УДК 621.79 (075.8)

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ

Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В., асп. ЛУГОВОЙ И. В.

Белорусский национальный технический университет

Одним из перспективных направлений развития ультразвуковой техники является использование упругих элементов в акустических технологических системах, которые могут выполнять функции накопителей энергии, концентраторов и модуляторов колебаний. В качестве упругих элементов для этой цели могут быть использованы винтовые пружины, круглые и эллиптические кольца, овальные кольца с плоскопараллельными сторонами и т. д. Однако, как показал обзор [1–3], вопросу использования упругих тел в ультразвуковых системах и их влиянию на показатели технологических процессов было уделено недостаточное внимание. В связи с этим задачей исследований авторов являются теоретическое обоснование применения упругих тел и выбор наиболее рациональных конструкций акустических технологических систем, в которых упругие элементы могут быть использованы в качестве промежуточных волноводов-концентраторов [4]. При этом объектом исследования приняли упругое эллиптическое кольцо, в наибольшей мере соответствующее условиям его применения и возможности согласования в ультразвуковой технологической системе.

Рассмотрим эллиптическое кольцо с полуосями a и b (рис. 1а). Решение задачи будет заключаться в определении взаимного перемещения стержня постоянной изгибной жесткости EI под действием двух сил P вдоль оси Y (рис. 1б).

Разрежем кольцо при ($x \pm a$), рассмотрим верхнюю часть как свободное тело. Из условий равновесия и симметрии при $y = 0$ продольная сила в сечении $N = -\dfrac{P}{2}$, а поперечная сила равна нулю. Обозначим неизвестный момент в этом сечении m. Тогда в произвольном сечении кольца при $\theta = \varphi$ (рис. 1б) изгибающий момент будет равен

$$M(\varphi) = \frac{P}{2}(a - r\cos\varphi) - m. \qquad (1)$$

При этом любую произвольную точку кольца, заданную в координатах $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, можно представить в полярной системе координат. Функционал Костильяно [5] для определения дополнительной энергии изгиба эллиптического кольца будет равен

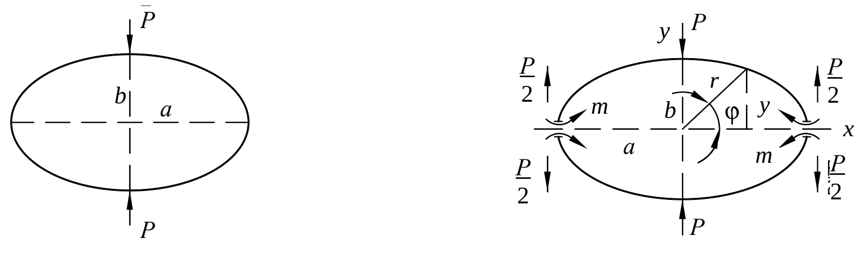

Рис. 1. Расчетная схема эллиптического кольца

$$Э = \frac{4}{2EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M^2(\varphi) r d\varphi = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{P}{2}\left(a-\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right)\cos\varphi - m\right]^2 \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi. \qquad (2)$$

В состоянии статического равновесия энергия изгиба кольца должна принимать минимальное значение, т. е. $\frac{dЭ}{dm} = 0.$ Из этого условия находим величину неизвестного изгибающего момента m

$$m = \frac{Pa}{2} - \frac{Pa^2}{3bE\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)} - \frac{Pb}{6E\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}, \qquad (3)$$

где $E(z)$ – полный эллиптический интеграл [6].

Величину изгибающего момента в эллиптическом кольце на интервале $\varphi \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ можно определить, подставив выражение (3) в (1):

$$M(\varphi) = \frac{P}{2}(a - r\cos\varphi) - \frac{Pa}{2} + \frac{Pa^2}{3bE\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)} + \frac{Pb}{3E\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}, \qquad (4)$$

где r – радиальная координата кольца в произвольной точке кольца.

Эпюра изгибающих моментов, рассчитанная по уравнению (4), имеет вид, представленный на рис. 2 при a = 1,0; b = 0,5.

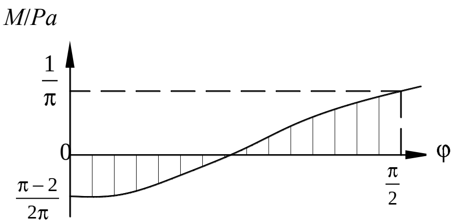

Рис. 2. Эпюра моментов и сил

Наибольший интерес для рассматриваемой задачи будет представлять взаимное перемещение точек приложения сосредоточенных сил вдоль вертикальной оси. Для вычисления его необходимо найти интеграл Мора [5]

$$\delta_{11} = \frac{4}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\varphi) M_1(\varphi) r d\varphi, \qquad (5)$$

где $M_1(\varphi)$ – уравнение изгибающих моментов в эллиптическом кольце от единичной силы P = 1.

