https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464

УДК 539.3

Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков[1)]

[1)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. В статье приводятся решения двух контактных задач для кольцевого штампа на упругом полупространстве под действием осесимметрично приложенной силы и момента. Подобные задачи обычно возникают при расчетах жестких фундаментов с подошвой кольцевой формы у дымовых труб, градирен, водонапорных башен и других высотных сооружений на ветровую нагрузку и нагрузку от собственного веса. Обе задачи формулируются в виде тройных интегральных уравнений, которые способом подстановки сводятся к одному интегральному уравнению. В случае осесимметричной задачи ядро интегрального уравнения зависит от произведения трех функций Бесселя. Используя формулу для представления двух функций Бесселя в виде двойного ряда по произведениям гипергеометрической функции на функцию Бесселя, задача сводится к функциональному уравнению, связывающему перемещения штампа с неизвестными коэффициентами распределения контактных напряжений. Полученное функциональное уравнение сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая решается способом усечения. При действии момента на кольцевой штамп распределение контактных напряжений ищется в виде ряда по произведениям присоединенных функций Лежандра с весом, соответствующим особенности в контактных напряжениях у краев штампа. При использовании спектрального соотношения Г. Я. Попова для кольцевой пластинки задача опять сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая также решается способом усечения. Приводятся два примера расчетов для кольцевого штампа на упругом полупространстве на действие осесимметрично приложенной силы и момента. Выполнено сопоставление результатов расчетов по предлагаемому подходу с результатами для круглого и кольцевого штампов с решениями других авторов.

Ключевые слова: контактная задача, кольцевой штамп, упругое полупространство, осесимметричная задача

Для цитирования: Босаков, С. В. Две контактные задачи о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство / С. В. Босаков // *Наука и техника*. 2018. Т. 17, № 6. С. 458–464. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464

Two Contact Problems for Circular Die Pressing-In in Elastic Half Space

S. V. Bosakov[1)]

[1)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The paper presents solutions on two contact problems for a circular die on an elastic half-space under the action of an axisymmetrically-applied force and moment. Such problems usually arise while making calculations for a wind load and a load from its own weight pertaining to rigid foundations of chimney stacks, cooling towers, water towers and other high-rise structures with a sole having a circular shape. Both problems are formulated in the form of triple integral equations which are reduced to one integral equation by a substitution method. In the case of the axisymmetric problem a kernel of the integral equation depends on the product of three Bessel functions. Using a formula to represent two Bessel functions in the form

Адрес для переписки	**Address for correspondence**
Босаков Сергей Викторович	Bosakov Siarhei V.
Белорусский национальный технический университет	Belarusian National Technical University
просп. Независимости, 150,	150 Nezavisimosty Ave.,
220114, г. Минск, Республика Беларусь	220114, Minsk, Republic of Belarus
Тел.: +375 17 265-97-28	Tel: +375 17 265-97-28
ftk75@bntu.by	ftk75@bntu.by

of a double row according to the products of a hyper-geometric function by Bessel function, the problem is reduced to a functional equation that interconnects movement of a die with unknown coefficients of the contact stresses distribution. The resulting functional equation is reduced to an infinite system of linear algebraic equations, which is solved by truncation. In the case when a moment is acting on a circular die distribution of contact stresses is searched as a series according to products of the Legendre attached functions with a weight corresponding to specific features in the contact stresses at die edges. While using the spectral G. Ya. Popov ratio for a ring plate the problem is again reduced to an infinite system of linear algebraic equations which is also solved by the truncation method. Two examples are given how to make calculations for a circular die on an elastic half-space according to the action of axially symmetric applied force and moment. A comparison of calculation results on the proposed approach has been made with the results for round and circular dies which were made by other authors.

