

Таблица 2

ЛИТЕРАТУРА

**Структурные характеристики  
синтезированных пористых композиционных  
материалов для различных адсорбатов**

| Состав композиций | Адсорбат | Размер частиц цеолита, мм | Сорбционный объем пор, см <sup>3</sup> /г | Удельная поверхность, м <sup>2</sup> /г | Эффективный радиус пор, нм |
|-------------------|----------|---------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------|
| NaA + Al (2:1)    | Бензол   | 0,1...0,3                 | 0,115                                     | 64                                      | 3,6                        |
|                   |          | 0,3...0,5                 | 0,07                                      | 48                                      | 2,9                        |
|                   |          | 0,5...1,0                 | 0,07                                      | 49                                      | 2,85                       |
| NaA (исх.)        |          | 0,3...0,5                 | 0,02                                      | —                                       | —                          |
| NaA + Al (2:1)    | Вода     | 0,1...0,3                 | 0,267                                     | 477                                     | 1,1                        |
|                   |          | 0,3...0,5                 | 0,206                                     | 500                                     | 0,8                        |
|                   |          | 0,5...1,0                 | 0,190                                     | 370                                     | 1,0                        |
| NaA (исх.)        |          | 0,3...0,5                 | 0,27                                      | —                                       | —                          |
| NaY + Al (3:1)    | Бензол   | 0,1...0,3                 | 0,34                                      | 420                                     | 1,55                       |
|                   |          | 0,3...0,5                 | 0,26                                      | 391                                     | 1,33                       |
|                   |          | 0,5...1,0                 | 0,29                                      | 441                                     | 1,3                        |
| NaY + Al (3:1)    | Вода     | 0,1...0,3                 | 0,313                                     | 504                                     | 1,2                        |
|                   |          | 0,3...0,5                 | 0,253                                     | 492                                     | 1,0                        |
|                   |          | 0,5...1,0                 | 0,286                                     | 504                                     | 1,1                        |

1. Механизм агрегации порошкообразного алюминия в гидротермальных условиях / А. И. Ратько, В. Е. Романенков, М. В. Станкевич, В. Г. Смирнов // Доклады НАНБ. – 2000. – Т. 44, № 3. – С. 57–59.
2. Повышение качества пористых проницаемых материалов с использованием метода гидротермального синтеза / В. Г. Смирнов, М. В. Станкевич, В. Е. Романенков // Тез. докл. 54-й науч.-техн. конф. БГПА. – Мн., 2000. – Ч.1. – С. 4.
3. Формование изделий из реакционно-активных порошков без приложения внешнего давления / В. Г. Смирнов, М. В. Станкевич, В. Е. Романенков // Тез. докл. 54-й науч.-техн. конф. БГПА. – Мн., 2000. – Ч. 5. – С. 161.
4. Смирнов В. Г., Станкевич М. В., Романенков В. Е. Оксидно-металлические материалы для интенсификации теплообмена // Материалы I обл. межвуз. науч.-практ. конф. «Вузовская наука – региону», Вологда, 25–26 мая 2000 г. / М-во образования РФ; ВоГТУ. – Вологда, 2000. – Т. 2. – С. 132–134.
5. Совершенствование методов формирования структуры материалов с заданными свойствами в процессе гидротермального синтеза / В. Г. Смирнов, М. В. Станкевич, А. А. Прохоренко // Тез. докл. 50-й науч.-техн. конф. БГПА. – Мн., 1994. – Ч. 1. – С. 87.

УДК 517.938+519.711

## ХАОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЕГО ОПИСАНИЕ МЕТОДАМИ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

*Канд. физ.-мат. наук МИКЛАШЕВИЧ И. А.*

*Белорусский национальный технический университет*

Развитие техники и технологий требует описания поведения технических систем при любых параметрах эксплуатации. Особый интерес представляет исследование критических режимов, которые могут привести к потере работоспособности и возникновению аварийных ситуаций. В связи с этим актуально исследование хаотического поведения динамических систем. Для этого может быть вычислена их энтропия. Эта задача достаточно трудна, что связано с внутренней сложностью динамических систем. Особенно усложняется задача вычисления энтропии для динамических систем, заданных на фрактальных функциях, или для иерархических систем. Построение энтропии Реньи для марковских иерархических систем требует введения нестандарт-

ных чисел для распределения меры. В этом случае может быть построена соответствующая энтропия Колмогорова–Синяя и оценено хаотическое поведение системы.