В результате преобразований (5) получаем уравнение для расчета искомых перемещений в эллиптическом кольце

$$\Delta_{1P} = \frac{Pa^3}{45EI}\,\frac{5\left(3\frac{b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6} - 4\right) + 3\frac{b^2}{a^2}\left[\left(8 - 3\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{b^4}{a^4}\right)E\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) + \left(\frac{b^2}{a^2} - 4\right)E\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\right]}{\frac{b}{a}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)E\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}. \qquad (6)$$

Если приравнять между собой величины полуосей $a = b$ в (4) и (6), то можно получить также известные решения для уравнения моментов и перемещений в круглом кольце [1, 5]:

$$M(0) = \frac{Pa(\pi-2)}{2\pi} = 0{,}18169Pa;$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Pa}{\pi} = 0{,}3183Pa; \qquad (7)$$

$$\Delta_{1P} = \frac{Pa^3(\pi^2-8)}{4\pi EI} = 0{,}1488\frac{Pa^3}{EI}.$$

При определении перемещения Δ_{1P} применяли теорему о пределах.

Практический интерес представляет другая задача определения взаимного перемещения эллиптического кольца, которое имеет переменные сечения. В дальнейшем будем считать, что эллиптическое кольцо является криволинейной стержневой системой переменного сечения, образованной двумя несоосными окружностями (рис. 3). Геометрически такой эллипс образуется из двух эллипсов с полуосями a_1 и a_2, а также b_1 и b_2, которые смещены друг относительно друга на величину t (рис. 3).

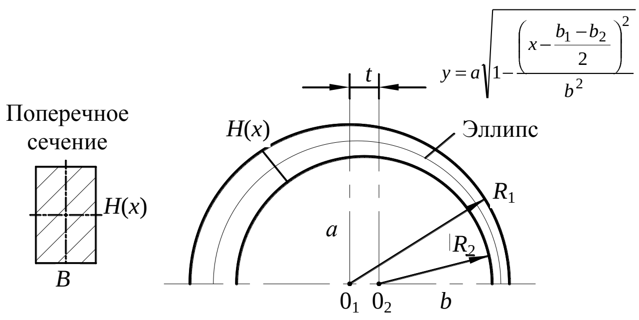

Рис. 3. Эллиптическое кольцо с переменным сечением

Согласно рис. 3

$$\begin{cases} b_1 = R_2 + t + \dfrac{R_1 - (R_2 + t)}{2}; \\ b_2 = R_1 - \dfrac{R_1 - (R_2 - t)}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{b_1 + b_2}{2}; \\ a = \sqrt{R_2^2 - t^2} + \dfrac{R_1 - \sqrt{R_2^2 - t^2}}{2}. \end{cases}$$

В плоской системе координат ордината эллипса y равна

$$y = a\sqrt{1-\frac{\left(x-\frac{b_1-b_2}{2}\right)^2}{b^2}}, \qquad (8)$$

а переменную толщину эллипса обозначим как $h(x)$. Она будет равна

$$h(x) = R_1 - R_2 - t\cos\varphi = R_1 - R_2 - t\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (9)$$

Изгибающий момент в сечении кольца с размерами B и H (рис. 3) равен

$$M(x) = \frac{P}{2}(a-y) - m.$$

Согласно принципу Кастельяно [5], дополнительная энергия стремится к минимальному значению, т. е.

$$Э = \int_{-b}^{b} \frac{M(x)^2\,dx}{2EI(x)} \to \min. \qquad (10)$$

Подставив выражение (9) в (10), получим

$$Э = \int_{-b}^{b} \frac{\left[\frac{P}{2}(a-y)-m\right]^2 dx}{2EB\frac{\left(R_1 - R_2 - t\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3}{12}} \to \min.$$

Ввиду гладкости подынтегральной функции при условии минимума дополнительной энергии, т. е. $\frac{d(Ý)}{dm} = 0$, меняем очередности интегрирования и дифференцирования. Получаем:

$$\int_{-b}^{b} \frac{\frac{P}{2}(a-y)-m}{\left(R_1 - R_2 - t\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3}dx = 0, \qquad (11)$$

откуда можно получить выражение для момента

$$m = \frac{\frac{P}{2}\int_{-b}^{b}(a-y)\frac{dx}{H^3(x)}}{\int_{-b}^{b}\frac{dx}{H^3(x)}}. \qquad (12)$$

Для удобства дальнейших расчетов интеграл (12) можно вычислить, перейдя к полярным координатам $x = b\cos\varphi$; $y = a\sin\varphi$. Тогда момент в произвольном сечении $M(\varphi)$ в полярных координатах можно записать

$$M(\varphi) = \frac{P}{2}(a - a\sin\varphi) - m. \qquad (13)$$

И соответственно условие (10) будет иметь вид

$$\int_0^{\pi} \frac{M(\varphi)^2\,r\,d\varphi}{H^3(\varphi)} \to \min,$$

где $H(\varphi) = c - t\cos\varphi$, а $c = R_1 - R_2$.

