3. На каждом ($h + 1$)-ом шаге алгоритма выполняем следующие действия.

3.1. Считаем $k = 1$.

3.2. Рассматриваем окрестность точки $d^k$ $0_м(d^k, r_k)$ (замкнутый шар радиусом $r > 0$ с центром $d \in M$).

3.3. По значениям компонент вектора спада $\Delta_M^{r_k}(d^h)$ частным алгоритмом 2 (симплекс-методом) определяем, является ли $F(d^h)$ локальным минимумом функции $F$ относительно $0_м(d^k, r_k)$. Если да, то при $k < p$, заменив $k$ на $k + 1$, переходим к п. 3.2, а при $k = p$ – к п. 4. В противном случае переходим к п. 3.4.

3.4. По значениям компонент вектора спада $\Delta_M^{r_k}(d^h)$ находим в окрестности $0_м(d^k, r_k)$ точку $d^{h+1}$, для которой $F(d^{h+1}) < F(d^h)$. Меняем $h$ на ($h + 1$)-м и переходим к п. 4.

4. Конец работы алгоритма в связи с тем, что $d^h$ является искомой точкой локального минимума функции $F(d^1)$ относительно окрестности радиусом $r$.

Таким образом, сформулированные в статье задачи решены. Рассмотренная задача относится к обоснованию процессов функционирования сложных организационно-технических систем. В последнее время задачи указанного класса получают все большее практическое распространение [2, 3]. Причем, внедрение современных сложных производств и технологий, развитие и модернизация технических объектов обостряют проблемы обоснования принимаемых решений для таких систем. Предлагаемые модели являются оптимизационными по стоимостному критерию. Конечно, можно сформулировать и привести доводы в необходимости применения и других критериев оптимизации, например временных. Однако обеспечение экономической эффективности работы предприятий в настоящее время требует в первую очередь обосновывать принимаемые решения именно по критерию стоимости. Значительное количество переменных в (1)–(4) исключает возможность использования предлагаемых моделей «вручную», что при современном развитии ПЭВМ осложнением не является. Разработанные модели основаны на применении известных, проверенных на практике методов исследования операций, что исключает значительные затраты на обоснование достоверности и адекватности получаемых результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сергиенко И. В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наукова думка, 1985. – 384 с.

2. **Богатов Б. А., Шпургалов Ю. А.** Моделирование и обоснование решений в горном производстве. – Мн.: БГПА, 2002. – 367 с.

3. Надежность технических систем: Справ. / Ю. К. Беляев, В. А. Богатырев, В. В. Болотин и др.; Под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.

УДК 629.114

# К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ МОБИЛЬНОЙ МАШИНЫ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННИХ ПРОЦЕССОВ В ПНЕВМОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ПОДВЕСКЕ

*Инж. ЖИЛЕВИЧ М. И.*

*Белорусский национальный технический университет*

Известные методы исследования колебаний мобильных машин [1, 2], в том числе и с пневмогидравлической подвеской, предусматривают изучение обобщенной (как правило, механической) динамической модели. Причем непосредственно упругодемпфирующие элементы (пневмогидроцилиндры) не рассматриваются как самостоятельная динамическая подсистема, а их характеристики и свойства рабочей среды задаются в виде упрощенных кусочно-линейных зависимостей.

При анализе плавности хода применяют различные расчетные схемы с учетом цели исследований и диапазона рассматриваемых частот. Схема включает в себя инерционные элементы массы, соединенные упругими элементами и элементами, обеспечивающими рассеяние энергии при колебаниях масс. Массы делят на две основные группы: подрессоренные и неподрессоренные. Для более сложных задач отдельно рассматривается вторичное подрессоривание (кабина, сиденье).

Сложность математической модели будет зависеть от принятых допущений. Например, можно предположить, что характеристики и параметры подвески и шин правых и левых колес одинаковы, а продольные колебания автомобиля происходят практически независимо от поперечных. Одним из распространенных способов упрощения расчетной схемы (и математической модели) является возможность оценки колебаний подрессоренных масс передней задней осей по отдельности, если соблюдается соотношение $R^2 = ab$, где $R$ – радиус инерции подрессоренной массы; $a$ и $b$ – расстояние от центра тяжести подрессоренной массы до осей автомобиля.