Keywords: contact problem, circular die, elastic half space, axisymmetric problem

For citation: Bosakov S. V. (2018) Two Contact Problems for Circular Die Pressing-In in Elastic Half Space. *Science and Technique*. 17 (6), 458–464. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2018-17-6-458-464 (in Russian)

Введение

Впервые задачу о расчете кольцевой пластинки на упругом полупространстве поставил и решил Б. Н. Жемочкин [1]. Впоследствии она была решена многими авторами различными способами [2–13], причем Ф. Н. Бородачева [9] также решила контактную задачу о действии момента на кольцевой штамп, лежащий на упругом полупространстве. В. М. Александровым [5, 10] получены асимптотические формулы для распределения контактных напряжений и перемещений кольцевого штампа на упругом полупространстве при действии на штамп осесимметрично приложенной силы и момента. Более сложный вид упругого основания рассмотрен в [13]. В [14] выполнен обзор работ по контактным задачам для кольцевых пластинок. Ряд авторов рассматривали более сложную задачу о расчете кольцевого штампа на упругом слое [3, 6] и анизотропном полупространстве [12].

Следует отметить, что большинство из вышеперечисленных работ отличаются сложностью математических выкладок для нахождения решения. Ниже автором статьи более простым путем дано решение контактной задачи для кольцевого штампа, расположенного на упругом полупространстве и нагруженного силой и моментом.

Первая контактная задача для кольцевого штампа

Рассмотрим осесимметрично нагруженный силой R кольцевой штамп на упругом полупространстве (рис. 1). Будем считать, что на контакте штампа и полупространства отсутствуют касательные напряжения и связи между нижней поверхностью штампа и полупространством являются двусторонними. В такой постановке задача определения контактных напряжений и перемещений штампа сводится к тройным интегральным уравнениям [2, 9]:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \alpha\, A(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0, \quad 0 < r < r_1; \\ &\int_0^\infty A(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = W_0, \quad r_1 < r < r_2; \qquad (1) \\ &\int_0^\infty \alpha\, A(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0, \quad r_2 < r, \end{aligned}$$

где $A(\alpha)$ – неизвестная функция; W_0 – вертикальное перемещение штампа; $J_0(\alpha r)$ – функция Бесселя первого рода [15].

Далее будем пользоваться безразмерными величинами r, r_1, r_2, отнесенными к r_2.

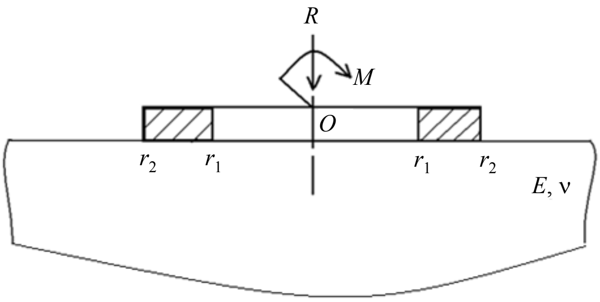

Рис. 1. Кольцевой штамп на упругом полупространстве

Fig. 1. Circular die on elastic half space

Приведем (1) к одному интегральному уравнению способом подстановки [16]. Для этого используем разрывной интеграл [17]:

$$\int_0^\infty \alpha^{1-m} J_n(\alpha a) J_n(\alpha b) J_m(\alpha r) d\alpha = 0,$$

$$(a-b)^2 > r^2;$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a^{m-1} b^{m-1} r^m \left(1-\mu^2\right)^{(2m-1)/4} P_{n-1/2}^{1/2-m}(\mu),$$

$$(a+b)^2 > r^2 > (a-b)^2;$$

$$= 0, \ (a+b)^2 < r^2, \quad \mu = \frac{a^2+b^2-r^2}{2ab}, \tag{2}$$

и представим

$$A(\alpha) = r_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} J_{2n}(\alpha a) J_{2n}(\alpha b),$$
$$a = \frac{r_2 - r_1}{2}; \ b = \frac{r_2 + r_1}{2}. \tag{3}$$

В (2) $P_{n-1/2}^{1/2-m}(\mu)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода [15].

Подставим (3) в (1) и на основании (2) получаем одно интегральное уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \int_0^\infty J_{2n}(\alpha a) J_{2n}(\alpha b) J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{W_0}{r_2}, \tag{4}$$
$$r_1 < r < r_2.$$

Для решения (4) принимаем разложение [18] для произведения двух функций Бесселя

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\gamma-\mu-\nu} J_\mu(\alpha z) J_\nu(\beta z) = \frac{\alpha^\mu \beta^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma+2m) J_{\gamma+2m}(z) \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(\gamma+m+n)\alpha^{2n}}{n!(m-n)!\Gamma(n+\mu+1)} \times \tag{5}$$
$$\times {}_2F_1\left(-n, -n-\mu; \ \nu+1; \ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right),$$

где ${}_2F_1\left(-n, -n-\mu; \nu+1; \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$ – гипергеометрическая функция; $\Gamma(z)$ – гамма-функция [15].

