

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-3-185-194>

УДК 541.12

## Особенности изгиба фторопластовой ленты с учетом разномодульности материала

Кандидаты техн. наук, доценты Г. А. Вершина<sup>1)</sup>, Л. Е. Реут<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республик Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2019  
Belarusian National Technical University, 2019

**Реферат.** Рассмотрен технологический процесс изготовления фторопластовых уплотнительных колец путем наматывания ленточной заготовки на цилиндрическую оправку-калибр с последующей выдержкой под нагрузкой и дальнейшим разрезанием спирали на кольца, а также исследована возможность получения изделий методом холодного формоизменения заготовки, исключая операцию термофиксации. Такая технология, учитывая, что фторопласт даже при очень низких температурах является высокопластичным материалом, представляется вполне реальной. Поэтому намотка ленты на оправку, выдержка спиральной заготовки без нагрева, но в условиях силового воздействия в течение времени, необходимого для завершения релаксационных процессов, и последующая разрезка на кольца позволят получать готовые кольцевые изделия требуемых размеров. Однако фторопласт имеет специфику механических свойств и обладает целым рядом особенностей, проявляемых при деформировании. Его деформационное поведение значительно отличается от поведения низкомолекулярных материалов, а поэтому требует обоснованного подхода при использовании существующей теоретической базы и разработке расчетных методик. Фторопласт – высокоплотный материал и имеет структуру с высокой степенью кристалличности, механизм протекания в нем деформаций в условиях силового поля во многом подобен поведению металлов, что позволяет использовать для расчета фторопластовых изделий методы и подходы, принятые в механике твердых тел. Однако применяемые расчетные формулы требуют определенной коррекции и адаптации к особенностям механических свойств фторопласта, одна из которых – его различная жесткость при растяжении и сжатии, что проявляется при наматывании ленточной заготовки на оправку. Фторопласт – разномодульный материал, его жесткость при сжатии больше, чем при растяжении, и вследствие этого при изгибе ленты нейтральная ось сечения смещается от центра тяжести в область сжатых волокон, а область растяжения возрастает. Высокая упругость при растяжении и возрастание этой области приводят к накоплению упругих деформаций, вызывающих пружинение после разгрузки и изменение размеров готового изделия. Это необходимо предусмотреть при расчете и проектировании инструмента-оправки, учитывая в формулах разномодульность материала или рассматривая сечение, приведенное к единой жесткости, но принимающее другую форму. Разработанные авторами расчетные методики для обоих вариантов сечения, учитывающие прямо или косвенно разномодульность материала, не противоречат друг другу и достаточно точно подтверждаются опытными данными.

**Ключевые слова:** фторопласт, деформации при силовом воздействии, механическая модель фторопласта, холодное формование изделий, изгиб фторопластовой ленты, упругость при растяжении и сжатии, разномодульность материала, накопление упругих деформаций, упругое пружинение, расчет цилиндрического инструмента (калибра)

**Для цитирования:** Вершина, Г. А. Особенности изгиба фторопластовой ленты с учетом разномодульности материала / Г. А. Вершина, Л. Е. Реут // *Наука и техника*. 2019. Т. 18, № 3. С. 185–194. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-3-185-194>

---

### Адрес для переписки

Вершина Георгий Александрович  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 65,  
220013, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 292-76-64  
oup@bntu.by

### Address for correspondence

Vershina Georgey A.  
Belarusian National Technical University  
65 Nezavisimosty Ave.,  
220013, Minsk, Republic of Belarus  
Tel.: +375 17 292-76-64  
oup@bntu.by

## Specific Features of Fluoroplastic Band Bending with Due Account of Various Modularity of Material

G. A. Vershina<sup>1)</sup>, L. E. Reut<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** The paper considers a technological process for production of sealing rings by winding a band work-piece on a cylindrical caliber mandrel with subsequent endurance under load and further cutting of a spiral in rings and also studies the possibility to obtain products while using a method for cold forming of a work-piece which excludes thermal stabilization operation. Taking into account the fact that fluorine plastic is a high-plastic material even at very low temperatures such technology looks quite real. Therefore winding of a band on a mandrel, endurance of a spiral work-piece without heating but under conditions of force action within the time which is necessary for completion of relaxation processes, and the subsequent cutting in rings will allow to obtain finished ring products of the required size. However fluoroplastic has specific mechanical properties and a number of specific features which are revealed during deformation process. Its deformation behavior considerably differs from behavior of low-molecular materials and therefore it requires a solid approach while using the existing theoretical base and developing calculation methodologies. While taking into consideration the fact that fluorine plastic is high density material and has structure with high degree of crystallinity, the mechanism of deformation behavior in it under conditions of a force field is mainly similar to metal behavior that allows to use methods and approaches for calculation of fluoroplastic products which are accepted in mechanics of solid bodies. However the applied calculating formulae require a certain correction and adaptation to specific features of mechanical fluoroplastic properties, one of which is its various rigidity at stretching and compression that is revealed in case of winding band work-piece on a mandrel. Fluorine plastic is a material with various modularity and its rigidity is higher during compression than under stretching and consequently in the case of band bending a neutral axis of section is displaced from the center of gravity to the area of compressed fibers, and the area of stretching is increasing. High elasticity at stretching and increase of this area lead to large accumulation of elastic deformations causing springing after unloading and changes in size of a finished product. These facts must be taken into account while calculating and designing a mandrel tool, it is also necessary to keep in mind various modularity of a material and possibility that a section being led to an uniform rigidity may take some other shape due to this. Calculation methodologies have been developed by the authors for both versions of section that take into consideration directly or indirectly a material with various modularity and which do not contradict each other and which are rather precisely proved by experimental data.