Для составления уравнений движения (колебаний) обычно пользуются уравнениями Лагранжа, так как они позволяют применить обобщенный подход к моделированию:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_k}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial W_k}{\partial \xi_i} + \frac{\partial W_p}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\xi}_i} = Q_i,$$

где $W_k$ и $W_p$ – кинетическая и потенциальная энергии системы; $\Phi$ – диссипативная функция (функция рассеяния энергии), характеризующая потери энергии под действием сил сопротивлений; $\xi_i$ – обобщенная координата; $Q_i$ – обобщенная сила, соответствующая $i$–й обобщенной координате, причем:

$$W_k = \frac{mv^2}{2};\ W_p = \frac{cx^2}{2};\ \Phi = \frac{k_a \dot{x}^2}{2},$$

где $v$ – скорость движения некоторой массы $m$; $\dot{x}$ и $x$ – относительная скорость и перемещение (деформация); $c$ – коэффициент жесткости; $k_a$ – коэффициент демпфирования.

Существенным предположением в большинстве расчетов является то, что характеристики всех элементов линейны (или линеаризованы), а коэффициенты жесткости и демпфирования постоянны.

При моделировании пневмогидравлической подвески такое допущение не всегда оправдано, так как упругодемпфирующие свойства подвески определяются достаточно сложными внутренними процессами, происходящими при сжатии газа и дросселировании рабочей жидкости через калиброванные отверстия (иногда переменного сечения), что приводит к достаточно сложной функциональной зависимости коэффициентов жесткости и демпфирования не только от конструктивных параметров, но и от характера протекания колебательного процесса.

Для того чтобы адекватно описать колебательную систему с пневмогидравлической подвеской, целесообразно применить второй способ описания колебаний – использование уравнений динамики. Этот способ основан на балансе действующих на объект сил и позволяет более полно учитывать внутренние процессы в элементах подвески.

На рис. 1 представлена расчетная схема для исследования колебаний двухмассовой системы. Направление сил упругости и демпфирования, действующих на подрессоренную $M$ и неподрессоренную $m$ массы, показано в определенной степени условно, так как в процессе работы оно может изменяться и зависит от взаимного положения и направления движения масс, а также от вида неровностей дороги.

С учетом действующих сил для подрессоренной массы можно записать уравнение ее движения вдоль вертикальной оси

$$M\ddot{z} = 2F_{\text{уп}} - Mg - 2F_{\text{дп}},$$

где $F_{\text{уп}}$ и $F_{\text{дп}}$ – соответственно сила упругости и сила демпфирования, возникающие в подвеске, причем коэффициент 2 учитывает силы в правой и левой подвесках.

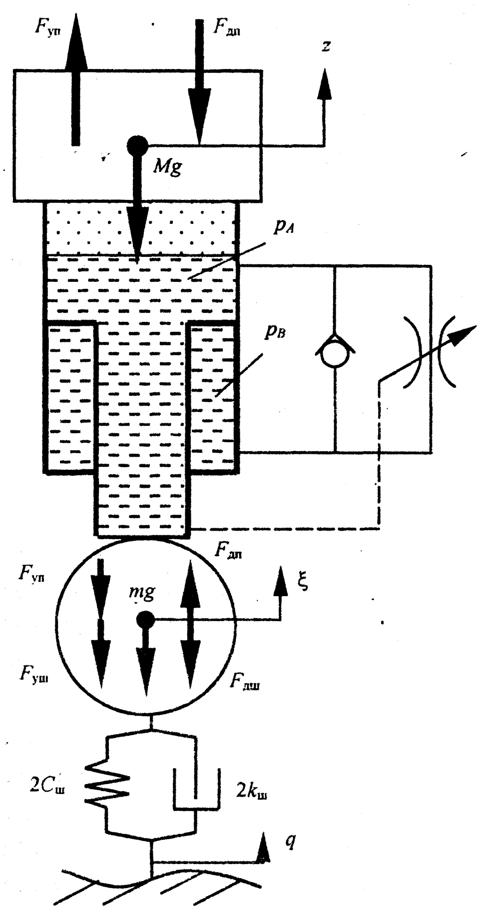


*Рис. 1.* Расчетная схема

Обычно считают, что сила демпфирования прямо пропорциональна относительной скорости движения масс, но для пневмогидравлической подвески зависимость будет иметь более сложный характер, поэтому на первоначальном этапе с учетом выбранной системы координат силу демпфирования обозначим в общем виде некоторой функцией $F_{дп} = f_1(\dot{z} - \dot{\xi})$. На основании этих же соображений для силы упругости, которая будет зависеть от относительного положения масс и действует на подрессоренную массу со стороны подвески: $F_{уп} = f_2(z - \xi)$.