Используем интеграл [15]

$$\int_0^\infty J_\mu(ax) J_\nu(bx) dx = b^\nu a^{-\nu-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \nu+1; \frac{b^2}{a^2}\right).$$

В итоге получаем функциональное уравнение, связывающее между собой коэффициенты C_{2n} представления (3) и перемещение штампа W_0. Обе части этого уравнения умножим на $\dfrac{T_{2k}\left(\dfrac{r_1^2+r_2^2-2r^2}{r_2^2-r_1^2}\right)}{\sqrt{\left(r_2^2-r^2\right)\left(r^2-r_1^2\right)}} rdr, \ k = 0, 1, 2, ...$ и проинтегрируем по r в интервале от r_1 до r_2. При этом используем свойство ортогональности полиномов Чебышева $T_{2k}(z)$ с весом [7, 15]:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{T_{2k}\left(\dfrac{r_1^2+r_2^2-2r^2}{r_2^2-r_1^2}\right) T_{2i}\left(\dfrac{r_1^2+r_2^2-2r^2}{r_2^2-r_1^2}\right)}{\sqrt{\left(r_2^2-r^2\right)\left(r^2-r_1^2\right)}} rdr = \frac{\pi}{2},$$
$$i = k = 0;$$
$$= \frac{\pi}{4}, \quad i = k > 0; \tag{6}$$
$$= 0, \quad i \neq k.$$

Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую решаем методом усечения [19], что позволяет выразить C_{2n} через перемещение W_0.

Так как контактные напряжения определяются по формуле [2]

$$\sigma_z = \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \frac{P_{2n-1/2}^{1/2}(\mu)}{\sqrt{2\pi}\, ab \sqrt[4]{1-\mu^2}},$$

то из уравнения равновесия всего штампа сразу следует, что

$$C_0 = \frac{R\left(1-\nu^2\right)}{\pi E r_2^2}, \tag{7}$$

где E, ν – упругие постоянные полупространства.

Пример 1. Рассмотрим пример расчета кольцевого штампа с размерами $r_1 = 0{,}5r_2$.

Получено при учете первых трех членов разложения (3):

$$\begin{Bmatrix} 2,5805 & 0,0177 & -0,0073 \\ 0,0193 & 0,1623 & -0,0037 \\ -0,0074 & -0,0053 & 0,0766 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} W_0, \quad (8)$$

где $C_0 = 0,6094\dfrac{W_0}{r_2}$; $C_2 = -0,0712\dfrac{W_0}{r_2}$; $C_4 = 0,0537\dfrac{W_0}{r_2}$.

Вертикальное перемещение кольцевого штампа при принятом соотношении $r_1 = 0,5r_2$ будет равно

$$W_0 = 0,5224\frac{R\left(1-\nu^2\right)}{E r_2}.$$

Отметим, что для осесимметрично нагруженного круглого штампа на упругом полупространстве [20] вертикальное перемещение

$$W_0 = 0,5\frac{R\left(1-\nu^2\right)}{E r_2}.$$

Следует также отметить, что в матрице (8) при практических расчетах фундаментов с подошвой кольцевой формы по второй группе предельных состояний можно ограничиться одним членом ряда (3). Тогда

$$W_0 = 0,5229\frac{R\left(1-\nu^2\right)}{E r_2}.$$

Для такого кольцевого штампа в [9] получено

$$W_0 = 0,5015\frac{R\left(1-\nu^2\right)}{E r_2}.$$

Вторая контактная задача для кольцевого штампа

Рассмотрим нагруженный сосредоточенным моментом кольцевой штамп на упругом полупространстве (рис. 1) при ранее принятых предпосылках. Следуя В. М. Абрамову [21], построим систему интегральных уравнений для расчета штампа на действие момента:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \alpha\, A(\alpha)\, J_1(\alpha r)\, d\alpha = 0, \quad 0 < r < r_1; \\ &\int_0^\infty A(\alpha)\, J_1(\alpha r)\, d\alpha = \gamma r, \quad r_1 < r < r_2; \\ &\int_0^\infty \alpha\, A(\alpha)\, J_1(\alpha r)\, d\alpha = 0, \quad r_2 < r, \end{aligned} \quad (9)$$

где $A(\alpha)$ – неизвестная функция; γ – угол поворота штампа; $J_1(\alpha r)$ – функция Бесселя первого рода [15].