Согласно общему определению, динамической называется система, состояние которой зависит от времени. Практически любая механическая система, которая реализует движение, есть динамическая система. Анализ ее эволюции от начального времени  $t_0$  к конечному времени  $t_f$  с достаточной степенью общности может быть сведен к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y}(t) = Q(y, t, \mu),$$

где  $y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  – вектор  $K$  степеней свободы;  $\mu$  – параметр, от которого зависит система.

Движение системы может быть геометрически представлено как линия, соединяющая последовательные положения системы в  $K$ -мерном евклидовом пространстве  $S^K$ . Это пространство называют фазовым. Будем полагать, что система имеет марковский характер и плотность вероятности состояний системы задается вероятностями  $P_i$ . Рассмотрим возможность определения динамической энтропии системы  $y(t)$ . Для этого проанализируем приближение динамической системы системой функций, которые имеют ту же энтропию.

Рассмотрим систему приближения функций (СПФ) [1]. Она состоит из  $k$  функций  $F_i, i = 1, 2, \dots, k$ , которые действуют случайно с заданными вероятностями  $p_i, i = 1, 2, \dots, k$ . СПФ может быть задана как совокупность детерминированных и стохастических динамических функций и сводит эволюцию системы к дискретной последовательности стационарных состояний. Можно показать [1], что СПФ производит уникальную инвариантную меру, в общем случае фрактальную. Это справедливо для СПФ  $F = \{F_i, p_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ , удовлетворяющей следующим требованиям:

1.  $X$  есть компактное метрическое пространство;
2.  $F_i : X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, k$  есть липшицева функция с постоянной Липшица  $L_i < 1$ ;
3.  $p_i : X \rightarrow [0, 1], i = 1, 2, \dots, k$  есть непрерывная функция Гёльдера, удовлетворяющая условию полноты  $\sum_{i=1}^k p_i(x) = 1$  для  $\forall x \in X$ ;
4.  $p_i(x) > 0$  для любого  $x \in X$  и  $i = 1, 2, \dots, k$ .

СПФ, удовлетворяющую условиям (1)–(4), часто называют гиперболической. В дальнейшем будем рассматривать только такие системы.

СПФ  $F = \{F_i, p_i, i = 1, 2, \dots, k\}$  индуцирует марковский оператор  $V$ , действующий в пространстве  $M(X)$ :

$$(Vv)(B) = \sum_{i=1}^k \int_{F_i^{-1}(B)} p_i(\lambda) dv(\lambda). \quad (1)$$

Пространство  $M(X)$  есть пространство всех мер вероятностей на  $X$ ,  $v \in M(X)$  и  $B$  есть измеримое подмножество  $X$ . Марковский оператор в такой форме описывает эволюцию вероятности измерения [2] под действием  $F = \{F_i, p_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ , а сама СПФ есть непрерывная случайная функция. Марковский процесс, соответствующий оператору (1), может быть построен следующим образом. Возьмем меру вероятности на  $\Omega$

$$P_x(i_1, i_2, \dots, i_n) := P_x(\{\omega \in \Omega : \omega(j) = i_j, j = 1, \dots, n\}) = \\ = p_{i_1}(x) p_{i_2}(F_{i_1}(x)) \dots p_{i_n}(F_{i_{n-1}}(\dots(F_{i_1}(x)))) \quad (2)$$

где  $x \in X; i_j = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n; n \in N$ .  $\Omega$  образует пространство индексов  $\Omega = \{1, \dots, k\}^N$ .

В этом случае марковский процесс может быть построен как

$$Z_n^x(\omega) = F_{\omega(n)}(F_{\omega(n-1)}(\dots(F_{\omega(1)}(x)))) \quad Z_0^x(\omega) = x, \quad (3)$$

где  $\omega \in \Omega, n \in N$ .

