УДК 621.9.048.4

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИБРОАКУСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЖЕСТКИМ ОСНОВАНИЕМ

*Докт. техн. наук, проф.* ***КИСЕЛЕВ М. Г.,***
*канд. физ.-мат. наук, доц.* ***НИФАГИН В. А.,*** *асп.* ***ДРОЗДОВ А. В.***

*Белорусский национальный технический университет*

В процессе изготовления изделий из драгоценных камней и различных монокристаллов в настоящее время широко применяется операция их механического распиливания, т. е. разделения заготовок на части, которая характеризуется весьма низкой производительностью. С целью ее повышения известны попытки вводить в зону распиливания ультразвуковые колебания [1, 2], сообщая их обрабатываемой заготовке в направлении перпендикулярной торцевой (режущей) поверхности распиловочного диска. Для реализации виброударного режима взаимодействия распиловочного диска с обрабатываемой заготовкой и дальнейшего повышения производительности было предложено использовать экспериментальную установку с акустической колебательной системой разомкнутого типа, реализующую ударное взаимодействие элементов в системе «инструмент – обрабатываемая заготовка» (рис. 1).

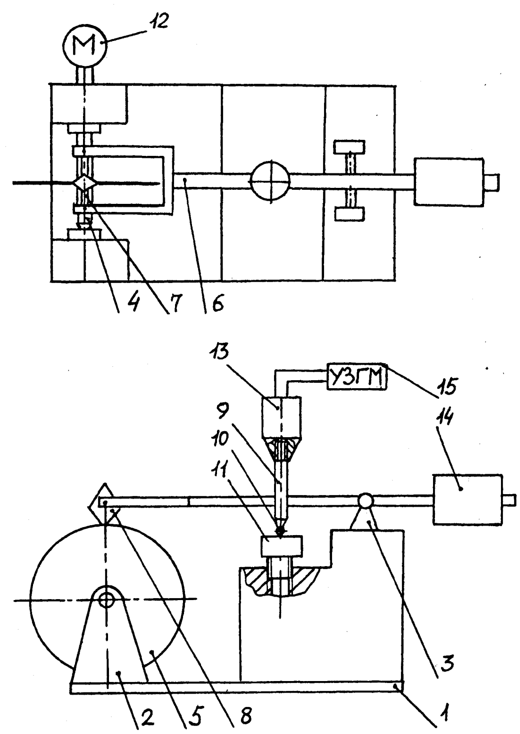


*Рис. 1.* Схема установки для распиливания кристаллов алмаза

Установка для распиливания кристаллов алмаза содержит станину 1, на которой установлены две пары стоек: передняя 2 и задняя 3. В передней паре стоек в бронзографитовых подшипниках скольжения вращается шпиндель 4 с распиловочным диском 5. Задняя пара стоек станины распиловочной секции служит для установки стрелы 6 с оправками 7, в которых закрепляется обрабатываемая заготовка 8. Для ориентации обрабатываемой заготовки относительно распиловочного диска к концу одной из оправок с помощью резьбового крепления прикреплялся фланец, в котором был выполнен квадратный паз с размером стороны 6 мм.

Стрела жестко связана со стержнем-концентратором 9 с помощью двух зажимных винтов. Стержень-концентратор имеет полуволновую длину и конический наконечник для усиления амплитуды колебаний.

Стержень-концентратор через промежуточный элемент 10 опирается на регулировочную платформу 11, на которой выполнена резьба с мелким шагом. На торце конического наконечника выполнена сферическая поверхность, с которой сопрягается подвижный промежуточный элемент в виде стального шарика.

Изменение угла наклона стрелы и подача заготовки на распиловочный диск, а также ее отвод происходят при повороте регулировочной платформы вокруг своей оси и перемещении ее с помощью резьбового соединения относительно станины распиловочной секции. Обрабатываемая заготовка вклеивается в квадратный паз на фланце оправки и поджимается второй оправкой, закрепленной в шарнирном устройстве стрелы. Вращение шпинделя осуществляется с помощью плоскоременной передачи (на рисунке не показана) от синхронного электродвигателя 12. Ультразвуковой преобразователь 13 установлен над стержнем-концентратором и контактирует с ним с помощью резьбового соединения. Для уравновешивания стрелы и создания рабочего давления на обрабатываемой заготовке установлен регулируемый противовес 14. Для возбуждения виброударного режима работы в зоне распиливания были использованы ультразвуковая аппаратура, включающая генератор 15 ультразвуковых колебаний УЗГМ выходной мощностью до 40 Вт с частотой в пределах 22...44 кГц и пьезоэлектрический преобразователь с номинальной частотой 44 кГц.