**Keywords:** fluoroplastic, deformation due to force action, mechanical model of fluoroplastic, cold formation of products, bending of fluoroplastic band, elasticity at stretching and compression, various modularity of material, accumulation of elastic deformations, elastic springing, calculation of cylindrical tool (caliber)

**For citation:** Vershina G. A., Reut L. E. (2019) Specific Features of Fluoroplastic Band Bending with Due Account of Various Modularity of Material. *Science and Technique*. 18 (3), 185–194. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-3-185-194> (in Russian)

### Введение

В настоящее время все более широкое использование в промышленности и народном хозяйстве получают полимерные материалы и композиционные соединения на их основе. Благодаря своим уникальным свойствам они применяются в радиоэлектронике и приборостроении, в электротехнической, химической и пищевой промышленности, в сельском хозяйстве и медицине, военной, авиационной и космической технике, и особенно важную роль полимеры играют как конструкционные материалы в машиностроении и строительном производстве. Широкая востребованность, а часто и незаменимость последних определяются их высокими эксплуатационными качествами в различных

температурно-силовых условиях, прочностью, долговечностью, технологичностью в обработке и переработке, а также возможностью получения их химическим путем с любыми заданными свойствами [1, 2].

Одно из достойных мест в ряду полимерных конструкционных материалов занимают фторопласт и модификации на его основе. Фторопласт обладает химической инертностью к любым агрессивным средам, отличными диэлектрическими и антифрикционными свойствами, высокой механической прочностью и эластичностью, уникальной для пластмасс термостойкостью, морозостойкостью и гидрофобностью. Он технологичен в обработке и, имея высокую плотность, а также пластичность и деформиру-

емость, легко обрабатывается резанием и давлением, что позволяет изготавливать фторопластовые изделия как путем резания, так и методами силового формоизменения [3, 4].

### Выбор и обоснование расчетной модели

В статье рассматривается технологический процесс изготовления уплотнительных фторопластовых колец, получаемых из ленточной заготовки путем ее наматывания на цилиндрическую оправку-калибр с последующими нагреванием, термофиксацией и разрезкой на кольца [5, 6], а также исследуется возможность получения указанных изделий методом холодного формоизменения ленты, исключая энергозатратную операцию термофиксации. Данная технология представляется вполне реальной, поскольку фторопласт обладает хладотекучестью и является высокопластичным материалом даже при низких температурах. Поэтому намотка ленты на оправку, выдержка спиральной заготовки без нагрева, но в условиях силового поля в течение времени, необходимого для завершения релаксационных процессов (во фторопласте деформации развиваются во времени), и последующая разрезка на кольца позволят получать готовые кольцевые изделия требуемых размеров.

Однако при разработке данной технологии, учитывая специфику свойств фторопласта и особенность его поведения под нагрузкой (различные свойства при растяжении и сжатии, наличие высокоэластической деформации, релаксационные процессы и т. д.), возникает трудность, связанная с расчетом и проектированием инструмента (оправки), обеспечивающего изделию заданные размеры и форму. Проблема заключается в том, что для выполнения расчетных операций требуются определенные методики, которые в настоящее время достаточно полно разработаны (и проверены экспериментально) только для низкомолекулярных материалов, таких как металлы, дерево, строительные материалы и др. Что касается полимеров, то для них подобной теории не существует, и основными расчетными формулами, используемыми при разработке технологических процессов, являются эмпирические формулы, построенные на результатах эксперименталь-

ных исследований. Возможность применения существующих теорий для расчета полимеров требует очень серьезного и обоснованного подхода при выборе расчетной модели и использовании для нее соответствующих классических методов и подходов. И поскольку полимерные материалы весьма разнообразны по своим свойствам и деформационному поведению, единственной основой для анализа и обоснования применяемой теории является база экспериментальных данных, созданная по результатам многочисленных исследований и широко представленная в справочной литературе. На основании этих данных фторопласт-4 имеет высокую плотность и степень кристалличности, которая при силовом воздействии и вследствие фазовых превращений возрастает еще больше и приближает структуру материала к практически полному однофазному упорядоченному кристаллическому состоянию [3, 4, 7]. А так как механические свойства полимера и его поведение под действием нагрузки определяются именно кристаллической частью структуры, при такой высокой степени кристалличности для фторопласта с достаточной степенью точности можно принять модель сплошного однородного тела со всеми характерными свойствами, присущими низкомолекулярным твердым телам, а значит, использовать для расчета подходы и методы, разработанные в механике твердых деформируемых тел, однако с адаптацией применяемых формул к специфике материала [8].

Цель исследований – разработка и усовершенствование расчетной методики для проектирования инструмента, применяемого для изготовления спиральной заготовки из фторопластовой ленты путем ее наматывания на цилиндрическую оправку для дальнейшего разрезания и получения уплотнительных колец требуемых размеров.

### Разработка расчетной методики

Наматывание ленты на оправку (сворачивание в кольцо) соответствует деформации чистого изгиба, при котором растягиваемые и сжимаемые волокна получают упругую и остаточную деформации, из которых первая создает эффект упругого пружинения, влияя на каче-

ство и точность колец, а вторая определяет размеры готового изделия.