Для того чтобы вывод уравнений динамики сделать менее громоздким, отсчет деформаций упругого элемента и шин целесообразно вести от положений статического равновесия. В этом случае статическая нагрузка на элемент (например, $Mg$) уравновешивается упругой силой от его прогиба (например, $F_{уп.ст} = f_2(z_{ст} - \xi_{ст})$). С учетом последнего замечания уравнение движения для подрессоренной массы можно переписать в виде

$$M\ddot{z} = 2f_2(z - \xi) - 2f_1(\dot{z} - \dot{\xi}), \qquad (1)$$

не вводя новых обозначений, но имея в виду, что отсчет координат ведется от положения статического равновесия.

Рассмотрим далее уравнение движения неподрессоренной массы. Со стороны подвески на неподрессоренную массу действуют восстанавливающая сила упругости (разность силы давления в цилиндре и веса подрессоренной массы) и сила демпфирования, равные соответствующим силам, действующим на подрессоренную массу, но противоположные по направлению. Сила тяжести уравновешивается силой упругости шин в статическом положении, а отсчет координат ведется от положения статического равновесия

$$m\ddot{\xi} = 2f_1(\dot{z} - \dot{\xi}) - 2f_2(z - \xi) - 2F_{уш} - 2F_{дш},$$

где $F_{уш}$, $F_{дш}$ – соответственно сила упругости шины и сила демпфирования колебаний в шинах (последней можно пренебречь ввиду малости), причем:

$$F_{уш} = C_ш(\xi - q); \quad F_{дш} = k_ш(\dot{\xi} - \dot{q}),$$

где $C_ш$, $k_ш$, $q$ – соответственно коэффициент упругости шин, коэффициент демпфирования шин и координата неровностей дорожного покрытия.

В результате получим

$$m\ddot{\xi} = 2f_1(\dot{z} - \dot{\xi}) - 2f_2(z - \xi) - \\ - 2C_ш(\xi - q) - 2k_ш(\dot{\xi} - \dot{q}). \qquad (2)$$

Чтобы определить силу сопротивления амортизатора и силу упругости в подвеске, выразим равнодействующую сил давления рабочей жидкости, приложенных к поршню:

$$F_\Sigma = p_A S_A - p_B S_B,$$

где $p_A$ и $p_B$ – давление в полостях над и под поршнем соответственно; $S_A$ и $S_B$ – активная площадь поршня со стороны полостей $A$ и $B$.

При движении поршня на ходе отбоя с некоторой относительной скоростью $\dot{\Delta} = \dot{z} - \dot{\xi}$ жидкость перетекает из полости $B$ в полость $A$ через клапан отбоя, представляющий собой дроссель, площадь которого зависит от взаимного положения поршня и штока (рис. 1). На ходе сжатия при движении поршня вверх жидкость перетекает из полости $A$ в полость $B$ через обратные клапаны (клапаны сжатия) и клапан отбоя.

Из уравнения баланса расходов жидкости [3] можно получить выражения для расчета перепада давлений соответственно на ходе отбоя и ходе сжатия:

$$\Delta p = p_B - p_A = \left[\frac{\pi}{4}\left(D_{\text{п}}^2 - D_{\text{ш}}^2\right)\right]^2 \times$$
$$\times \frac{\rho}{2\mu^2} \times \frac{1}{S_{\text{др}}^2} \times \dot{\Delta}^2;$$

$$\Delta p_{\text{c}} = p_A - p_B = \left[\frac{\pi}{4}\left(D_{\text{п}}^2 - D_{\text{ш}}^2\right)\right]^2 \times$$
$$\times \frac{\rho}{2} \times \frac{1}{(\mu S_{\text{др}} + \mu_{\text{ок}} S_{\text{ок}})^2} \times \dot{\Delta}^2,$$