Принимаем [22]

$$\int_0^\infty \alpha\, A(\alpha)\, J_1(\alpha\rho)\, d\alpha = \varphi(\rho), \quad \varphi(\rho) = 0, \quad 0 < \rho < r_1;$$
$$\varphi(\rho) = 0, \quad r_2 < \rho < \infty. \quad (10)$$

Тогда первое и третье уравнения (9) удовлетворяются тождественно, а (10) в силу обратного преобразования Ханкеля [23] дает

$$A(\alpha) = \int_{r_1}^{r_2} \rho\varphi(\rho) J_1(\alpha\rho)\, d\rho. \quad (11)$$

Подставляя (11) во второе уравнение (9) и меняя очередность интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} &\int_{r_1}^{r_2} \rho\varphi(\rho) K(r,\rho)\, d\rho = \gamma r; \\ &K(r,\rho) = \int_0^\infty J_1(\alpha\rho) J_1(\alpha r)\, d\alpha, \quad r_1 < \rho < r_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Интегральное уравнение (12) полностью совпадает с разрешающим уравнением контактной задачи для несимметричного вдавливания кольцевого штампа в упругое полупространство, полученное В. М. Александровым [10] другим путем.

Для решения представим в безразмерных координатах $\left(r_2 = 1,\ a = \dfrac{r_1}{r_2},\ r = \dfrac{r}{r_2}\right)$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_1(ur) J_1(u\rho)\, du = \\ &= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty C_{2m+1,2n+1} P_{2m+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right) P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая, что по физическому смыслу $\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\varphi(\rho)$ дает распределение контактных напряжений под подошвой штампа, примем

$$\varphi(\rho)=\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)\left(\rho^2-r_1^2\right)}\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right). \quad (14)$$

Подставим φ(ρ) (14) в уравнение (12) и с учетом (13) выполним интегрирование по переменной ρ. При интегрировании используем:

очевидное представление произведения двух присоединенных функций Лежандра с целочисленными индексами в виде ряда по полиномам Лежандра [15]

$$P_{2m+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)= \\ =\sum_{i=0}^{m+n+1}d_{2m,2n,2i}P_{2i}\left(\sqrt{1-\rho^2}\right); \quad (15)$$

результаты [24] для $0<r,\ \rho<1$

$$\int_0^{\infty}J_1(ur)J_1(u\rho)\,du=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(3+4n)\frac{\Gamma^2(n+1/2)}{\Gamma^2(n+2)}\times \\ \times P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-\rho^2}\right)P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right); \quad (16)$$

спектральное соотношение Г. Я. Попова [25]

$$\int_a^1\frac{y\,P_{2n}\left(\sqrt{1-y^2}\right)}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{y^2-a^2}}dy=(-1)^n\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}P_{2n}(a).$$

В результате получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}\left\{\begin{matrix}\sum_{n=0}^{\infty}(3+4n)\frac{\Gamma^2(n+1/2)}{\Gamma^2(n+2)}P_{2n+1}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right)\\ \sum_{i=0}^{k+n+1}d_{2k,2n,2i}\,(-1)^i\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}P_{2i}(a)\end{matrix}\right\}= \\ =\frac{8E\gamma}{\pi\left(1-\nu^2\right)}r. \quad (17)$$

Умножим обе части (17) на $\frac{P_{2j+1}^1\left(\sqrt{1-r^2}\right)}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{r^2-a^2}}rdr$ и проинтегрируем по r в пределах $(a,\ 1)$, $j=0,\ 1,\ 2,\ \dots$. При этом используем представление (15). Получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, которую решаем методом усечения [19]. В результате получаем связь между углом наклона штампа γ и коэффициентами разложения B_{2k+1} (17). Далее находим полную энергию упругого основания и действующего на кольцевую пластинку момента [26]

$$\Phi=\frac{1}{2}r_2^3\int_0^{2\pi}\int_a^1 q_1(r)\cos^2\varphi\, r^2dr-M\gamma. \quad (18)$$

Приравняв производную от полной энергии (18) по угловому перемещению к нулю, находим это перемещение, что позволяет найти распределение контактных напряжений под подошвой кольцевого штампа от действия момента.