Как показано в [3], для СПФ, удовлетворяющих условиям (1)–(4), и для которых справедливы выражения (1)–(3), существует единственная инвариантная мера  $\mu$ . И для нее выполняется уравнение

$$V\mu = \mu.$$

Эта инвариантная мера устойчивая (attractive), т. е.  $V^n v$ , и слабо сходится к  $\mu$  для любого  $v \in M(X)$ , если  $n \rightarrow \infty$ . Другими словами,  $\int_X u dV^n v \rightarrow \int_X u d\mu \quad \forall u : X \rightarrow R$ . Таким образом получаем, что инвариантная мера есть нестандартное число [4, 5].

Рассмотрим энтропию СПФ. Пусть  $\mu$  – устойчивая инвариантная мера для  $F = \{F_i, p_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ . Можно определить [1] меру вероятности  $P_\mu$  на пространстве индексов  $\Omega = \{1, \dots, k\}^N$  как

$$P_{\mu}(i_1, \dots, i_n) := P_{\mu}(\{\omega \in \Omega : \omega(j) = i_j, j = 1, \dots, n\}) = \quad (4)$$

$$= \int_X P_x(i_1, \dots, i_n) d\mu(x)$$

для  $i_j = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n; n \in N$ . Для сокращения записи будем использовать индекс  $i$ , когда речь идет о переборе всех его значений. Тогда с учетом определения энтропии и выражения (4) для частичной энтропии имеем

$$H(n) = - \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k P_{\mu}(i_1, \dots, i_n) d\mu(x). \quad (5)$$

Относительная энтропия задается выражением

$$G(1) := H(1); \quad G(n) = H(n) - H(n-1) \text{ для } n > 1. \quad (6)$$

В связи с тем, что в выражениях (4)–(6) область интегрирования есть нестандартное число, то энтропия Колмогорова–Синая есть точное значение нестандартного числа

$$K_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} G(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{n}.$$

Если ввести энтропию Реньи стандартным образом [6], то имеем

$$K_{\beta} = \frac{1}{1-\beta} \ln \sum_i (p_i)^{\beta} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\beta} \ln \times \quad (7)$$

$$\times \left[ \sum_{i_1, \dots, i_n} P_{\mu}(i_1, \dots, i_n) \left( \frac{P_{\mu}(i_1, \dots, i_n)}{P_{\mu}(i_1, \dots, i_{n-1})} \right)^{\beta-1} \right].$$

В выражении (7)  $\beta$  есть свободный параметр. При  $\beta = 0$  энтропия Реньи совпадает с топологической энтропией, а энтропия Колмогорова–Синая есть предельный случай

$$K_1 = \lim_{\beta \rightarrow 1} K_{\beta}.$$

Введем сопровождающее распределение (escort distribution) [6, 7] для распределения (4). Представим распределение (4) в виде

$$P_{\mu}(i_1, \dots, i_n) = \exp(-b_{\mu}(i_1, \dots, i_n)); \quad (8)$$

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} P_{\mu}(i_1, \dots, i_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \exp(-b_{\mu}(i_1, \dots, i_n)) = 1,$$

тогда сопровождающее распределение принимает вид:

$$p_{\mu} = \frac{(P_{\mu})^{\beta}}{\sum_{i_1, \dots, i_n} (P_{\mu})^{\beta}}; \quad \sum_{i_1, \dots, i_n} (p_{\mu}) = 1.$$

Используя (8), сопровождающее распределение может быть представлено в виде канонического распределения Гиббса:

$$p_{\mu} = \exp[\beta(F(\beta) - b_{\mu})]; \quad F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln \sum_{i_1, \dots, i_n} (-\beta b_{\mu}). \quad (9)$$

Тут  $b_i$  играет роль эффективной функции Гамильтона;  $F(\beta)$  – соответствующая свободная энергия;  $1/\beta$  – эффективная температура. Из уравнения (9) с учетом (7) следует связь свободной энергии и энтропии Реньи

$$F(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln \sum_i \exp(-\beta b_i) = \quad (10)$$

$$= -\frac{1}{\beta} \ln \sum_i \exp(P_i)^{\beta} = -\frac{1-\beta}{\beta} K_{\beta}[P].$$

