

ОСОБЕННОСТИ КООРДИНАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ОГРАНИЧЕННЫМИ УЧАСТКАМИ ОКРУЖНОСТИ

Докт. техн. наук, проф. СОЛОМАХО В. Л., канд. техн. наук СОКОЛОВСКИЙ С. С., асп. КРОТОВА О. А.

Белорусский национальный технический университет

Практика показывает, что преобладающими на машиностроительных производствах являются линейные и угловые измерения, которые, как правило, считаются координатными. Сущность координатных измерений заключается в последовательном нахождении координат нужного числа точек в принятой системе координат и последующей обработке этой информации.

Эффективность координатных измерений определяется выбором минимально необходимого количества точек, достаточного для получения достоверной информации об измеряемой поверхности.

Современные методики контроля цилиндрических и конических поверхностей построены на предположении, что мы имеем дело с идеальными объектами, поперечное сечение которых представляет собой идеальную окружность (рис. 1). Точность измерения в данном случае определяется точностью нахождения координат центра и радиуса окружности.

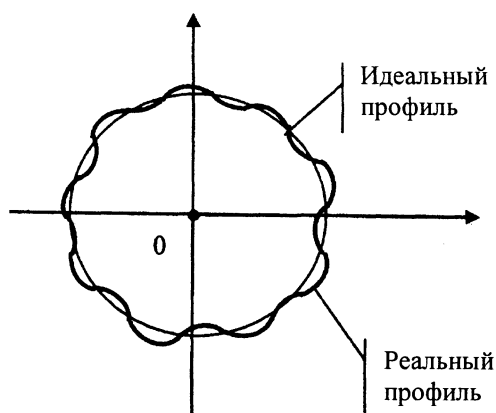


Рис. 1. Профиль поперечного сечения детали

Известно аналитическое решение задачи оптимизации числа контрольных точек для нахождения центра и радиуса базовой окружности при

расположении точек на профиле с равномерным угловым шагом [1].

Данная методика основывается на моделировании реальной поверхности с использованием рядов Фурье. Минимально необходимое число контрольных точек определяется выражением

$$n_{\min} = \frac{\ln(1 - \sqrt{P})}{\ln\left[1 - \frac{1}{\pi} \arccos(1 - [\delta])\right]}, \quad (1)$$

где P – вероятность того, что относительная погрешность измерения не превышает допустимого значения $[\delta]$; $[\delta]$ – допустимое значение относительной погрешности измерения.

Использование указанной выше методики в случае неравномерного расположения контрольных точек (имеется в виду профиль, представленный ограниченным участком окружности (рис. 2)) приводит к появлению относительной методической погрешности, превышающей 50 %.

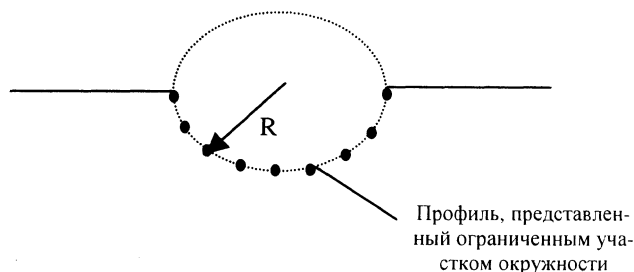


Рис. 2. Неравномерное расположение контрольных точек на профиле

Описанная ниже методика выполнения координатных измерений сложных поверхностей, представленных ограниченными участками окружности, имеет свои особенности, что позволяет обеспечить значение относительной методической погрешности, не превышающей 50 %.

ческой погрешности, не превышающее допустимого.

Данная методика также основывается на использовании рядов Фурье. Радиус-вектор реального профиля поперечного сечения цилиндрической или конической поверхности может быть описан выражением

$$R_i(\varphi) = R_0 + x_k \cos(k\varphi + \alpha_i), \quad (2)$$

где R_0 – номинальный радиус окружности; x_k – амплитуда гармоники.