Установка работает следующим образом. Включается электродвигатель установки. При помощи регулировочной платформы стрела с закрепленным кристаллом опускается на режущий инструмент. Включается ультразвуковой преобразователь, от которого колебания передаются через стрелу на кристалл. По мере углубления режущего инструмента в кристалл механизмом изменения угла наклона стрелы опускают регулировочную платформу и, меняя параметры ультразвукового воздействия, добиваются максимального качества поверхности на начальном и конечном этапах распиловки и значительного повышения производительности в промежутке между этими этапами.

Таким образом, при работе данной экспериментальной установки довольно просто реализуется виброударный режим взаимодействия виброакустической системы с жестким основанием.

Виброакустическая система с абсолютно жестким основанием совершает движение в направлении основания (рис. 2) и входит с последним в виброконтакт, продолжающийся до момента ее торможения по мере накопления импульса реакции основания и последующего разгона в обратном направлении. После выхода из виброконтакта система совершает движение лишь под действием статического усилия, которое возвращает ее к основанию. Затем процесс периодически повторяется.

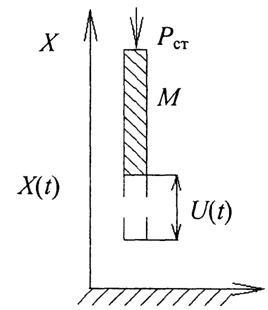


*Рис. 2.* Модель взаимодействия ультразвукового вибратора с жестким основанием

Режим взаимодействия торца виброэлемента с основанием, называемый фазой *I*, является кратным (рис. 3) и характеризуется большим числом $N = t_*/T_{ак}$ соударений за время $t_*$ длительности фазы *I* торможения и обратного отхода системы от основания на контактное расстояние $2A$.

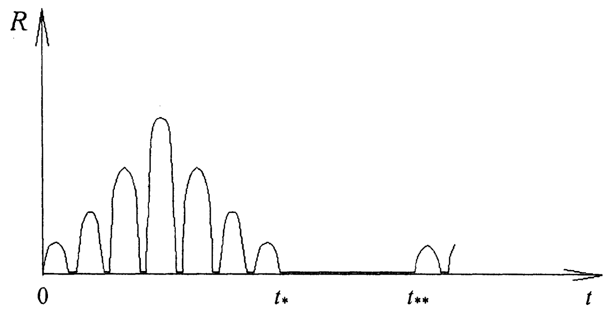


*Рис. 3.* Характер взаимодействия торца элемента с основанием

Используем модель виброакустической сис-темы, предложенную в [3] и состоящую из сосредоточенной массы $M$, нагруженной статическим (постоянным) усилием $P_{ст}$ и снабженной невесомым виброэлементом с характеристикой

$$u(t)=f(t)-\frac{R(t)}{c}, \qquad (1)$$

где $u(t)$ – смещение торца элемента относительно положения $x(t)$ массы $M$; $R(t)$ – усилие на торце элемента при контакте с основанием ($R\geq 0$); $c$ – жесткость системы; $f(t)$ – закон колебаний ненагруженного торца (при $R=0$).

Например, $f(t)=A(1-\gamma(t)\cos\omega_{\text{ак}}t)$ – для гармонического ультразвукового колебания с частотой $\nu_k=\dfrac{\omega_{\text{ак}}}{2\pi}$ и периодом $T_{\text{ак}}=\dfrac{1}{\nu_{\text{ак}}}$, где $\gamma(t)$ – монотонно убывающая функция, например $\gamma(t)=ae^{-bt}$, а $>0$; $b\geq 0$.

Соотношение (1) использовалось в [3] для оценки импульса и длительности при единичном соударении виброэлемента и основания. В частности, при $2cA>P_{\text{ст}}$ контакт взаимодействия является виброударным, когда его длительность $T_c$ оказывается меньше периода $T_{\text{ак}}$ ультразвуковых колебаний. Поэтому кратный режим соударений предполагает дискретный момент передачи импульса, что неудобно для его математического описания и затрудняет в этом случае использование указанных в [3] оценок, приводя к необходимости суммирования большого числа малых слагаемых.