Пример 2. $\frac{r_1}{r_2}=a=0,5.$

Получено при учете первых трех членов разложения (14):

$$B_1=-0,2852\frac{16E}{\pi^2\left(1-\nu^2\right)}\gamma;$$

$$B_3=0,0418\frac{16E}{\pi^2\left(1-\nu^2\right)}\gamma;$$

$$B_5=0,0039\frac{16E}{\pi^2\left(1-\nu^2\right)}\gamma;$$

$$\gamma=0,7525\frac{M\left(1-\nu^2\right)}{Eb^3}.$$

Отметим, что для круглого штампа на упругом полупространстве [20] $\gamma=\frac{3M\left(1-\nu^2\right)}{4Eb^3}$, для подобного кольцевого штампа на полупространстве [9] $\gamma=0,7628\frac{M\left(1-\nu^2\right)}{Eb^3}$.

ВЫВОДЫ

1. Предложены решения двух контактных задач для кольцевого штампа на упругом полупространстве. Необходимость решения таких задач возникает при расчетах фундаментов с подошвой кольцевой формы у дымовых труб, водонапорных башен, градирен и иных высотных сооружений, если в качестве модели грунтового основания принято упругое полупространство.

2. В существующих нормативных документах [27] отсутствуют указания по расчету фундаментов с подошвой кольцевой формы по вто-

рой группе предельных состояний. Результаты настоящей работы могут быть использованы для таких расчетов.

3. Автор не останавливался в тексте на вопросах корректности использования способа усечения [19] при решении получаемых бесконечных систем ввиду сложных и громоздких формул для коэффициентов при неизвестных в этих системах. Однако в [28] доказано, что использование способа ортогональных многочленов при решении контактных задач приводит к регулярным бесконечным системам [19], которые допускают решение способом усечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жемочкин, Б. Н. Расчет круглых плит на упругом основании на симметричную нагрузку / Б. Н. Жемочкин. М.: Изд-во ВИА РККА имени Куйбышева,1938. 135 с.
2. Егоров, К. Е. К вопросу расчета оснований под фундаментом с подошвой кольцевой формы / К. Е. Егоров // Сб. тр. НИИОСП. М.: Госстройиздат, 1958. Вып. 34: Механика грунтов. С. 34–57.
3. Губенко, В. С. Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругий слой и полупространство / В. С. Губенко // Известия АН СССР, ОТН Механика и машиностроение. 1960. № 3. С. 60–64.
4. Егоров, К. Е. Расчет оснований под фундаментом с подошвой кольцевой формы / К. Е. Егоров // Доклады к VI Междунар. конгр. по механике грунтов и фундаментостроению. М.: Стройиздат, 1965. С. 74–82, 290–298.
5. Александров, В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство / В. М. Александров // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1967. № 4. С. 108–116.
6. Валов, Г. М. Бесконечный упругий слой и полупространство под действием кольцевого штампа / Г. М. Валов // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 5. С. 894–907.
7. Губенко, В. С. Точное решение задачи о кольцевом штампе / В. С. Губенко, Г. М. Накашидзе, В. Г. Пятоволенко // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1986. № 8. С. 40–44.
8. Антипов, Ю. А. Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство / Ю. А. Антипов // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1987. № 7. С. 29–33.
9. Бородачева, Ф. Н. О вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство под действием вертикальной внецентренной силы / Ф. Н. Бородачева // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1969. № 8. С. 15–19.
10. Александров, В. М. Взаимодействие плоского наклонного кольцевого штампа с упругим полупространством / В. М. Александров // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, № 1. С. 132–139.
11. Toshkazy, Shibuya. An Elastic Contact Problem for a Half-Space Indented by a Flat Annular Rigid Stamp / Shibuya Toshkazy, Koizumi Takashi, Nakahara Ichiro // Int. J. Engng. Ski. 1974. Vol. 12, No 9. P. 759–771.
12. Dhawan, G. K. A Transversely Isotropic Half-Space Indented by a Flat Annular Rigid Stamp / G. K. Dhawan // Acta Mechanica. 1979. Vol. 31, No 3–4. P. 291–299.
13. Генералова, Н. В. О вдавливании кольцевого в плане штампа в упругий слой с тонким усиливающим покрытием / Н. В. Генералова, Е. В. Коваленко // Механика твердого тела. 1999. № 3. С. 27–33.
14. Шматкова, А. А. Контактные задачи для полупространства, сложные в плане области контакта / А. А. Шматкова // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 138–156.
15. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
16. Уфлянд, Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики / Я. С. Уфлянд. Л.: Наука, 1977. 220 с.
17. MacDonald, H. M. Note on the Evaluation of the Certain Integral Containing Bessel's Functions / H. M. Macdonald // Proc. London Math. Sos. 1909. Vol. S2–7, No 1. P. 142–149.
18. Бейтмен, П. Высшие трансцендентные функции. В 2 ч. / П. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1974. Ч. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. 295 с.
19. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.: Физматлит, 1962. 708 с.
20. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. М.: Стройиздат, 1984. 679 с.
21. Абрамов, В. М. Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство / В. М. Абрамов // ДАН СССР. 1939. Т. 23, № 8. С. 759–763.
22. Ahner, J. F. On the Solution of a Class of Integral Equations / J. F. Ahner, J. S. Lowndes // J. of Math. Anal. and Appl. 1984. Vol. 109, No 2. P. 447–462.
23. Уфлянд, Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости / Я. С. Уфлянд. Л.: Наука, 1968. 402 с.
24. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. Брест: Изд-во БрГТУ, 2006. 108 с.
25. Попов, Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. М.: Наука, 1982. 344 с.
26. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
27. Фундаменты плитные. Правила проектирования: ТКП 45-5.01-67–2007 (02250). Минск: Минстройархитектуры, 2008. 140 с.
28. Развитие теории контактных задач в СССР / под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 496 с.