где $D_{\text{п}}$ и $D_{\text{ш}}$ – соответственно диаметр поршня и штока; $\mu$ – коэффициент расхода дросселя; $\mu_{\text{ок}}$ – коэффициент расхода отверстия клапана сжатия; $S_{\text{др}}$ – площадь проходных отверстий дросселя; $S_{\text{ок}}$ – площадь проходных отверстий обратного клапана; $\Delta p$ – перепад (разность) давлений на дросселе (в полостях $B$ и $A$); $\Delta p_{\text{c}}$ – перепад давлений в полостях $A$ и $B$ при сжатии; $\rho$ – плотность рабочей жидкости.

Из уравнения баланса сил, действующих на поршень, для хода отбоя

$$F_\Sigma = p_A \frac{\pi D_{\text{п}}^2}{4} - (p_A + \Delta p)\left(\frac{\pi D_{\text{п}}^2}{4} - \frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4}\right) =$$
$$= p_A \frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4} - \Delta p\left(\frac{\pi D_{\text{п}}^2}{4} - \frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4}\right).$$

Для хода сжатия

$$F_{\Sigma\text{c}} = p_A \frac{\pi D_{\text{п}}^2}{4} - (p_A - \Delta p_{\text{c}})\left(\frac{\pi D_{\text{п}}^2}{4} - \frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4}\right) =$$
$$= p_A \frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4} + \Delta p_{\text{c}}\left(\frac{\pi D_{\text{п}}^2}{4} - \frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4}\right).$$

Величина

$$p_A \frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4} = F_{\text{упр}}$$

будет представлять усилие, развиваемое упругим элементом, а величина

$$F_{\text{A}} = \Delta p \frac{\pi}{4}\left(D_{\text{п}}^2 - D_{\text{ш}}^2\right)$$

или

$$F_{\text{Ac}} = \Delta p_{\text{c}} \frac{\pi}{4}\left(D_{\text{п}}^2 - D_{\text{ш}}^2\right)$$

является силой сопротивления амортизатора соответственно на ходе отбоя и ходе сжатия.

Подставив выражения для определения потерь давления, получим

$$F_{\text{A}} = \left[\frac{\pi}{4}\left(D_{\text{п}}^2 - D_{\text{ш}}^2\right)\right]^3 \frac{\rho}{2\mu^2} \frac{1}{S_{\text{др}}^2} \dot{\Delta}^2$$

или

$$F_{\text{Ac}} = \left[\frac{\pi}{4}\left(D_{\text{п}}^2 - D_{\text{ш}}^2\right)\right]^3 \times$$
$$\times \frac{\rho}{2} \frac{1}{(\mu S_{\text{др}} + \mu_{\text{ок}} S_{\text{ок}})^2} \dot{\Delta}^2.$$

Величина площади проходных отверстий в клапане отбоя может зависеть от положения $x$ поршня в цилиндре

$$S_{\text{др}} = S(x),$$

причем эта зависимость может быть представлена некоторой функцией от конструктивных размеров дросселирующего канала, а сама координата $x$ будет определяться начальным положением $l_0$ поршня и его относительным перемещением $(z - \xi)$ в цилиндре $x = l_0 + (z - \xi)$.

В частности, в цилиндрах подвески карьерных самосвалов БелАЗ [4] истечение жидкости из полости $B$ в полость $A$ происходит через выфрезерованные в стержне каналы прямоугольного сечения по двум направлениям, а глубина канала изменяется практически по линейной зависимости от максимальной в некотором промежуточном положении до нулевой в конце хода сжатия и хода отбоя с соответствующими углами наклона образующей. Для такой схемы демпфирующей системы можно записать

$$S_{др} = S(x) = 2N_{кан}b_к h_к(x),$$

где $b_к$ – ширина канала; $h_к(x)$ – глубина фрезеровки; $N_{кан}$ – количество каналов в клапане отбоя.

Площадь проходного сечения обратного клапана можно определить по зависимости

$$S_{ок} = \pi N_{ок}D_{ок}h_{ок},$$

где $D_{ок}$ – диаметр седла обратного клапана; $N_{ок}$ – количество клапанов сжатия (обратных клапанов); $h_{ок}$ – высота подъема обратного клапана.