Расчет оправки-калибра, обеспечивающей получение кольца требуемого конечного диаметра, представлен в [9, 10], где на основании опытных данных для фторопласта и с учетом особенностей его механического поведения рассматривается упругопластический изгиб фторопластовой ленты. Учитывая способность данного полимера при растяжении претерпевать большие обратимые высокоэластические деформации, исчезающие после разгрузки, а при сжатии необратимо уплотняться без заметного восстановления формы, фторопласт в области растяжения рассматривался как упругопластичный, а в области сжатия – как жесткопластичный материал. На основании принятых моделей была разработана соответствующая расчетная методика [9]. Однако возникновение в области сжатия только остаточных деформаций и полное отсутствие упругой прослойки около нейтрального слоя не соответствуют действительности. Случай, когда все сечение целиком или только его часть до нейтрального слоя охвачено пластической деформацией, рассматривается как предельный, связанный с возникновением пластического шарнира и полной потерей несущей способности элемента [11, 12]. Он носит чисто теоретический характер, когда упругой прослойкой в силу ее малости и незначительности влияния пренебрегают, однако на практике эта ситуация не осуществима [11, 13]. Но если в металлах, где упругие деформации действительно бесконечно малы, такое допущение является возможным (не приводящим к погрешности расчетов), то для фторопласта, испытывающего не только гуковские упругие, но и высокоэластические деформации, принятие отсутствия упругих деформаций (пусть даже в одной только области – растяжения или сжатия) неприемлемо. Наличие упругого ядра даже незначительной величины обязательно. Поэтому все расчеты должны быть приведены в соответствие этому обстоятельству [10], тем более что последующее упругое пружинение окажет существенное влияние на точность изготавливаемых изделий.

Однако специфика механических свойств фторопласта имеет и другое проявление при изгибе, что требует продолжения исследования

вопроса и совершенствования расчетной методики.

Фторопласт – разномодульный материал, у которого модули упругости при растяжении и сжатии имеют различное значение, т. е.  $E_{\text{раст}} \neq E_{\text{сж}}$ . При этом для разных модификаций фторопласта это различие весьма значительное и может проявляться в сторону как большей упругости при растяжении ( $E_{\text{раст}} < E_{\text{сж}}$ ), так и при сжатии ( $E_{\text{раст}} > E_{\text{сж}}$ ). Согласно закону Гука

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{\text{изг}}}{EI_{\text{н.о}}}, \quad (1)$$

где  $1/\rho$  – кривизна изогнутой оси ленты;  $I_{\text{н.о}}$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;  $E$  – модуль Юнга, определяет жесткость при изгибе, поэтому изгиб элемента, выполненного из разномодульного материала, имеет особенности, которые необходимо учитывать в расчетных формулах.

Изгиб фторопластовой ленты можно рассматривать подобно изгибу биметаллической пластины, в которой элементы прочно соединены друг с другом и работают как единое целое, но имеют различный модуль Юнга растягиваемых и сжимаемых волокон. Как известно из теории изгиба, в этом случае нейтральная ось при одинаковой толщине слоев будет проходить не по границе их раздела, а в той части сечения, которая является более жесткой [14]. Применяя известное положение к изгибу фторопластовой ленты прямоугольного сечения, изготовленной из фторопласта-4, и учитывая, что для данной марки  $E_{\text{сж}} > E_{\text{раст}}$ , следует предположить, что нейтральная ось пройдет не по оси  $X$  (рис. 1), т. е. не через центр прямоугольника, а при заданном направлении изгиба сместится к внутренним волокнам кольца, в резуль-

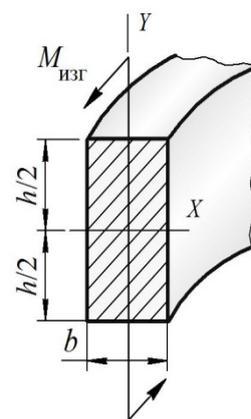


Рис. 1. Изгиб фторопластовой ленты прямоугольного сечения

Рис. 1. Bending of fluoroplastic band having rectangular cross-section

тате чего высота области растяжения будет больше высоты области сжатия.

Установим положение нейтральной оси в сечении, для чего приведем последнее к одинаковой жесткости, т. е. к единому модулю Юнга. Как правило, приводят к бóльшему значению, поэтому в рассматриваемом случае приводим сечение к  $E = E_{сж}$ . Исходя из формулы упругой кривизны ленты (1), чтобы момент внутренних сил  $M_{изг}$  для заданной кривизны ( $1/\rho$ ) не изменился, необходимо, чтобы при изгибе часть сечения с меньшим модулем Юнга была по жесткости эквивалентна части сечения, имеющей бóльшее значение  $E$  [14]. Для этого во фторопластовой ленте, чтобы половину сечения с  $E_{раст}$  привести к значению  $E_{сж}$ , учитывая, что  $E_{сж} > E_{раст}$ , для сохранения жесткости этой половины увеличение модуля Юнга потребует уменьшения момента инерции, что при высоте ленты  $h/2$  приведет к уменьшению ее поперечного размера:

$$E_{раст} I = E_{сж} I'$$

или

$$E_{раст} \frac{b(h/2)^3}{12} = E_{сж} \frac{b'(h/2)^3}{12}.$$

Тогда из последнего выражения следует, что ширина сечения в области растяжения

$$b' = mb, \quad (2)$$

где  $m$  – коэффициент приведения,

$$m = \frac{E_{раст}}{E_{сж}}, \quad (3)$$

откуда

$$E_{раст} = mE_{сж} = mE. \quad (4)$$

Приводя сечение к единому модулю Юнга и учитывая, что предел текучести фторопласта-4 (по сути, предел рекристаллизации  $\sigma_{рекp}$  [8], при котором в материале возникают необратимые деформации), как показывают результаты исследований [3, 4, 7], при растяжении и сжатии имеет примерно одинаковую величину ( $\sigma_{т(сж)} = 12$  МПа,  $\sigma_{т(раст)} = 14$  МПа), принимаем для него также единое значение  $\sigma_t$ .

В результате приведения сечения первоначально прямоугольная форма принимает вид тавра (рис. 2) с шириной верхней части  $b'$ , вычисляемой по (2). Для полученного изотропного сечения принимаем  $E = E_{сж}$  и считаем, что  $\sigma_{т(сж)} = \sigma_{т(раст)} = \sigma_t$ .