С целью преодоления указанных затруднений и перевода дискретных представлений в непрерывные целесообразно усреднить переданный за время $T_c$ импульс на период $T_{\text{ак}}$ ультразвука, т. е. за время $T_c$ импульс составит

$$I_{\text{ак}}=\int_{\Gamma}R(t)dt,$$

где Г – множество временных интервалов контакта, когда $R(t)\geq 0$.

Внося сюда соотношение (1) для усилия на торце, имеем

$$I_{\text{ак}}=c\int_{\Gamma}(f(t)-u(t))dt.$$

Тогда осредненный (за единицу времени) импульс в течение времени $T_{\text{ак}}$ составит

$$I_{\text{ср}}=\frac{c}{T_{\text{ак}}}\int_{\Gamma}(f(t)-u(t))dt.$$

Так как $u(t)=x(t)$ на участке Г ($\alpha\leq t\leq\beta$) контакта (рис. 2), получаем

$$I_{\text{ср}}=\frac{c}{T_{\text{ак}}}\int_{\alpha}^{\beta}(f(t)-x(t))dt. \qquad (2)$$

Кратный характер взаимодействия возможен для больших значений массы системы $M \gg I_{\text{ак}}/gT_{\text{ак}}$ ($g$ – ускорение свободного падения). Длительность $\beta-\alpha$ единичного соударения мала по сравнению с $T_c$. Поэтому изменением координаты системы $x(t)$ на $\alpha\leq t\leq\beta$ можно пренебречь. Полагая поэтому $x(t)=x$ в начале очередного контакта, можно записать (2) в виде

$$I_{\text{ср}}=\frac{c}{T_{\text{ак}}}\int_{\alpha}^{\beta}(f(t)-x)dt=\frac{c}{T_{\text{ак}}}\Big(\int_{\alpha}^{\beta}f(t)dt-x(\beta-\alpha)\Big). \qquad (3)$$

Из условия $R(t)\geq 0$ следуют соотношения для определения $\alpha$, $\beta$:

$$f(\alpha)=x;\ f(\beta)=x\ \ (f(t)\geq x \text{ при } \alpha\leq t\leq\beta). \qquad (4)$$

Определяя из (4) $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$ и подставляя в (3), получим зависимость $I_{\text{ср}}(x)$ среднего (на единицу времени) импульса взаимодействия вибросистемы и основания. Тогда импульс за время $t$ составит:

$$I(t)=\int_{0}^{t}I_{\text{ср}}(x)d\tau;\quad I_{\text{ср}}=\frac{dI}{dt}. \qquad (5)$$

Например, в случае

$$f(t)=A(1-\gamma(t)\cos\omega_{\text{ак}}t)$$

из (4) находим:

$$A(1-\gamma(\alpha)\cos\omega_{\text{ак}}\alpha)=x;\quad A(1-\gamma(\beta)\cos\omega_{\text{ак}}\beta)=x,$$

откуда:

$$\begin{aligned}Aa\exp^{-b\alpha}\cos\omega_{\text{ак}}\alpha&=A-x;\\ Aa\exp^{-b\beta}\cos\omega_{\text{ак}}\beta&=A-x.\end{aligned} \qquad (6)$$

При этом должно выполняться условие сближения торца с основанием на расстояние виброконтакта

$$0\leq x\leq 2A.$$

Выполняя интегрирование в (3), имеем

$$I_{\text{ср}} = \frac{dI}{dt} = \frac{c}{T_{\text{ак}}}\left((A-x)(\beta-\alpha) + \frac{Aa}{b^2+\omega_{\text{ак}}^2}\times\right.$$
$$\times((b\cos\omega_{\text{ак}}\beta - \omega_{\text{ак}}\sin\omega_{\text{ак}}\beta)e^{-b\beta} +$$
$$\left.+(\omega_{\text{ак}}\sin\omega_{\text{ак}}\alpha - b\cos\omega_{\text{ак}}\alpha)e^{-b\beta}\right).$$

Внося (6) с учетом (3), (5), получим, так как $T_{\text{ак}}\omega_{\text{ак}} = 2\pi$:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{c}{\pi}((A-x)(\beta_* - \alpha_*) - \alpha_* \frac{A\exp^{-b\beta_*}}{b^2+\omega_{\text{ак}}^2}\times$$
$$\times(\omega_{\text{ак}}\sin\omega_{\text{ак}}\beta_* - b\cos\omega_{\text{ак}}\beta_*) + \tag{7}$$
$$+\frac{aA\exp^{-b\alpha}}{b^2+\omega_{\text{ак}}^2}(\omega_{\text{ак}}\sin\omega_{\text{ак}}\alpha - b\cos\omega_{\text{ак}}\alpha_*)),$$

где $\alpha_*$, $\beta_*$ – решения (6), зависящие от $x$.