Определим относительную погрешность измерения в данном сечении

$$\delta = \frac{\Delta - \Delta^*}{\Delta} = 1 - \frac{\Delta^*}{\Delta},$$

где $\Delta = 2x_k$ – теоретическое значение погрешности измерения; Δ^* – максимальное значение погрешности для данного сечения, полученное в ходе измерения, определяемое как

$$\Delta^* = \max \Delta_{i,j} = \max |R_i - R_j|$$

при $\varphi = \text{const}$ и $i \neq j$, (3)

где

$$R_j(\varphi) = R_0 + x_k \cos(k\varphi + \alpha_j).$$

Величина Δ ограничивается предельно допустимыми значениями, указанными в нормативной документации, а Δ^* определяется как сумма инструментальной и методической составляющих погрешности (принимая, что погрешность оператора и погрешность, возникающая из-за отклонения условий измерения от нормальных, пренебрежимо малы).

Выполняя определенные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= x_k |\cos(k\varphi + \alpha_i) - \cos(k\varphi + \alpha_j)| = \\ &= 2x_k \left| \sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \right| \left| \sin \left(k\varphi + \frac{\alpha_i + \alpha_j}{2} \right) \right|. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что наибольшее значение Δ^* могут реализовывать только те величины Δ_{ij} , амплитуда которых максимальна, т. е. когда

$$\left| \sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \right| = 1,$$

что равносильно условию

$$\sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} = 1.$$

Это достигается для тех α_i и α_j , для которых разность $|\alpha_i - \alpha_j|$ достаточно близка к π .

Введем ряд условий:

1. Будем считать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

2. Точки α_{i+1} и α_i будем считать различными только в том случае, когда $\alpha_{i+1} - \alpha_i > \alpha^*$, где

$$\alpha^* = \frac{2\pi z}{360}, \quad z - \text{угловой шаг измерения.}$$

Подставляя в (4) вместо α_j величину $\alpha_i + \pi$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta^* &\leq \max \Delta_{ij} = 2x_k \max \left| \sin \left(k\varphi + \frac{2\alpha_i + \pi}{2} \right) \right| = \\ &= 2x_k \max |\cos k\varphi + \alpha_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Рассмотрим n функций:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^* &= 2x_k [\cos(k\varphi + \alpha_1)] \\ \Delta_2^* &= 2x_k [\cos(k\varphi + \alpha_2)] \\ \Delta_n^* &= 2x_k [\cos(k\varphi + \alpha_n)] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Введем обозначение

$$\gamma_i(\varphi) = \left| \frac{\Delta_i^*}{\Delta} \right| = |\cos(k\varphi + \alpha_i)|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где γ_i – значение относительной погрешности в i -й точке.

Нас интересуют максимальные значения γ_i на i -промежутке. В этом случае кривая γ_i на i -промежутке будет совпадать с $\Delta_{i\max}^*$ (рис. 3).