В этом случае энергия будет равна

$$Э = \frac{12}{B}\int_0^{\pi} \frac{\left[\frac{Pb}{2}(1-\sin\varphi)-m\right]^2}{(c - t\cos\varphi)^3}d\varphi \to \min \;\; \frac{d(Э)}{d\varphi} = 0.$$

Меняя очередность интегрирования и дифференцирования, получаем

$$-\frac{24}{B}\int_0^{\pi}\frac{\frac{Pb}{2}(1-\sin\varphi)-m}{(c-t\cos\varphi)^3}d\varphi=0,$$

откуда можно вывести выражение для изгибающего момента в сечении, проходящем по вертикальной оси (рис. 4)

$$m=\frac{\frac{Pb}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-\sin\varphi}{(c-t\cos\varphi)^3}d\varphi}{\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(c-t\cos\varphi)^3}}=$$

$$=-\left[1-\frac{4c}{\pi}\frac{\sqrt{c^2-t^2}}{(2c^2+t^2)}\right]\frac{Pb}{2}. \qquad (14)$$

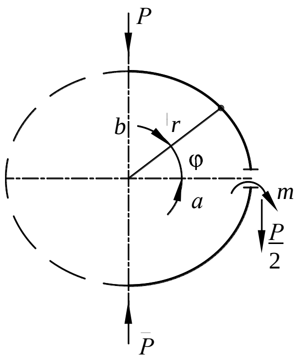

Рис. 4. Расчетная схема кольца в полярных координатах

Подставив (14) в (13), получим вычисление для величины изгибающего момента в полярных координатах в произвольном сечении кольца

$$M(\varphi)=\frac{Pb}{2}\left[1-\frac{4c}{\pi}\frac{\sqrt{c^2-t^2}}{(2c^2+t^2)}\right]-\frac{P}{2}(a-a\sin\varphi). \qquad (15)$$

Можно заметить, что в случае рассмотрения круглого кольца (t = 0):

$$\begin{cases}\varphi=\dfrac{\pi}{2}:\ \mathrm{M}=\dfrac{Pb}{2}\left(1-\dfrac{4c}{\pi}\dfrac{c}{2c^2}\right)=\dfrac{Pb}{2}\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right);\\ \varphi=0:\ \mathrm{M}=-\dfrac{4\mathrm{c}}{\pi}\dfrac{c}{2c^2}\dfrac{Pb}{2}=-\dfrac{Pb}{\pi}.\end{cases}$$

Окончательно определяем взаимное перемещение точек приложения сил кольца с переменным сечением

$$\delta=\frac{12}{EB}\int_0^{\pi}\frac{Pb}{2}\left[\left(1-\frac{4c}{\pi}\frac{\sqrt{c^2-t^2}}{2c^2+t^2}\right)-1+\sin\varphi\right]\times$$

$$\times\frac{b}{2}\left[\sin\varphi-\frac{4c}{\pi}\frac{\sqrt{c^2-t^2}}{2c^2+t^2}\right]\frac{rd\varphi}{(c-t\cos\varphi)^3}=$$

$$=\frac{12Pb^3}{4EB}\int_0^{\pi}\left(\sin\varphi-\frac{4c}{\pi}\frac{\sqrt{c^2-t^2}}{2c^2+t^2}\right)^2\times$$

$$\times\frac{d\varphi}{(c-t\cos\varphi)^3}\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{3Pb^2}{EBc^3}\int_0^{\pi}\left[\sin\varphi-\frac{4\sqrt{1-\frac{t^2}{c^2}}}{\pi\left(2+\frac{t^2}{c^2}\right)}\right]\times$$

$$\times\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\left(1-\frac{t}{c}\cos\varphi\right)^3}. \qquad (16)$$

Интеграл (16) имеет слишком громоздкий вид, поэтому ограничимся его значением при $t=0,5$; R_1 = 5; R_2 = 4. При этом получаем

$$\delta=3,03692\frac{3Pb^3}{EBc^3}.$$

ВЫВОДЫ

1. Приведены математические зависимости, позволяющие рассчитать статическое перемещение эллиптического кольца при действии уравновешенных внешних сил.
2. Дано решение для перемещений эллиптического кольца переменного сечения.
3. Перемещения упругого кольца зависят от геометрических размеров и изгибной жесткости поперечного сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреева, Л. А.** Упругие элементы приборов / под ред. В. И. Феодосьева. – М.: ГНТИ машиностроительной литературы, 1962. – 500 с.
2. **Пфейффер, П.** Колебания упругих тел; перевод с нем. / П. Пфейффер. – Л.: ОНТИ, Гос. технико-теоретич. изд-во, 1934. – 154 с.
3. **Тимошенко, С. П.** Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во физико-матем. лит-ры, 1959. – 437 с.
4. **Ультразвуковой** инструмент для обработки отверстий: пат. полезной модели РБ, 8169, МПК B24B 1/04, B06B 1/00 / И. В. Луговой, В. Т. Минченя, В. П. Луговой; опубл. 30.04.2012 // Афіцыйн. бюл.
5. **Тимошенко, С. П.** Сопротивление материалов: в 2 ч. / С. П. Тимошенко. – Ч. 2: Теория и задачи. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1932. – 480 с.
6. **Градштейн, И. С.** Таблица интегралов сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн; И. М. Рыжик. – М., 1963. – 1100 с.

Поступила 21.06.2012