Поступила 01.06.2018
Подписана в печать 15.08.2018
Опубликована онлайн 30.11.2018

REFERENSES

1. Zhemochkin B. N. (1938) *Calculation of Round Plates on Elastic Foundation for Symmetrical Load*. Moscow, Publishing House of Military Engineering Academy named for V. V. Kuybyshev of Workers' and Peasants' Red Army. 135 (in Russian).
2. Egorov K. E. (1958) On the Problem Pertaining to Calculation of Bed Under Foundation with Foot of Circular Shape. *Collected Papers of Research Institute of Bases and Underground Structures (NIIOSP). Iss. 34. Mechanics of Soils*. Moscow, Publishing House Gosstroyizdat, 34–57 (in Russian).
3. Gubenko V. S. (1960) Pressure of Axisymmetric Circular Die on Elastic Layer and Half-Space. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk. Mekhanika i Mashinostroenie* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Department of Engineering Sciences, Mechanics and Mechanical Engineering], (3), 60–64 (in Russian).
4. Egorov K. E. (1965) Calculation of Beds Under Foundation with Foot of Circular Shape. *Doklady k VI Mezhdunarodnomu Kongressu po Mekhanike Gruntov i Fundamentostroeniyu* [Reports for VIth International Congress on Soil Mechanics and Foundation Engineering] Moscow, Publishing House Stroyizdat, 74–82, 290–298 (in Russian).
5. Alexandrov V. M. (1967) Axisymmetric Problem Pertaining to Action of Circular Die on Elastic Half-Space. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids*, (4), 108–116 (in Russian).
6. Valov G. M. (1968) Infinite Elastic Layer and Half-Space Under Action of Circular die. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 32 (5), 917–930. https://doi.org/10.1016/0021-8928(68)90012-9.
7. Gubenko V. S. Nakashidze G. M., Pyatovolenko V. G. (1986) Exact Solution of Circular die Problem. *Doklady AN USSR. Seriya A: Fiziko-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, Series A, Physico-Mathematical and Engineering Sciences], (8), 40–44 (in Russian).
8. Antipov Yu. A. (1987) Exact Solution of Problem Pertaining to Pressing of Circular Die into Half-Space. *Doklady AN USSR. Seriya A: Fiziko-Matematicheskie i Tekhnicheskie Nauki* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, Series A, Physico-Mathematical and Engineering Sciences], (7), 29–33 (in Russian).
9. Borodacheva F. N. (1969) On pressing Circular Die into Elastic Half-Space Due to Action of Vertical Eccentric Force. *Izvestiya Vuzov. Stroitel'stvo i Arkhitektura* [News of Higher Education Institutions. Construction and Architecture], (8), 15–19 (in Russian).
10. Aleksandrov V. M. (1996) The Interaction Between a Plane Inclined Ring-Shaped Punch and an Elastic Half-Space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 60 (1), 127–134. https://doi.org/10.1016/0021-8928(96) 00017-2.
11. Toshkazy Shibuya, Koizumi Takashi, Nakahara Ichiro (1974) An Elastic Contact Problem for a Half-Space Indented by a Flat Annular Rigid Stamp. *International Journal of Engineering Science*, 12 (9), 759–771. https://doi.org/10.1016/0020-7225(74)90056-1.