Для упрощения зависимости можно рассмотреть вместо гармонического ультразвукового колебания его квадратичную аппроксимацию:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T_{\text{ак}}}(a_0t^2 + b_0t), & 0 \le t \le \frac{T_{\text{ак}}}{2}; \\ \frac{4A}{T_{\text{ак}}}(a_1t^2 + b_1t + c_1), & \frac{T_{\text{ак}}}{2} < t \le T_{\text{ак}}. \end{cases} \tag{8}$$

Причем зависимости (8) должны сохранять как амплитудное значение перемещения торца $2A$, так и максимальный импульс, сообщаемый контактирующему телу при гармоническом законе ультразвуковых колебаний.

Из (4), (8) следует:

$$\begin{aligned} &\frac{4A}{T_{\text{ак}}}(a_0\alpha^2 + b_0\alpha) = x; \\ &\frac{4A}{T_{\text{ак}}}(a_1\beta^2 + b_1\beta + c_1) = x. \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) отыскиваются значения $\alpha$ и $\beta$, из (3) получается более компактная по сравнению с (7) формула для среднего усилия взаимодействия торца с основанием.

Вообще говоря, допустимы различные аппроксимации функции $f(t)$, которые после осреднения, аналогичного приведенному, приводят к иным зависимостям. Например:

$$I_{\text{ср}}(x) = cAF(x/2A). \tag{10}$$

Функция $F(x)$ должна быть при этом монотонно убывающей на $x \in [0;1]$, причем $F(0) = 1$ и $F(1) = 0$.

Например, применяется степенная зависимость вида

$$I_{\text{ср}}(x) = cA(1 - \frac{x}{2A})^{\alpha} \quad (\alpha > 0) \tag{11}$$

с параметрами $c$, $A$, $\alpha$, выбираемыми экспериментально.

Соотношения (7), (10), (11) справедливы на участках $0 \le x \le 2A$ виброконтакта системы с основанием (фаза движения 1). При $x > 2A$ (фаза 2) принимается $I_{\text{ср}} = 0$. В то же время подобное финитное задание функции $I_{\text{ср}}(x)$ не обязательно и допустимо использовать другие аппроксимации в виде гладких функций, достаточно близких к нулю при $x > 2A$. Подобное представление в аппаратном плане более удобно, так как отпадает необходимость разделения движения на фазы.

Количество движения, сообщенное системой основанию, может быть найдено при известной $x(t)$ по формуле

$$I(t) = \int_0^t I_{\text{ср}}(x(\tau))d\tau = cA\int_0^t F(\frac{x(\tau)}{2A})d\tau.$$

Динамика взаимодействия системы с жестким основанием опишется следующим образом.

Для анализа закона движения $x(t)$ системы, взаимодействующей с основанием (рис. 2), запишем уравнение движения

$$M\ddot{x}(t) = -P_{\text{ст}} + I_{\text{ср}}(x) \tag{12}$$

с начальными условиями:

$$x(0) = 2A; \quad \dot{x}(0) = -V_0, \tag{13}$$

соответствующими началу движения $t = 0$, выбираемому в момент входа системы в зону 1, когда система располагается в точке $x(0) = 2A$.

Решение (4), (5) запишется

$$x(t) = -\int_0^t G(\tau,\xi)\Phi(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{2} A_k x_k(t), \quad (14)$$

где

$$G(t,\xi) = \frac{\delta \sin\vartheta(\frac{\pi}{2} - t)\sin\vartheta\xi}{\vartheta \sin\vartheta}; \quad (15)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{c}{T_{\text{ак}}}(A(\beta-\alpha) - a\frac{A\exp^{-b\beta_*}}{b^2+\omega_{\text{ак}}^2}\times$$
$$\times(\omega_{\text{ак}}\sin\omega_{\text{ак}}\beta_* - b\cos\omega_{\text{ак}}\beta_*) +$$
$$+\frac{aA\exp^{-b\alpha_*}}{b^2+\omega_{\text{ак}}^2}(\omega_{\text{ак}}\sin\omega_{\text{ак}}\alpha_* - b\cos\omega_{\text{ак}}\alpha_*)).$$

Здесь $\alpha_*$, $\beta_*$ зависят от $\xi$.