Из уравнения (10) следует, что при  $\beta = 1$  свободная энергия равна нулю  $F(\beta = 1) = -\ln \sum_i P_i = 0$  и, кроме того,  $p_i = P_i$ . Таким образом, энтропия Реньи имеет статистическую природу и характеризует неравновесное состояние, совпадающее с состоянием хаоса. В соответствии с основными положениями нестандартного анализа это неравновесное состояние представляет монаду точного значения [4, 5]. Гало монады в одномерном индексном пространстве может быть оценено как

$$\Gamma = K_{\beta} - K_1.$$

Рассмотрим приложения общей теории к иерархическому пространству. Как известно, в последнее время иерархическое представление успешно используется для моделирования процессов разрушения, самоорганизации, возникновения катастрофического поведения [8]. В общем случае движение системы в рамках иерархического пространства описывается действием двух иерархических операторов  $\rho^+$ ,  $\rho^\times$ . Оператор  $\rho^+$  отвечает движению по уровням иерархической системы,  $\rho^\times$  – движению в пределах одного слоя [9]. Поэтому пространство индексов  $\Omega$  есть двумерное. Метрические свойства иерархического пространства разрушения специально не исследовались, но его компактность следует из определения многоуровневой иерархической системы [10]. Строго говоря, действие операторов  $\rho^+$ ,  $\rho^\times$  не есть независимое – система не может произвольно менять уровни и положение на этих уровнях (например, перескочить несколько ячеек в результате единичной трансляции). Однако в локальной зоне вблизи текущего состояния трансляция элементарной системы на единичную ячейку является независимым событием. Поэтому действие операторов  $\rho^+$ ,  $\rho^\times$  генерирует двумерный марковский процесс. По свойству независимых марковских процессов полагаем

$$\begin{aligned} P_\mu^v(l_1, \dots, l_m) &:= P_v(l_1, \dots, l_m) P_\mu(i_1, \dots, i_n) := \\ &= P_v(\{\omega \in \Omega : \omega(k) = l_k, k = 1, \dots, m\}) \times \\ &\times P_\mu(\{\omega \in \Omega : \omega(j) = i_j, j = 1, \dots, n\}) = \\ &= \iint_X P_{\rho^+}(l_1, \dots, l_m) P_{\rho^\times}(i_1, \dots, i_n) d\mu(x) dv(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mu$  – инвариантная мера для оператора  $\rho^+$ ;  $v$  – то же для оператора  $\rho^\times$ . В этом случае гало нестандартного числа представляет гипершар в пространстве индексов, а энтропии могут быть введены аналогично процедуре [5–8]. Нестандартные числа (11) согласно общей процедуре

введения иерархии структурных уровней [11] заполняют числовую ось более плотно, нежели множество иррациональных чисел. Гипершар может быть представлен как базисный элемент второго иерархического уровня

$$\Gamma^{(2)}(x, v(\mu)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^{(2)}(x, v(\mu)),$$

где  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  означает предел последовательностей функций.

## ВЫВОД

Автором рассмотрена возможность введения энтропии для динамических систем. Получено, что это может быть сделано на основании аппарата нестандартного анализа. Показано, что энтропия Колмогорова–Синяя есть точное значение нестандартного числа, монада которого определяется энтропией Реньи. Энтропия Реньи может быть использована для определения гало нестандартного числа. Двумерная мера вероятности (11) может быть обобщена на многомерный случай, что позволяет в дальнейшем рассмотреть критерии возникновения иерархического тумана в иерархическом пространстве [9].

**Приложение.** Гёльдерово пространство есть банахово пространство ограниченных и непрерывных функций  $f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , определенных на множестве  $E$   $n$ -мерного евклидова пространства и удовлетворяющих условию Гёльдера.