Для больших значений $h_{ок}$ можно также записать

$$S_{ок} = \pi N_{ок}D_{ок}^2/4.$$

В результате получим выражения для определения силы сопротивления амортизатора соответственно на ходе отбоя и ходе сжатия:

$$F_А = \left[\frac{\pi}{4}\left(D_п^2 - D_ш^2\right)\right]^3 \frac{\rho}{8N_{кан}^2\mu^2 b_к^2 h_к^2(x)}\dot{\Delta}^2;$$

$$F_{Ac} = \left[\frac{\pi}{4}\left(D_п^2 - D_ш^2\right)\right]^3 \frac{\rho}{2}\times$$
$$\times\frac{1}{\left(2N_{кан}\mu b_к h_к(x) + 0{,}25N_{ок}\pi\mu_{ок}D_{ок}^2\right)^2}\dot{\Delta}^2.$$

Определим силу упругости, возникающую в цилиндре пневмогидравлической подвески.

В положении статического равновесия

$$p_{ст}\frac{\pi}{4}D_ш^2 = \frac{M}{2}g,$$

а поршень занимает некоторое положение $l_0$.

Процесс «сжатия–расширения» газа подчиняется политропическому закону $pV^{æ}$ – const, где $p$ – абсолютное давление газа; $V$ – его объем; æ – показатель политропы (æ = 1,2...1,3 для динамической характеристики; æ = 1 для статической характеристики при медленно протекающем изотермическом процессе с хорошим теплообменом) [5].

Таким образом, для любого промежуточного положения поршня можно записать

$$(p_а + p_{ст})\left(\frac{V_{ст}}{V_i}\right)^{æ} = p_{i\,изб} + p_а,$$

где $p_а$ – атмосферное давление; $p_{i\,изб}$ – избыточное давление в промежуточном положении; $V_{ст}$, $V_i$ – объем газа в статическом и промежуточном положениях.

Если в цилиндре появляется некоторое относительное смещение поршня $\Delta = z - \xi$, можно записать

$$\frac{V_{ст}}{V_i} = \frac{l_0}{l_0 + \Delta}.$$

Тогда

$$p_{i\,изб} = (p_{ст} + p_а)\left(\frac{l_0}{l_0 + \Delta}\right)^{æ} - p_а,$$

а сила упругости

$$F_{уп} = p_A\frac{\pi D_ш^2}{4} = p_{i\,изб}\frac{\pi D_ш^2}{4} =$$
$$= \left[(p_{ст} + p_а)\left(\frac{l_0}{l_0 + \Delta}\right)^{æ} - p_а\right]\frac{\pi D_ш^2}{4}.$$

Если рассматривать колебания относительно положения статического равновесия, то усилие, развиваемое упругим элементом подвески:

$$F_{упр} = F_{уп} - \frac{M}{2}g = \left(p_{i\,изб} - p_{ст}\right)\frac{\pi D_ш^2}{4} =$$
$$= \frac{\pi D_ш^2}{4}(p_{ст} + p_а)\left[\left(\frac{l_0}{l_0 + \Delta}\right)^{æ} - 1\right].$$

Таким образом, искомые функции, определяющие демпфирующие и упругие свойства пневмогидравлической подвески, принимают вид

$$f_1\left(\dot{z} - \dot{\xi}\right) = \frac{\pi}{4}\left(D_п^2 - D_ш^2\right)^3 \frac{\rho}{2}\left(\dot{z} - \dot{\xi}\right)^2 \times$$

$$\times\begin{cases}\dfrac{1}{4N_{\text{кан}}^2\mu^2 b_{\text{к}}^2 h_{\text{к}}^2(x)}, \text{ если } \dot{z}-\dot{\xi}>0;\\ \dfrac{4}{\left(8N_{\text{кан}}\mu b_{\text{к}} h_{\text{к}}(x)+N_{\text{ок}}\pi\mu_{\text{ок}}D_{\text{ок}}^2\right)^2}, \ \dot{z}-\dot{\xi}<0;\end{cases}$$

$$f_2(z-\xi)=\frac{\pi D_{\text{ш}}^2}{4}(p_{\text{ст}}+p_{\text{а}})\left[\left(\frac{l_0}{l_0+z-\xi}\right)^{\text{æ}}-1\right]$$

и совместно с уравнениями (1) и (2) будут описывать колебания элементов двухмассовой системы (рис. 1).