Соотношения (14), (15) определяют закон движения системы $x(t)$ при заданных линейно независимых функциях $x_k(t)$, $k = 1, 2$, и экспериментальных параметрах.

Рассмотрим малые колебания виброакустической системы (рис. 4).

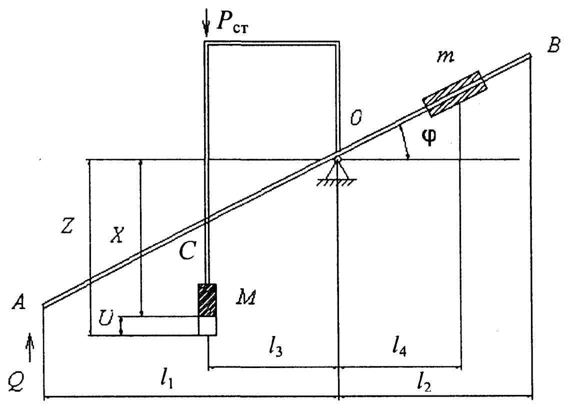


*Рис. 4.* Модель виброакустической системы

Уравнение движения коромысла около опоры $O$ запишется:

$$J\ddot{\varphi} = \frac{F_1 l_1(1+\frac{1}{\cos\varphi})}{2} - \frac{F_2 l_2}{2} - P_{\text{ст}} l_4 + R l_3 - S l_3 - Q l_1; \quad (16)$$

$$J = 1/3\gamma(l_1^3 + l_2^3) + M l_3^2;\quad F_1 = \gamma l_1 g;\quad F_2 = \gamma l_2 g;$$
$$P = mg,$$

где $M$, $m$ – массы акустического вибратора и противовеса, помещенного на участке $OB$ волновода; $\gamma$ – погонная масса коромысла $AB$ (на единицу длины); $R$ – контактное усилие взаимодействия торца вибратора и коромысла; $S$ – реакция демпфирующего элемента; $P_{\text{ст}}$ – статическое усилие прижима вибратора; $Q$ – усилие, действующее на обрабатываемый образец; $\varphi$ – малый угол отклонения коромысла ($\varphi << 1$).

Для контактного усилия взаимодействия вибратора с коромыслом в точке $C$ примем осредненную зависимость:

$$R = \begin{cases} cA(1-\frac{z-x}{2A})^{\alpha}, & 0 \le z-x \le 2A; \\ 0, & z-x > 2A. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь учтены соотношения: $u = z - x$ при наличии контакта; $u < z - x$ – при его отсутствии.

Вид усилия $S$ определяется характером демпфирования коромысла, например для вязкоупругой связи можно принять

$$S = k_1(z - z_*)^{\beta} + k_2\dot{z}^{\gamma} \quad (18)$$

с параметрами $k_1$, $k_2$, $\beta$, $\gamma$, выбираемыми экспериментально.

Вид функции $Q$ определяется механическими свойствами материала и контактирующей обрабатываемой детали.

Запишем уравнение движения массы $M$, пренебрегая весом крепления вибратора к коромыслу:

$$M\ddot{x} = P_{\text{ст}} - R. \quad (19)$$

Поскольку колебания коромысла малы, полагаем $z = l_3\varphi$, и уравнение (16) перепишем в виде

$$\ddot{z} = N + (R-S)\frac{l_3^2}{J} - \frac{Q l_1 l_3}{J}, \quad (20)$$

где $N = 0{,}5F_1 l_1 - F_2 l_2 - P_{\text{ст}} l_4$.