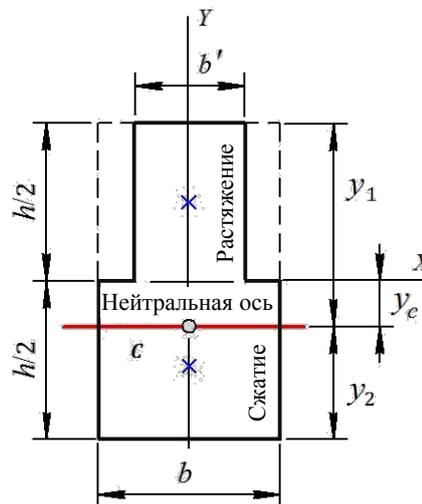


Рис. 2. Приведенное сечение

Fig. 2. Transformed section

По известным геометрическим формулам [11, 12], разбив сечение на два прямоугольника (рис. 2), через статические моменты  $S_{x(1)}$  и  $S_{x(2)}$  относительно оси  $X$  соответствующих площадей  $A_1$  и  $A_2$ , учитывая значение  $b'$  (2), определяем положение центра тяжести по оси  $Y$

$$y_c = \frac{S_{x(1)} + S_{x(2)}}{A_1 + A_2},$$

откуда

$$y_c = -\frac{h(1-m)}{4(m+1)}, \quad (5)$$

где знак «минус» означает, что центр тяжести лежит ниже оси  $X$ , т. е. в отрицательной области оси  $Y$  (рис. 2), и в дальнейших расчетах этот знак не учитывается.

Из формулы (5) видно, что смещение нейтральной оси от центра тяжести прямоугольника, принимая для фторопласта-4  $E_{раст} = 410$  МПа,  $E_{сж} = 686$  МПа [4, 7] и  $m \approx 0,6$  (3), составляет порядка 6 % от высоты сечения  $h$  и для сечений малой толщины является величиной весьма незначительной.

Определив положение нейтральной оси (5), расстояния от нее до наиболее удаленных точек сечения в области растяжения  $y_1$  и в области сжатия  $y_2$  соответственно равны:

$$y_1 = \frac{h}{2} + y_c = \frac{h}{2} + \frac{h(1-m)}{4(m+1)} = \frac{h(m+3)}{4(m+1)}; \quad (6)$$

$$y_2 = \frac{h}{2} - y_c = \frac{h}{2} - \frac{h(1-m)}{4(m+1)} = \frac{h(3m+1)}{4(m+1)}.$$

Момент инерции приведенного изотропного сечения относительно нейтральной оси вычисляем по правилам перехода к параллельным осям [11, 12]

$$I_{н.о} = \left[ \frac{b'(h/2)^3}{12} + b' \left( \frac{h}{2} \right) \cdot \left( \frac{h}{4} + y_c \right)^2 \right] + \left[ \frac{b(h/2)^3}{12} + b \left( \frac{h}{2} \right) \cdot \left( \frac{h}{4} - y_c \right)^2 \right],$$

который с учетом значения  $b'$  (2) после преобразования принимает вид

$$I_{н.о} = a \frac{bh^3}{12}, \quad (7)$$

где

$$a = \frac{(m+1)^2 + 12m}{8(m+1)}. \quad (8)$$

Продолжаем рассматривать вопрос изгиба фторопластовой ленты прямоугольного сечения, в котором вследствие разномодульности материала нейтральная ось проходит на расстоянии  $y_c$  от центра прямоугольника (рис. 2) и момент инерции относительно этой оси равен значению (7).

Максимальные напряжения, как известно из теории изгиба, возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, и определяются формулой [11–13]

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{I_{н.о}} y_{\max}, \quad (9)$$

которая, согласно (1), где  $M_{\text{изг}} = EI_{н.о}/\rho$ , принимает вид

$$\sigma_{\max} = \frac{E y}{\rho}. \quad (10)$$

Принимая для фторопласта-4 единый предел текучести  $\sigma_T$  и учитывая особенность расположения нейтральной оси в сечении, установим, в какой области в первую очередь – растяжения или сжатия – на краю сечения возникнет текучесть и какой кривизне соответствует наступление этого состояния. Используя формулу (10), приравниваем для соответствующих областей напряжения к  $\sigma_T$  и получаем:

– в области растяжения с учетом (4)

$$\sigma_{\max(\text{раст})} = \frac{E_{\text{раст}} y_1}{\rho_1} = \frac{m E y_1}{\rho_1} = \sigma_T,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\sigma_T}{m E y_1}, \quad (11)$$

т. е. текучесть крайних волокон в области растяжения произойдет, когда кривизна ленты достигнет значения (11);

– в области сжатия

$$\sigma_{\max(\text{сж})} = \frac{E_{\text{сж}} y_2}{\rho_2} = \frac{E y_2}{\rho_2} = \sigma_T,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\sigma_T}{E y_2}, \quad (12)$$

т. е. текучесть крайних волокон в области сжатия начнется при достижении кривизны изгиба ленты значения (12).

Сравниваем значения (11) и (12) и с учетом выражений (6) получаем

$$\frac{1/\rho_1}{1/\rho_2} = \frac{y_2}{m y_1} = \frac{3m+1}{m(m+3)}. \quad (13)$$

Из (13) нетрудно доказать, что величина  $\frac{3m+1}{m(m+3)} > 1$  и, следовательно,  $\frac{1}{\rho_1} > \frac{1}{\rho_2}$ ,

т. е. возникновение текучести в крайних растянутых волокнах требует большей кривизны, Потому, несмотря на большую их удаленность от нейтральной оси ( $y_1 > y_2$ ), текучесть сначала

начнется на краю сжатой части сечения, что соответствует меньшей кривизне изогнутой ленты. Область растяжения при такой кривизне будет полностью охвачена только упругими деформациями. Однако по мере возрастания изгибающего момента кривизна будет увеличиваться, и при достижении значения (11) начнет течь в крайних растянутых волокнах. В это время в области сжатия часть сечения уже будет охвачена остаточными деформациями.