12. Dhawan G. K. (1979) A Transversely Isotropic Half-Space Indented by a Flat Annular Rigid Stamp. *Acta Mechanica*, 31 (3–4), 291–299. https://doi.org/10.1007/bf01176856.
13. Generalova N. V., Kovalenko E. V. (1999) On Pressing Circular Die in Terms of Elastic Layer with thin Reinforcing Coating. *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela = Mechanics of Solids*, (3), 27–33 (in Russian).
14. Shmatkova A. A. (2001) Contact Problems for a Half-Space Which are Complicated in Terms of Contact Area. *Mechanics of Contact Interactions*. Moscow, Fizmatlit Publ. 138–156 (in Russian).
15. Gradshtein I. S., Ryzhik I. M. (1963) *Integral Tables of Sums, Series and Products*. Moscow, Fizmatlit Publ. 1100 (in Russian).
16. Uflyand Ya. S. (1977) *Method of Pair Equations in Problems of Mathematical Physics*. Leningrad, Nauka Publ. 220 (in Russian).
17. MacDonald H. M. (1909) Note on the Evaluation of the Certain Integral Containing Bessel's Functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, S2–7 (1), 142–149. https://doi.org/10.1112/plms/s2-7.1.142.
18. Bateman P., Erdélyi A. (1974) *Higher Transcendental Functions. Part 2. Bessel Functions, Parabolic Cylinder Functions, Orthogonal Polynomials*. Moscow, Nauka Publ. 295 (in Russian).
19. Kantorovich L. V., Krylov V. I. (1962) *Approximate Methods of Higher Analysis*. Moscow, Fizmatlit Publ. 708 (in Russian).
20. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on Elastic Foundation*. Moscow, Publishing House Stroyizdat, 679 (in Russian).
21. Abramov V. M. (1939) Investigation of Asymmetric Circular-Section Die Pressure on Elastic Half-Space. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 23 (8), 759–763 (in Russian).
22. Ahner J. F., Lowndes J. S. (1984) On the Solution of a Class of Integral Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 109 (2), 447–462. https://doi.org/10.1016/0022-247x(84)90093-3.
23. Uflyand Ya. S. (1968) *Integral Transformations in the Theory of Elasticity*. Leningrad, Nauka Publ. 402 (in Russian).
24. Bosakov S. V. (2006) *Ritz Method for Contact Problems in Elasticity Theory*. Brest, Publishing House of Brest State Technical University, 108 (in Russian).
25. Popov G. Ya. (1982) *Concentration of Elastic Stresses Near Dies, Sections, Thin Inclusions and Reinforcements*. Moscow, Nauka Publ. 344 (in Russian).
26. Alexandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *Fundamentals of Elasticity and Plasticity Theory*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
27. *TKP [Technical Code of Common Practice] 45-5.01-67–2007 (02250). Slab Foundations. Design Rules*. Minsk, Publishing House of Ministry of Construction and Architecture, 2008. 140 (in Russian).
28. Abramyan B. L., Aleksandrov V. M., Amenzade Yu. A., Aramanovich I. G., Babeshko V. A., Belokon' A. V., Bondareva V. F., Borodachev N. M., Vorovich I. I., Druyanov B. A., Galin L. A. (ed.) (1976) *Development of Contact Problem Theory in USSR*. Moscow, Nauka Publ. 496 (in Russian).

Received: 01.06.2018
Accepted: 15.08.2018
Published online: 30.11.2018