV*. 2014. Vol. 580–583. P. 2932–2935. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.580-583.2932>.
24. Программа решения задач контактного взаимодействия с учетом односторонних связей и трения методом конечных элементов: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008610113; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ / А. А. Лукашевич. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам РФ, 2008. 1 с.

Поступила 17.12.2019

Подписана в печать 25.02.2020

Опубликована онлайн 29.01.2021

REFERENCES

1. Aizikovich S. M., Aleksandrov V. M., Argatov I. I. (2003) *Mechanics of Contact Interaction*. Moscow, Fizmatlit Publ. 672 (in Russian).
2. Wriggers P. (2006) *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg, Springer. 521. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0>.
3. Laursen T., Yang B. (2008) A Contact Searching Algorithm Including Bounding Volume Trees Applied to Finite Sliding Mortar Formulations. *Computational Mechanics*, (41), 189–205. <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0116-z>.

4. Bukhartsev V. N., Lukashevich A. A. (2012) Stability Assessment of a Structure Subject to Asymmetric Load Application on a Rock-Free Bed. *Power Technology and Engineering*, 45 (5), 346–350. <https://doi.org/10.1007/s10749-012-0279-z>.
5. Wriggers P., Schroder J., Schwarz A. (2013) A Finite Element Method for Contact Using a Third Medium. *Computational Mechanics*, (4), 837–847. <https://doi.org/10.1007/s00466-013-0848-5>.
6. Lukashevich A. A. (2014) Computational Solution of Contact Problems with Unilateral Constraints and Friction by Step-by-Step Analysis. *Advanced Materials Research*, 941–944, 2264–2267. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.941-944.2264>.
7. Barboteu M., Danan D., Sofonea M. (2016) Analysis of a Contact Problem with Normal Damped Response and Unilateral Constraint. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 96 (4), 408–428. <https://doi.org/10.1002/zamm.201400304>.
8. Wriggers P., Rust W. T., Reddy B. D. (2016) A Virtual Element Method for Contact. *Computational Mechanics*, (6), 1039–1050. <https://doi.org/10.1007/s00466-016-1331-x>.
9. Lukashevich A. A. (2018) Computational Modelling of Stiffness and Strength Properties of the Contact Seam. *Inzhenerno-Stroitelny Zhurnal = Magazine of Civil Engineering*, (5), 149–159. <https://doi.org/10.18720/MCE.81.15>.
10. Lukashevich A. A., Lukashevich N. K., Timohina E. I. (2018) Modelling of Contact Interaction with Allowance for Nonlinear Compliance in Unilateral Constraints. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 463 (042054). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/463/4/042054>.
11. Bychek O. V., Sadovskii V. M. (1998) On Investigation of the Dynamic Contact Interaction of Deformable Bodies. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 39 (4), 628–633. <https://doi.org/10.1007/bf02471260>.
12. Annin B. D., Sadovskaya O. V., Sadovskii V. M. (2003) Dynamic Contact Problems of Elastoplasticity. *Voprosy Materialovedeniya*, (1), 426–434 (in Russian).
13. Bukhartsev V. N., Lukashevich A. A. (2010) Solution of Problem on Interaction of Water-Fight Plate at a Pressure Pulsation in Dumped Stream. *Gidrotekhnicheskoye Stroitelstvo*, (4), 52–55 (in Russian).
14. Nikonov S. A., Matyukov A. A., Ostrovskaya N. V. (2018) Features of Virtual Simulation of Dynamic Processes in Mechanical Systems with Bilateral Constraints Using the Adams Package. *Morskiye Intellektualnye Tekhnologii = Marine Intellectual Technologies*, (1–4), 223–228 (in Russian).
15. Galanin M. P., Lukin V. V., Rodin A. S., Stankevich I. V. (2015) Application of the Schwarz Alternating Method for Simulating the Contact Interaction of a System of Bodies. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 55 (8), 1393–1406. <https://doi.org/10.1134/S0965542515080102>.
16. Galanin M. P., Lukin V. V., Rodin A. S. (2018) Use of Various Versions of Schwarz Method for Solving the Problem of Contact Interaction of Elastic Bodies. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 991 (012021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012021>.
17. Kravchuk A. S. (2009) The Variational Method in Contact Problems. The Present State of the Problem and Trends in its Development. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 73 (3), 351–357. <https://doi.org/10.1016/j.japmathmech.2009.07.004>.
18. Sofonea M., Souleiman Y. (2017) Analysis of a Sliding Frictional Contact Problem with Unilateral Constraint. *Mathematics and Mechanics of Solids*, (22), 324–342. <https://doi.org/10.1177/1081286515591304>.
19. Barboteu M., Cheng X., Sofonea M. (2016) Analysis of a Contact Problem with Unilateral Constraint and Slip-Dependent Friction. *Mathematics and Mechanics of Solids*, (21), 791–811. <https://doi.org/10.1177/1081286514537289>.
20. Barauskas R. (1994) Dynamic Analysis of Structures with Unilateral Constraints: Numerical Integration and Reduction of Structural Equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2), 323–342. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370209>.
21. Liolios L., Iossifidou K., Liolios K., Abdalla K., Radev S. (2006) A Numerical Approach to the Dynamic Unilateral Contact Problem of Soil-Pile Interaction under Instabilizing and Environmental Effects. *Numerical Methods and Applications, 6th International Conference*, Borovets, Bulgaria, August 20–24, 646–651. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70942-8_78.
22. Bathe K.-J., Wilson E. L. (1976) *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall. 528. <https://doi.org/10.1002/nme.1620110913>.
23. Lukashevich A. A., Rozin L. A. (2014) Numerical Decision of Problems of Structural Mechanics with Nonideal Unilateral Constraints. *Applied Mechanics and Materials*, 580–583, 2932–2935. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.580-583.2932>.
24. Lukashevich A. A. (2008) *The Program for Solving Contact Interaction Problems Taking into Account Unilateral Constraints and Friction by the Finite Element Method*: Certificate of State Registration of Computer Program No 2008610113; Registered in Register of Computer Programs. Federal Service for Intellectual Property, Patent and Trademarks of the Russian Federation. 1 (in Russian).

Received: 17.12.2019

Accepted: 25.02.2020

Published online: 29.01.2021