Необходимо отметить, что, если в подвеске используется направляющее устройство с передаточным отношением $i_{\text{ну}}$, приведенные к колесу зависимости для упругого $f_2(z-\xi)$ и демпфирующего $f_1(\dot{z}-\dot{\xi})$ элементов должны быть умножены на величину $i_{\text{ну}}$, которая может быть определена, например, отношением плеча приложения силы цилиндра подвески к плечу приведенной к колесу силы.

Микропрофиль дороги при расчетах колебаний моделируют детерминистически или статистически по его конкретной реализации. При детерминистическом подходе модель сводится к волнообразному гармоническому профилю или единичной неровности. Профиль неровности принимают синусоидальным относительно ее средней линии, его можно описать уравнением

$$q=q_0(1-\cos\varpi t),$$

где $q_0$ – амплитуда высоты неровности; $\omega$ – частота возмущения колебаний, связанная со скоростью автомобиля $v_{\text{а}}$ и длиной неровности $L_{\text{н}}$.

Если неровность преодолевается за некоторое время $T_{\text{В}}$, то $\omega=\dfrac{2\pi v_{\text{а}}}{L_{\text{н}}}$ и

$$q=\begin{cases}q_0\left(1-\cos\left(\dfrac{2\pi v_{\text{а}}}{L_{\text{н}}}t\right)\right), \text{ если } 0\le t\le T_{\text{В}};\\ 0, \text{ если } t>T_{\text{В}}.\end{cases}$$

На рис. 2 в качестве примера представлены полученные по разработанной математической модели результаты расчета колебаний при наезде снаряженного автомобиля ($M$ = 24000 кг; $m$ = 300000 кг; $D_{\text{п}}$ = 280 мм; $D_{\text{ш}}$ = 250 мм; $i_{\text{ну}}$ = 1,6) на единичную неровность со скоростью 20 км/ч. Модель позволяет анализировать давления в поршневой и кольцевой полостях, перепад давления, перемещения (скорости) подрессоренной и неподрессоренной масс. Как видно из рис. 2б, расчетное давление в кольцевой полости заходит в область отрицательных значений, что не может быть реализовано физически (в предельной ситуации разрежение не должно превышать значения 0,1 МПа). Этот фактор трудно учесть при расчетах традиционными методами с использованием некоторого усредненного коэффициента демпфирования. Если ввести в модель ограничения по давлению (рис. 2в, г), то заметно изменяются графики переходных процессов, на 25...30 % увеличивается амплитуда перемещения подрессоренной массы в области отрицательных значений, процесс сопровождается повышением давления в полостях цилиндра, что может привести к утечкам жидкости из цилиндра и разрушению элементов конструкции.

Таким образом, разработанная математическая модель для исследования колебаний мобильной машины с пневмогидравлической подвеской, учитывающая характер протекания внутренних динамических процессов в упругодемпфирующих элементах, причем последние рассматриваются как самостоятельная динамическая подсистема, интегрированная в многомассовую механическую колебательную модель автомобиля, позволяет проанализировать степень влияния конструктивных параметров цилиндров подвески (размеров поршня, штока, дросселирующих отверстий клапана отбоя и обратного клапана сжатия, профиля дросселирующих каналов клапана отбоя и др.) и свойств рабочего тела на выходные характеристики колебаний автомобиля, выбрать рациональные значения этих параметров, оценить реализуемость заданных демпфирующих характеристик.