На основании закона Гука ( $\varepsilon = \sigma/E$ ) и гипотезы плоских сечений ( $\varepsilon = y/\rho$ ) ширина зоны упругости равна

$$y_T = \varepsilon_T \rho = \frac{\sigma_T}{E} \rho. \quad (14)$$

Поэтому при любой заданной кривизне на основании (14) и учитывая (4) для областей растяжения и сжатия соответственно получаем (рис. 3):

$$y_{T(\text{раст})} = \varepsilon_{T(\text{раст})} \rho = \frac{\sigma_T}{E_{\text{раст}}} \rho = \frac{\sigma_T}{mE} \rho; \quad (15)$$

$$y_{T(\text{сж})} = \varepsilon_{T(\text{сж})} \rho = \frac{\sigma_T}{E_{\text{сж}}} \rho = \frac{\sigma_T}{E} \rho,$$

откуда видно, что

$$y_{T(\text{сж})} = m y_{T(\text{раст})}. \quad (16)$$

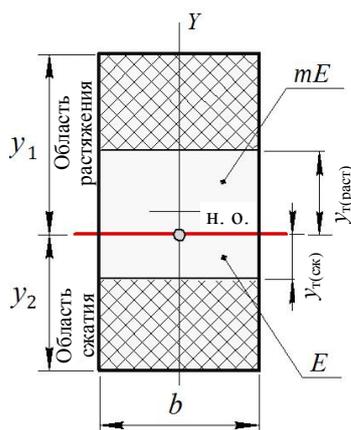


Рис. 3. Расчетное сечение

Fig. 3. Reference section

Поскольку для фторопласта-4  $E_{\text{раст}} < E_{\text{сж}}$ , то, согласно (3),  $m < 1$ , т. е. зона упругости в области сжатия меньше такой же зоны в области растяжения и полная ширина упругого ядра

около нейтральной оси на основании значений (15) равна [10]:

$$\Delta_{\text{упр. ядра}} = y_{T(\text{раст})} + y_{T(\text{сж})} = \frac{\sigma_T}{E} \rho \left( \frac{m+1}{m} \right). \quad (17)$$

Как видно из выражений (15), при увеличении кривизны ширина упругого ядра будет уменьшаться, а зона остаточных деформаций – расширяться, приближаясь к нейтральной оси. Однако, как было доказано в [10], упругая прослойка не может исчезнуть полностью, что, согласно (17), соответствовало бы радиусу  $\rho = 0$ . Какой бы незначительной величины прослойка ни была, она обязательно будет присутствовать вблизи нейтрального слоя даже в состоянии, близком к предельному, которое предполагает захват всего сечения остаточными деформациями и образование шарнира текучести. Указанный случай, широко используемый в теории изгиба для оценки и анализа несущей способности конструкций, является чисто теоретическим, расчетным случаем и в реальности существовать не может.

Продолжим решение задачи и определим в сечении изгибающий момент, который согласно равновесию внешних и внутренних сил на основании линейной теории изгиба [13] определяется интегралом, где с учетом нового положения нейтральной оси пределами интегрирования будут координаты крайних точек сечения (рис. 3)

$$M_{\text{изг}} = \int_A \sigma y dA = \int_{-y_2}^{+y_1} \sigma y b dy. \quad (18)$$

Разбиваем интеграл (18) на четыре зоны: зону упругости и остаточных деформаций в области растяжения и такие же зоны в области сжатия. Для удобства решения возвращаемся к первоначально прямоугольному сечению шириной  $b$ , но в котором нейтральная ось смещена от центра прямоугольника и части сечения, лежащие выше и ниже нейтральной оси (рис. 3), имеют модули упругости, соответственно равные  $mE$  и  $E$ . Решаем задачу по методике, представленной в [9, 10]:

– в области растяжения, подставляя значения (4), (6) и (15), получаем

$$M_{\text{раст}} = \int_0^{+y_{T(\text{раст})}} \sigma y b dy + \int_{+y_{T(\text{раст})}}^{+y_1} \sigma_T y b dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{+y_{\tau(\text{раст})}} mE \frac{y}{\rho} y b dy + \int_{+y_{\tau(\text{раст})}}^{+y_1} \sigma_{\tau} y b dy = \\
 &= \frac{mEby_{\tau(\text{раст})}^3}{3\rho} + \frac{\sigma_{\tau} b}{2} (y_1^2 - y_{\tau(\text{раст})}^2) = \quad (19) \\
 &= \frac{\sigma_{\tau} b h^2 (m+3)^2}{32(m+1)^2} - \frac{\sigma_{\tau}^3 b}{6m^2 E^2} \rho^2;
 \end{aligned}$$

– в области сжатия, подставляя значения (6) и (15), имеем

$$\begin{aligned}
 M_{\text{сж}} &= \int_{-y_{\tau(\text{сж})}}^0 \sigma(-y) b dy + \int_{-y_2}^{-y_{\tau(\text{сж})}} \sigma_{\tau}(-y) b dy = \\
 &= \int_{-y_{\tau(\text{сж})}}^0 E \frac{(-y)}{\rho} (-y) b dy + \int_{-y_2}^{-y_{\tau(\text{сж})}} \sigma_{\tau}(-y) b dy = \quad (20) \\
 &= \frac{Eby_{\tau(\text{сж})}^3}{3\rho} - \frac{\sigma_{\tau} b}{2} (y_{\tau(\text{сж})}^2 - y_2^2) = \\
 &= \frac{\sigma_{\tau} b h^2 (3m+1)^2}{32(m+1)^2} - \frac{\sigma_{\tau}^3 b}{6E^2} \rho^2.
 \end{aligned}$$

