УДК 511.343

# НОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

*Инж. ВАХИТОВ М. Ф., канд. физ.-мат. наук, доц. СОКОЛОВА Н. М.*

*Белорусский национальный технический университет*

В работе доказываются следующие утверждения (индекс в обозначениях переменных совпадает с размерностью пространств, в которых эти переменные рассматриваются):

1. Уравнение $A_n^n + B_n^n = C^n$ является уравнением Пифагора в $n$-мерном пространстве так же, как уравнение $A_2^2 + B_2^2 = C^2$ является уравнением Пифагора в 2-мерном пространстве.

2. Уравнение $A_n^n + B_n^n = C^n$ для любых положительных чисел $A_n$, $B_n$, $C$, удовлетворяющих условиям $A_n < C$; $B_n < C$; $A_n + B_n > C$, в том числе и для целых ненулевых взаимно простых чисел, для которых сформулирована теорема Ферма, всегда сводится к квадратному уравнению $A_2^2 + B_2^2 = C^2$.

3. Каждому положительному действительному корню квадратного уравнения на плоскости, т. е. каждой точке полуокружности, построенной на стороне $C$, соответствует корень в $n$-мерном $(n = 3, 4, \ldots)$ пространстве, и, наоборот, каждому решению уравнения $A_n^n + B_n^n = C^n$ в $n$-мерном пространстве соответствует корень квадратного уравнения на плоскости.

Идея доказательства сводится к установлению тождеств, из которых тривиально получаются все утверждения:

$$(A_n/C)^n + (B_n/C)^n \equiv (\cos\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}} + (\cos\beta_n)^{\frac{n}{n-1}} \equiv$$

$$\equiv (\cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_2)^2 = (A_2/C)^2 + (B_2/C)^2 \equiv 1.$$

В свою очередь, для доказательства тождеств вводится новая геометрическая интерпретация теоремы Пифагора в пространстве размерности $n = 2$.

Собственно пифагоровский треугольник $\Delta RSP$ (рис. 1) будем рассматривать как сумму двух треугольников: $\Delta OPR$, на гипотенузе $PR$ которого строится квадрат одного числа $B_2$, и $\Delta OSR$, на гипотенузе $SR$ которого строится квадрат второго числа $A_2$, удовлетворяющих уравнению $A_2^2 + B_2^2 = C^2$.

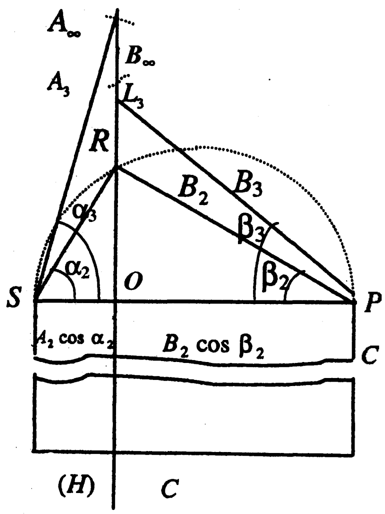


Рис. 1

Общеизвестные построения и соотношения напоминаем лишь для того, чтобы по этому алгоритму построить проекции из $n$-мерных пространств на плоскость.

Из середины стороны ($C^2$)-квадрата (в скобках – название фигуры, без скобок – величина фигуры) проведем радиусом $C/2$ полуокружность, каждая точка которой, соединенная с концами стороны ($C$), образует прямоугольный треугольник (рис. 1).

Произвольно выберем точку на этой полуокружности и проведем через нее перпендикуляр $H$ к гипотенузе $C$ прямоугольного треугольника.

Этот перпендикуляр делит сторону ($C$) на две части: $C = A_1 + B_1$, где $A_1 = A_2\cos\alpha_2$; $B_1 = B_2\cos\beta_2$. $(C^2)$-квадрат также делится на две части, площади которых соответственно равны:

$$CA_2\cos\alpha_2 = A_2^2 \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha_2 = A_2/C;$$

$$CB_2\cos\beta_2 = B_2^2 \quad\Rightarrow\quad \cos\beta_2 = B_2/C,$$

при этом $A_1 = A_2^2/C$; $B_1 = B_2^2/C$ и $A_2^2 + B_2^2 = C^2$.

Из концов стороны ($C$) радиусом $C$ сделаем отметки на продолжении перпендикуляра, ограничивающие $A_n$ и $B_n$ при $n \to \infty$: $A_n < A_\infty = C$; $B_n < B_\infty = C$.

Перейдем в пространство размерности $n = 3$ (рис. 2). На $(C^2)$-квадрате построим $(C^3)$-куб. Так как грань $(C^2)$ разделена на две площади, значит, и $(C^3)$ оказывается разделенным на два объема ($A_3^3$) и ($B_3^3$) плоскостью, которая проходит через перпендикуляр $H$ параллельно боковым граням куба.