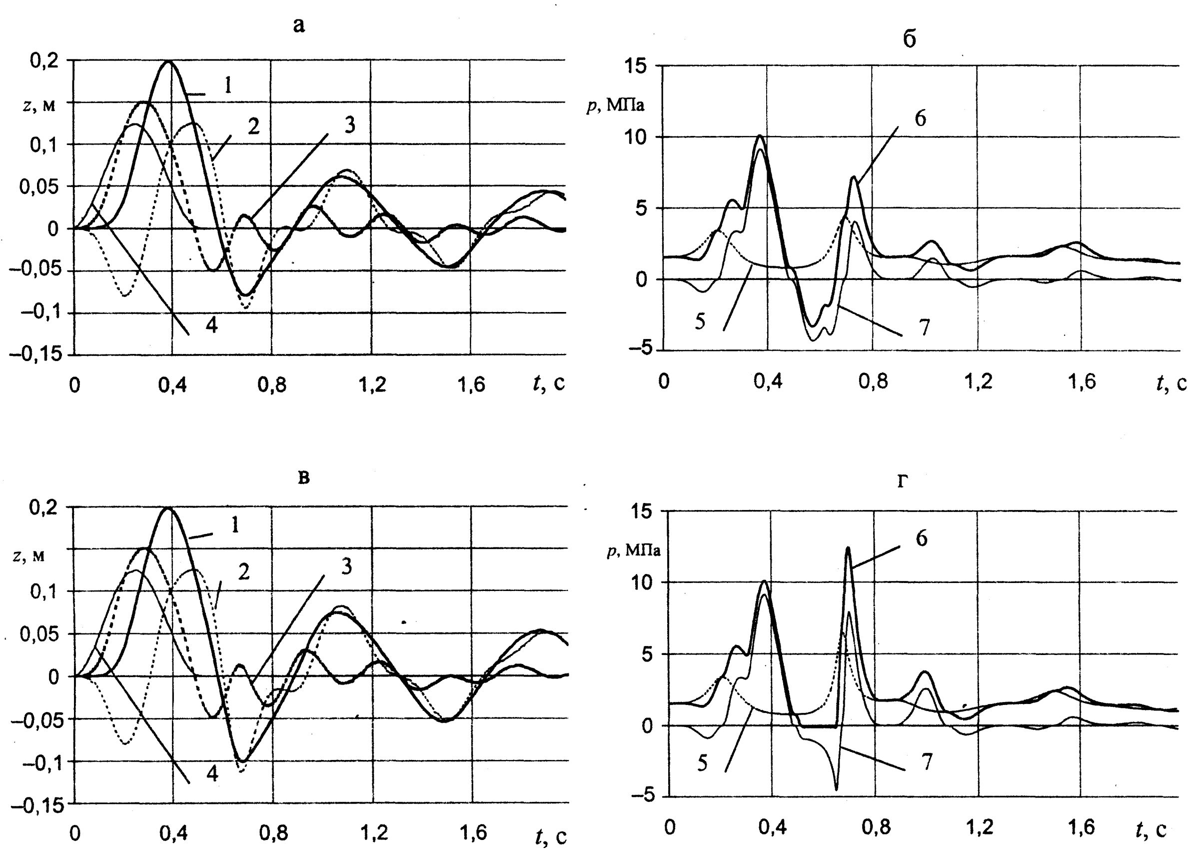


*Рис. 2.* Результаты расчета: а – перемещения; б – давления; в – перемещения с учетом ограничений по давлению; г – давления с учетом ограничения: 1 – подрессоренная масса; 2 – относительное перемещение масс; 3 – неподрессоренная масса; 4 – неровность; 5 – поршневая полость; 6 – кольцевая полость; 7 – перепад давлений

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Ротенберг Р. В.** Подвеска автомобиля. – М.: Машиностроение, 1972. – 292 с.

2. **Гришкевич А. И.** Автомобили: Теория: Учеб. для вузов. – Мн.: Вышэйш. шк, 1988. – 160 с.

3. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы / Т. М. Башта, С. С. Руднев, Б. Б. Некрасов и др. – М.: Машиностроение, 1982.

4. Автомобили: Машины большой единичной мощности: Учеб. пособие / М. С. Высоцкий, А. И. Гришкевич, А. В. Зотов и др.; Под ред. М. С. Высоцкого, А. И. Гришкевича. – Мн.: Вышэйш. шк., 1987. – 200 с.

5. Автомобили: Конструкция, конструирование и расчет. Системы управления и ходовая часть: Учеб. пособие для вузов / А. И. Гришкевич, Д. М. Ломако, В. П. Автушко и др.; Под ред. А. И. Гришкевича. – Мн.: Вышэйш. шк., 1987. – 200 с.