Условия Гёльдера – неравенства, в которых приращения функции оцениваются через приращения ее аргумента. Для произвольных метрических пространств справедливы неравенства вида

$$\rho_E(f(x), f(x_0)) \leq A(x_0) \rho_X^\alpha(x, x_0),$$

где  $\rho_E, \rho_X$  – метрики пространств  $X, E$ . В теории пластичности классическим примером неравенства Гёльдера является фундаментальное неравенство математической теории пластичности

$$|(\sigma, \varepsilon)| \leq \| \sigma \|_{(P)} \| \varepsilon \|_{(d)},$$

где  $()$  – внутреннее произведение;  $(P), (d)$  – прямая и дуальная нормы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Slomczynski W., Kwapien J., Zyczkowski K. Entropy computing via integration over fractal measures // Chaos. – 2000. – V. 10, № 1. – P. 180–188.
2. Чигарев А. В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Мн.: УП «Технопринт», 2000. – 426 с.
3. Barnsley M. F., Demko S. G., Elton J. H., Geronimo J. S. Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities. – Ann. Ins. Henri Poincaré, Sect. A. – 1988. – V. 24. – P. 367–394; 1989. – V. 25. – P. 589.
4. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике / С. Альбевирео, Й. Фенстад, Р. Хезг-Крон, Т. Линдстрём. – М.: Мир, 1990. – 616 с.
5. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. – Новосибир.: Наука, 1990. – 344 с.
6. Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of Chaotic Systems Cambridge. – Cambridge University Press. – 1993.
7. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория открытых систем. – И. М.: ТОО «Янус», 1995. – 624 с.
8. Shnirman M. G., Tyurina Y. A. Generalised hierarchical model of defect development and self-organised criticality // Phys. Rev. E, 1998. – V. 57, № 4. – P. 3804–3813.
9. Aed Construction and Technology in Design / S. Novikava, K. Miatliuk, S. Gancharova, V. Kaliada // Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Large Scale Systems: Theory and Applications LSS'95. – London, UK, 1995. – P. 379–381.
10. Mesarovic M. D., Masko D., Takahara Y. Theory of Hierarchical Multilevel Systems. – New York; London: Academic Press, 1970.
11. Ревуженко А. Ф. Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. – Новосиб.: Из-во Новосибир. ун-та, 2000. – 428 с.
12. Wei H. Yang. On generalized Hölder inequality // Nonlinear Analysis, Theory & Applications. – 1991. – V. 16, № 5. – P. 489–491.

УДК 666.97.031

## АНАЛИЗ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ

*Докт. техн. наук, проф. СЫЧИК В. А.,  
кандидаты техн. наук ГОРОЖДАНОВ А. Д., УЛАСЮК Н. Н., студ. ВЛАДИМИРОВА С. С.*

*Белорусский национальный технический университет*

Технологический процесс изготовления изделия состоит из ряда операций, каждая из которых имеет свою физико-химическую природу (напыление, травление, диффузия и т. д.) и характеризуется отличными от других параметрами. Вследствие этого для описания каждой технологической операции необходима разработка отдельной математической модели. При этом модель всего технологического процесса (ТП) будет состоять из композиции моделей отдельных технологических операций.

Математическая модель ТП в целом будет представлять собой структуру, образованную моделями отдельных функциональных модулей и моделью связи между ними. В качестве связей между моделями функциональных модулей выступают соотношения, которые обеспечивают сопряжение их входов и выходов по энергетическим и математическим потокам, а также пространственному расположению модулей.

**Методы анализа и синтеза функциональных моделей.** Важным критерием, который определяет возможность использования того или иного метода решения задачи анализа и моделирования ТП, является наличие прототипа ТП, т. е. возможность использовать результаты, полученные на базовой технологической установке, при разработке моделей.

Первым методом разработки новых и усовершенствования существующих ТП является метод проб и ошибок. Технология применения такого подхода базируется на знаниях, опыте, интуиции разработчика и требует значительных финансовых и временных затрат, а в силу определяющего влияния субъективного фактора не гарантирует получение оптимального или просто приемлемого варианта проектного решения.

*Методы теории подобия и аналогового моделирования* широко применяются при анализе тепловых процессов, например при исследо-