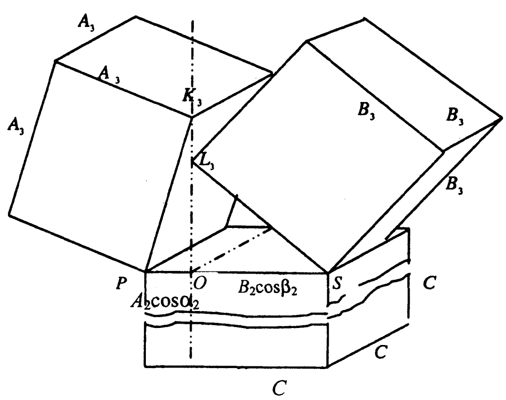


Рис. 2

Извлечем кубические корни из объемов и получим длины сторон $A_3 = \left(C^2A_1\right)^{\frac{1}{3}}$, $B_3 = \left(C^2B_1\right)^{\frac{1}{3}}$ кубов ($A_3^3$), ($B_3^3$) $(A_3 < B_3,\ A_3 < A_\infty,\ B_3 < B_\infty)$. Прямые ($A_3$) и ($B_3$) наклонены к стороне ($C$) под углами $\alpha_3$ и $\beta_3$, и их проекции на сторону ($C$) равны:

$$A_3\cos\alpha_3 = A_1 \quad\text{и}\quad B_3\cos\beta_3 = B_1.$$

Итак,

$$A_3^3 = C^2A_1 = C^2A_3\cos\alpha_3 = A_2^2C \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_3 = \left(C\cos\alpha_3\right)^{\frac{1}{2}} = \left(CA_2^2\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$B_3^3 = C^2B_1 = C^2B_3\cos\beta_3 = B_2^2C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_3 = \left(C\cos\beta_3\right)^{\frac{1}{2}} = \left(CB_2^2\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$(A_3/C)^3 + (B_3/C)^3 = \left(\cos\alpha_3\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\cos\beta_3\right)^{\frac{3}{2}} = 1.$$

Применяя этот алгоритм построения проекций на плоскость из пространств размерностей $n = 4, 5, \ldots$, получаем для $n$-мерного пространства следующие равенства:

$$A_n^n = C^{n-1}A_n\cos\alpha_n = A_2^2C^{n-2};$$

$$B_n^n = C^{n-1}B_n\cos\beta_n = B_2^2C^{n-2}.$$

Соотношения для вычисления $A_n$ и $B_n$ запишем в виде:

$$A_n^n = C^{n-1}A_n\cos\alpha_n \Rightarrow \cos\alpha_n = \left(A_n/C\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n/C = \left(\cos\alpha_n\right)^{\frac{1}{n-1}};$$

$$B_n^n = C^{n-1}B_n\cos\beta_n \Rightarrow \cos\beta_n = \left(B_n/C\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n/C = \left(\cos\beta_n\right)^{\frac{1}{n-1}};$$

$$A_n^n = A_2^2C^{n-2} \Rightarrow \left(A_n/C\right)^n = \left(A_2/C\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n/C = \left(A_2/C\right)^{\frac{2}{n}} = \left(\cos\alpha_2\right)^{\frac{2}{n}};$$

$$B_n^n = B_2^2C^{n-2} \Rightarrow \left(B_n/C\right)^n = \left(B_2/C\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n/C = \left(B_2/C\right)^{\frac{2}{n}} = \left(\cos\beta_2\right)^{\frac{2}{n}}.$$

Сравнивая полученные выражения для $A_n/C$, $B_n/C$, найдем зависимости:

$$A_n/C = (\cos\alpha_n)^{\frac{1}{n-1}} = (\cos\alpha_2)^{\frac{2}{n}} = (A_2/C)^{\frac{2}{n}};$$

$$B_n/C = (\cos\beta_n)^{\frac{1}{n-1}} = (\cos\beta_2)^{\frac{2}{n}} = (B_2/C)^{\frac{2}{n}}.$$

Возведем в $n$-ю степень все части последних равенств, почленно сложим их и получим доказываемые тождества:

$$(A_n/C)^n + (B_n/C)^n \equiv (\cos\alpha_n)^{\frac{n}{n-1}} + (\cos\beta_n)^{\frac{n}{n-1}} \equiv$$

$$\equiv (\cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_2)^2 = (A_2/C)^2 + (B_2/C)^2 \equiv 1.$$

Из утверждений 1, 2 получаем геометрический образ обобщенной теоремы Пифагора в $n$-мерном пространстве:

в проекциях на плоскость пространств размерности $n > 2$ имеем два прямоугольных треугольника $\Delta OPK_n$ и $\Delta OSL_n$ (рис. 2 $\Delta OPK_3$ и $\Delta OSL_3$), которые уже не составляют единого треугольника, как в случае $n = 2$ и $A_n = B_n$, $n = 2, 3, \ldots$.

Из утверждения 3 вытекает метод решения обобщенного уравнения Пифагора в $n$-мерном пространстве:

определяются корни квадратного уравнения $A_2^2 + B_2^2 = C^2$ и вычисляются значения переменных $A_n$ и $B_n$ в соответствующих пространствах по формулам: $A_n = A_2^{\frac{2}{n}} C^{1-\frac{2}{n}}$; $B_n = B_2^{\frac{2}{n}} C^{1-\frac{2}{n}}$.

Из сравнения показателей степеней в тождествах следует, что показатель степени является целым лишь в единственном случае, когда $\frac{n}{n-1} = 2$, т. е. теорема Ферма имеет смысл тогда и только тогда, когда $n = 2$.