Полный изгибающий момент в сечении на основании значений (19) и (20) равен

$$M_{\text{полн}} = M_{\text{раст}} + M_{\text{сж}} = k\sigma_{\tau} b h^2 - \frac{q\sigma_{\tau}^3 b}{E^2} \rho^2, \quad (21)$$

где  $k, q$  – безразмерные коэффициенты, введенные в расчет для упрощения вида уравнения (21), определяемые по формулам:

$$k = \frac{(m+3)^2 + (3m+1)^2}{32 \cdot (m+1)^2}; \quad q = \frac{1+m^2}{6m^2}. \quad (22)$$

Тогда полная кривизна ленты  $1/\rho_{\text{полн}}$  под действием изгибающего момента  $M_{\text{полн}}$ , определяемая наличием упругих и остаточных деформаций, на основании (21) равна

$$\frac{1}{\rho_{\text{полн}}} = \sqrt{\frac{q\sigma_{\tau}^3 b}{E^2 (k\sigma_{\tau} b h^2 - M_{\text{полн}})}}, \quad (23)$$

где  $M_{\text{пр}} = k\sigma_{\tau} b h^2$  – предельная для изгибающего момента величина.

Как известно, при пластическом формоизменении по мере увеличения действующей нагрузки возрастают не только пластические деформации, но и упругие, которые всегда сопровождают последние и сохраняются до момента разгрузки. Основываясь на законе разгрузки, определим величину упругой деформации, накопленной в материале при достиже-

нии изгибающим моментом значения  $M_{\text{полн}}$ , и созданную этим моментом упругую кривизну ленты. Тогда на основании (1) и (7) получаем

$$\frac{1}{\rho_{\text{упр}}} = \frac{M_{\text{полн}}}{EI_{\text{н.о}}} = \frac{M_{\text{полн}}}{Eabh^3/12}, \quad (24)$$

где  $a$  – коэффициент, определяемый по (8).

Такое же значение для упругой кривизны можно было бы получить, определив момент  $M_{\text{полн}}$  с помощью интеграла [10] и выражений (4) и (6)

$$\begin{aligned}
 M_{\text{полн}} &= \int_0^{+y_1} \sigma y b dy + \int_{-y_2}^0 \sigma(-y) b dy = \\
 &= \int_0^{+y_1} E_{\text{раст}} \frac{y}{\rho} y b dy + \int_{-y_2}^0 E_{\text{сж}} \frac{(-y)}{\rho} (-y) b dy. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Так как  $1/\rho_{\text{полн}} = 1/\rho_{\text{упр}} + 1/\rho_{\text{ост}}$ , на основании значений (23), (24) и учитывая, что остаточная кривизна определяет размеры готового кольца и равна  $1/\rho_{\text{ост}} = 1/(d/2)$  (где  $d$  – диаметр кольцевого изделия), получаем уравнение вида

$$\sqrt{\frac{q\sigma_{\tau}^3 b}{E^2 (k\sigma_{\tau} b h^2 - M_{\text{полн}})}} = \frac{M_{\text{полн}}}{Eabh^3/12} + \frac{2}{d}. \quad (26)$$

При этом диаметр кольца замеряется по геометрической оси ленты – оси, проходящей через центр тяжести прямоугольного сечения, поскольку именно этот диаметр для изделия рассматривается в качестве заданного [9, 10] (рис. 4). Тогда определение диаметра оправки  $d_{\text{опр}}$ , обеспечивающего получение изделия требуемого размера, производится в такой последовательности: по заданному значению  $d_{\text{изд}}$  решается уравнение (26) и вычисляется момент  $M_{\text{полн}}$ , а затем из (23) находится радиус полной кривизны  $\rho_{\text{полн}}$ , по которому определяется диаметр оправки

$$d_{\text{опр}} = 2\rho_{\text{полн}} - 2(h/2) = 2\rho_{\text{полн}} - h. \quad (27)$$

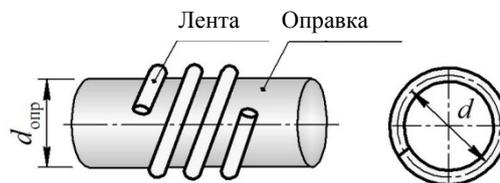


Рис. 4. Схема изгиба ленты в кольцо  
 Рис. 4. Scheme for bending band into ring

Исследуем влияние разномодульности материала на изгиб фторопластовой ленты и проведем сравнительный анализ результатов решения без учета [10] и с учетом нового поло-

жения нейтральной оси в сечении. Методика расчета, рассмотренная в [10] и предполагающая, что нейтральная ось проходит через центр прямоугольника, по сути, тоже учитывает разномодульность материала, используя в расчетных формулах оба модуля Юнга – на растяжение  $E_{\text{раст}}$  и на сжатие  $E_{\text{сж}}$ . Поэтому для выбранных размеров сечения и заданных диаметров получаемых колец результаты решения, полученные и в [10], и по представленной выше методике, практически совпадают: при одних и тех же исходных данных и заданной остаточной кривизне  $1/\rho_{\text{ост}} = 2/d_{\text{изд}}$  в обоих случаях получаются примерно одинаковые значения для полной  $1/\rho_{\text{полн}}$  и упругой  $1/\rho_{\text{упр}}$  кривизны, хотя и с небольшим отличием, но в пределах погрешности расчета. Это подтверждается результатами расчетов, представленных в табл. 1, выполненных для кольцевых изделий диаметром  $d_{\text{изд}}$  из ленты сечением  $b \times h = 5 \times 2$  мм и со свойствами фторопласта-4:  $E_{\text{раст}} = 410$  МПа;  $E_{\text{сж}} = 686$  МПа;  $\sigma_{\text{т(раст)}} = 14$  МПа;  $\sigma_{\text{т(сж)}} = 12$  МПа.