Задавая зависимости $Q(z, \dot{z})$, $R(x, z)$, $S(z, \dot{z})$, система дифференциальных уравнений (19), (20) вместе с начальными условиями:

$$x(0) = x_0;\ \dot{x}(0) = x_1;\ z(0) = z_0;\ \dot{z}(0) = z_1 \quad (21)$$

определяет нелинейную задачу Коши для искомых функций $x(t)$, $z(t)$. Для качественного анализа данной дифференциальной модели рассмотрим подробнее основной случай, когда прочность обрабатываемой детали велика, и перемещением рабочего торца $A$ коромысла в течение одного акта кратного взаимодействия торца с деталью можно пренебречь. Полагая $z(t) = z_0$, при этом необходимое для обеспечения этого режима усилие $Q$ на рабочем торце неизвестно и определяется вместе с функцией $x(t)$ из (19)...(21). Введем функции:

$$h = 1 - \frac{z_0 - x}{2A}; \quad R = cAh^{\alpha} \ (h \geq 0). \tag{22}$$

Из (19) получим уравнение относительно $h(t)$

$$\ddot{h} = \frac{P_{\text{ст}}}{2AM} - \frac{ch^{\alpha}}{2M}. \tag{23}$$

Первый интеграл этого уравнения будет

$$\dot{h}^2 = \frac{P_{\text{ст}} h}{AM} - \frac{ch^{\alpha+1}}{M(\alpha+1)} + a_1. \tag{24}$$

Из начальных условий (21) с учетом (22) и соотношений:

$$u(0) = z_0; \ h(0) = 1; \ \dot{h}(0) = \dot{x}(0)/2A = x_1/2A \tag{25}$$

находим постоянную

$$a_1 = \left(\frac{x_1}{2A}\right)^2 - \frac{P_{\text{ст}}}{AM} + \frac{c}{M(\alpha+1)}. \tag{26}$$

Уравнение (24) для краткости запишем в виде

$$\dot{h}^2 = a_1 + a_2 h - a_3 h^{\alpha+1}$$
$$\left(a_2 = \frac{P_{\text{ст}}}{AM}; \ a_3 = \frac{c}{M(\alpha+1)}\right). \tag{27}$$

Учитывая, что $\dot{h}(t) = \dot{x}(t)/2A > 0, \quad h(t) \geq 1$, находим решение уравнения (27) $h(t)$ в виде

$$t = \int_1^h \frac{d\xi}{\sqrt{H(\xi)}}, \tag{28}$$

где

$$H(h) = a_1 + a_2 h - a_3 h^{\alpha+1}. \tag{29}$$

Интеграл (28) определен (в несобственном смысле) на $h \in [1; h_1]$, где $H(h) \geq 0$. Значение $h_1$ является первым положительным вещественным корнем уравнения $H(h) = 0$.

Так, при $\alpha = 1$

$$\alpha_1 = (a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4a_1 a_2})/(2a_3).$$

Искомая функция $x(t)$, согласно (22) и с учетом (28), имеет вид

$$x(t) = 2A(h(t) - 1) + z_0. \tag{30}$$

Усилие резания по (20) и (18) найдем

$$Q(t) = \frac{J}{l_1 l_3}\left(N + (cAh^{\alpha}(\alpha) - S)\frac{l_3^2}{J}\right) \tag{31}$$

$$(S = k_1 (z_0 - z_*)^{\beta} + k_2 z_1^{\gamma}; \ N = \frac{1}{2}(2F_1 l_1 - F_2 l_2) - P_{\text{ст}} l_4).$$

Однако необходимо заметить, что для инженерных расчетов силовых и временных параметров контактного взаимодействия элементов таких колебательных систем полученные выражения являются громоздкими и трудоемкими в вычислениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пат. 1447, МКИ В 28 D 5/00. Устройство для обработки алмаза / М. Г. Киселев, В. Т. Минченя, Г. А. Галенюк. – № 224 А; Заявл. 28.01.1994; Опубл. 16.12.1996 // Афіцыйны бюлетэнь / Дзярж. пат. ведамства Рэсп. Беларусь. – 1994. – № 4, ч. 1 – С. 188.

2. Экспериментальная оценка интенсифицирующего воздействия ультразвука на производительность механического распиливания хрупких материалов / М. Г. Киселев, В. Т. Минченя, Г. А. Галенюк, С. Г. Ермоленко // Теоретические и технологические основы упрочнения и восстановления изделий машиностроения: Тез. докл. конф. – Новополоцк, 2002. – С. 633–637.

3. **Киселев М. Г., Ибрагимов В. А.** Математическое моделирование процесса контактного взаимодействия тел в условиях ультразвукового нагружения // Приборостроение. – 1989. – № 11. – С. 98–102.