Аналогичная закономерность наблюдается и для других диаметров изготавливаемых колец

и размеров сечения:  $b \times h = 2 \times 2,35$  мм;  $2 \times 3,7$  мм;  $2 \times 4,2$  мм;  $2 \times 5$  мм и т. д.

Однако из табл. 1 видно, что изгибающие моменты  $M_{\text{полн}}$ , создающие одинаковую кривизну  $1/\rho_{\text{полн}}$ , не совпадают. Изгибающий момент, необходимый для получения заданной кривизны ленты с прямоугольным сечением, оказывается больше, чем для случая, когда изгибу подвергается такая же лента, но с приведенным сечением и со смещенной нейтральной осью (рис. 5).

Эти расчеты, несмотря на различие в величине  $M_{\text{изг}}$ , не противоречат друг другу и даже, наоборот, подтверждают правильность разработанной методики, которая в обоих случаях учитывает разномодульность материала: в первом – прямым образом, используя в расчетных формулах модули упругости  $E_{\text{раст}}$  и  $E_{\text{сж}}$ , во втором – косвенным путем, приводя сечение к новой форме со смещенной нейтральной осью. Оба сечения – прямоугольное и приведенное – отличаются друг от друга не просто положением нейтральной оси, но имеют соответственно различный момент инерции относительно этой оси.

Таблица 1

Результаты расчета кольцевых изделий с прямоугольным и приведенным сечениями  
Results of calculations for ring products with rectangular and transformed cross-sections

$d_{\text{изд}}$ , мм	Для прямоугольного сечения [10]				Для приведенного сечения			
	$M_{\text{полн}}$ , Н·мм	$1/\rho_{\text{полн}}$ , мм <sup>-1</sup>	$1/\rho_{\text{упр}}$ , мм <sup>-1</sup>	$1/\rho_{\text{ост}}$ , мм <sup>-1</sup>	$M_{\text{полн}}$ , Н·мм	$1/\rho_{\text{полн}}$ , мм <sup>-1</sup>	$1/\rho_{\text{упр}}$ , мм <sup>-1</sup>	$1/\rho_{\text{ост}}$ , мм <sup>-1</sup>
44	62,36	0,0796	0,0341	0,0455	59,13	0,0793	0,0339	0,0454
67	60,81	0,0631	0,0333	0,0298	58,08	0,0632	0,0333	0,0299
82	59,89	0,0572	0,0328	0,0244	57,46	0,0573	0,0329	0,0243
97	59,04	0,0529	0,0323	0,0206	56,90	0,0532	0,0326	0,0206
114	58,16	0,0494	0,0318	0,0176	56,33	0,0498	0,0323	0,0175
165	55,84	0,0427	0,0306	0,0121	54,91	0,0436	0,0315	0,0121

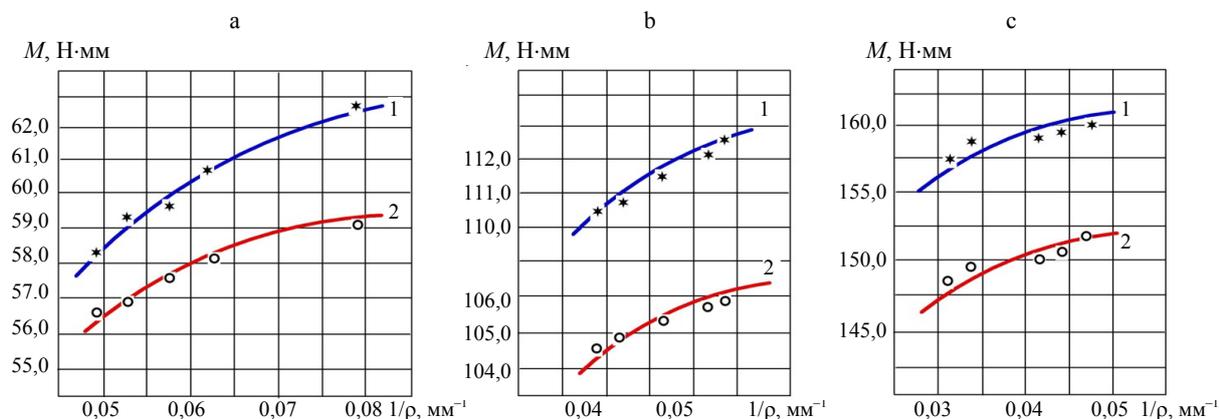


Рис. 5. Зависимости кривизны ленты и изгибающего момента, полученные без учета смещения (1) и с учетом смещения (2) нейтральной оси для сечений  $b \times h$ , мм: а –  $5 \times 2$ ; б –  $2 \times 4,2$ ; в –  $2 \times 5$

Fig. 5. Dependences of band curvature and bending moment obtained without account of shifts (1) and with account shift (2) of neutral axis for sections  $b \times h$ , mm: а –  $5 \times 2$ ; б –  $2 \times 4,2$ ; в –  $2 \times 5$

В прямоугольном сечении  $I_{н.о} = bh^3/12$ , а в приведенном  $I_{н.о} = abh^3/12$ , где нетрудно доказать, что  $a = \frac{(m+1)^2 + 12m}{8 \cdot (m+1)} < 1$ , и значит, момент инерции прямоугольного сечения больше, чем приведенного.

Это объясняет, почему для приведенного сечения со смещенной нейтральной осью получение заданной кривизны требует меньшей величины изгибающего момента. На основании (1) уменьшение момента инерции  $I_{н.о}$  приведет к уменьшению изгибающего момента, необходимого для создания кривизны  $1/r$ . И наоборот, если момент инерции больше, значит, большим должен быть для этой же кривизны изгибающий момент.

### ВЫВОД

Методика расчета изгиба фторопластовой ленты с учетом измененной формы сечения, приведенной к единому модулю упругости, и со смещенной нейтральной осью не противоречит расчету такой же ленты, но прямоугольного сечения [10], для которой в расчетных формулах разномодульность материала учитывается путем введения соответствующих модулей Юнга. Поэтому расчет подобных изделий возможен по обоим методикам, не противоречащим друг другу и достаточно точно согласующимся с опытными данными.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Карякина, М. И. Технология полимерных покрытий / М. И. Карякина, В. Е. Попцов. М.: Химия, 1983. 336 с.
2. Брацыхин, Е. А. Технология пластических масс / Е. А. Брацыхин, Э. С. Шульгина. Л.: Химия, 1982. 328 с.
3. Тугов, И. И. Химия и физика полимеров / И. И. Тугов, Г. И. Кострыкина. М.: Химия, 2009. 432 с.
4. Каргин, В. А. Структура и механические свойства полимеров / В. А. Каргин. М.: Наука, 1979. 449 с.
5. Способ изготовления разрезного кольца из полимерного материала и устройство для его осуществления: пат. Респ. Беларусь ВУ № 14191, 2011 / Г. А. Вершина, А. Ю. Пилатов.
6. Способ изготовления разрезных защитных колец из полимерного материала: пат. Респ. Беларусь ВУ № 19073, 2015 / Г. А. Вершина, А. Ю. Пилатов.
7. Гуль, В. Е. Структура и механические свойства полимеров / В. Е. Гуль, В. Н. Кулезнев. М.: Лабиринт, 1994. 370 с.
8. Вершина, Г. А. Анализ деформационного поведения фторопласта-4 в условиях силового воздействия / Г. А. Вершина, Л. Е. Реут // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-техн. наук. 2016. № 4. С. 23–30.
9. Вершина, Г. А. Упругопластический изгиб фторопластовой ленты при сворачивании в кольцо / Г. А. Вершина, Л. Е. Реут // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-техн. наук. 2017. № 2. С. 40–48.

10. Вершина, Г. А. Влияние упругого ядра на размеры кольцевого изделия при изгибе фторопластовой ленты / Г. А. Вершина, Л. Е. Реут // Наука и техника. 2019. Т. 18, № 1. С. 21–31. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-1-21-31>.
11. Феодосьев, В. И. Сопrotивление материалов / В. И. Феодосьев. М.: Наука, 1967. 550 с.
12. Биргер, И. А. Сопrotивление материалов / И. А. Биргер, Р. П. Мавлютов. М.: Наука, 1986. 560 с.
13. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер: пер. с англ. М.: Наука, 1979. 566 с.
14. Тимошенко, С. П. Механика материалов / С. П. Тимошенко, Дж. Гере: пер. с англ. М.: Мир, 1976. 550 с.

Поступила 10.01.2019

Подписана в печать 12.03.2019

Опубликована онлайн 30.05.2019

### REFERENCES

1. Karyakina M. I., Poptsov V. E. (1983) *Technology of Polymeric Coatings*. Moscow, Khimiya Publ. 336 (in Russian).
2. Bratsykhin E. A., Shulgina E. S. (1982) *Technology of Plastic Mass*. Leningrad, Khimiya Publ. 328 (in Russian).
3. Tugov I. I., Kostrykina G. I. (2009) *Chemistry and Physics of Polymers*. Moscow, Khimiya Publ. 432 (in Russian).
4. Kargin V. A. (1979) *Structure and Mechanical Properties of Polymers*. Moscow, Nauka Publ. 449 (in Russian).
5. Vershina G. A., Pilatov A. Yu. (2011) *Method for Manufacturing Sectional Ring from Polymer Material and Device for its Realization*. Patent of the Republic of Belarus BY No 14191 (in Russian).
6. Vershina G. A., Pilatov A. Yu. (2015) *Method for Manufacturing Sectional Protective Rings from Polymer Material*. Patent of the Republic of Belarus BY No 19073 (in Russian).
7. Gul V. E., Kuleznev V. N. (1994) *Structure and Mechanical Properties of Polymers*. Moscow, Labirint Publ. 370 (in Russian).
8. Vershina G. A., Reut L. E. (2016) *Analysis of Deformation Behaviour in Fluoroplastic-4 under Conditions of Force Action*. *Vestsi Natsyyanal'nai Akademii Navuk Belarusi. Seryya Fizika-Tekhnichnykh Navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, (4), 23–30 (in Russian).
9. Vershina G. A., Reut L. E. (2017) *Elastoplastic Bending of Fluoroplastic Band when Curling into a Ring*. *Vestsi Natsyyanal'nai Akademii Navuk Belarusi. Seryya Fizika-Tekhnichnykh Navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-Technical Series*, (2), 40–48 (in Russian).
10. Vershina G. A., Reut L. E. (2019) *Influence of Elastic Core on Size of Ring Product under Bending of Fluoroplastic Band*. *Nauka i Tekhnika = Science and Technique*, 18 (1), 21–31 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2019-18-1-21-31>.
11. Feodosiev V. I. (1967) *Resistance of Materials*. Moscow, Nauka Publ. 550 (in Russian).
12. Birger I. A., Mavlyutov R. R. (1986) *Resistance of Materials*. Moscow, Nauka Publ. 560 (in Russian).
13. Timoshenko S. P., Goodier J. N. (1951) *Theory of Elasticity*. New York, MacGraw Hill Book Company. 493.
14. Timoshenko S. P., Gere J. M. (1972) *Mechanics of Materials*. New York, Von Norstrand. Reinhold Co. 762.

Received: 10.01.2019

Accepted: 12.03.2019

Published online: 30.05.2019