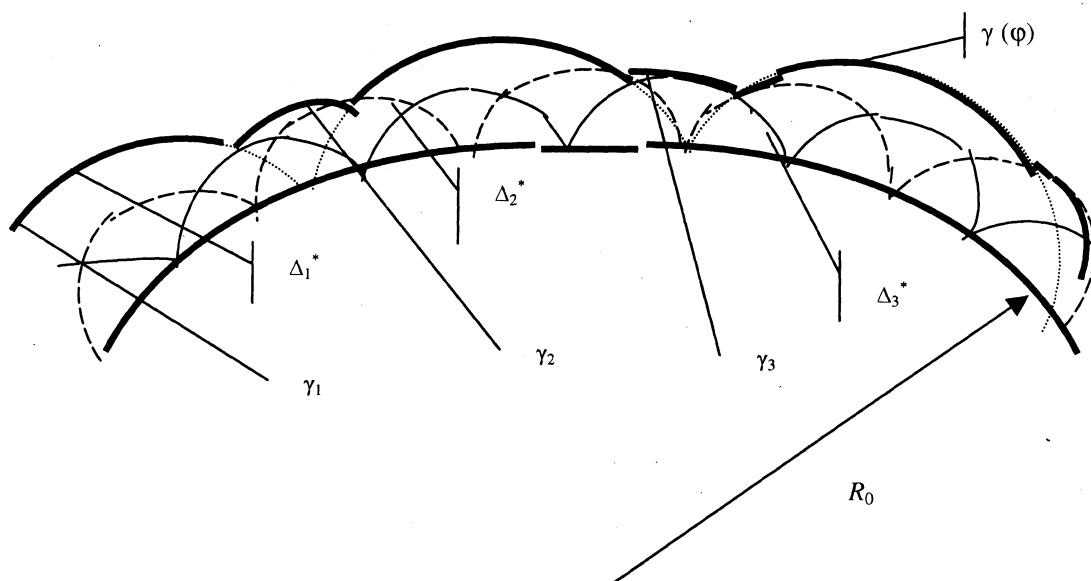


Рис. 3. Графики функций Δ_i и γ_i

Считаем, что функции $\gamma_i(\varphi)$ определены формулами (5) на всем множестве действительных чисел.

Функция $\gamma(\varphi) = \max\{\gamma_1(\varphi), \dots, \gamma_n(\varphi)\}$ имеет локальные максимумы в точках вида $\frac{m\pi - \alpha_i}{k}$, $i = 1, \dots, n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Число таких точек на отрезке $\left[0, \frac{2\pi}{k}\right]$ не более 2π . Обозначим точки локального максимума, попавшие в $\left[0, \frac{2\pi}{k}\right]$, символами $t_1, \dots, t_{2n}$, так, что $t_l \leq t_{l+1}$, $l = 1, \dots, 2n-1$.

Глобальный максимум функция $\gamma(\varphi)$ принимает в точке $\frac{t_{2p} + t_{2p+1}}{2}$ такой, что $|t_{p+1} - t_p| = \max\{|t_{l+1} - t_l|\}$. Введем обозначение $A = |t_{p+1} - t_p|$.

На рис. 4 представлен пример неравномерного расположения точек, так как имеет место неполная окружность, ограниченная сектором $\left[A, \frac{2\pi}{k}\right]$.

В данном случае на $\left[A, \frac{2\pi}{k}\right]$ расположены $2S$ точек с равномерным шагом (шаг α^*), начиная от точки $\frac{2\pi}{k}$.

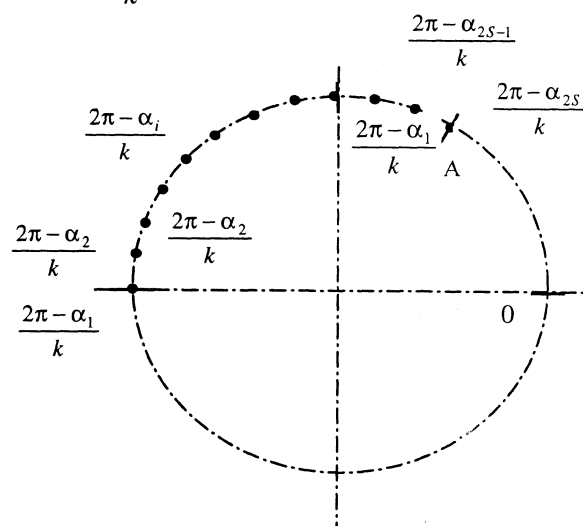


Рис. 4. Неравномерное расположение точек (наихудший вариант)

При этом дуга, ограниченная сектором $\left[A, \frac{2\pi}{k}\right]$, определяется как

$$A = \frac{2\pi}{k} - (2S - 1)\alpha^*. \quad (7)$$

Очевидно, что $\delta_{\max} = 1 - \left| \cos \frac{A}{2} \right|$.

Поскольку $0 < a < A < \frac{\pi}{k}$, соответственно $0 < k \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\left| \cos k \frac{A}{2} \right| = \cos k \frac{A}{2}$, т. е.

$$\delta_{\max} = 1 - \cos k \frac{A}{2}. \quad (8)$$

Определим уравнение, описывающее функцию $\delta(\varphi)$ на $[0, A]$:

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} 1 - |\cos k\varphi|, & 0 \leq \varphi \leq \frac{A}{2}; \\ 1 - |\cos k(\varphi - A)|, & \frac{A}{2} \leq \varphi \leq A. \end{cases}$$

Нас интересует именно этот интервал, так как значения $\delta(\varphi)$ на нем могут быть получены только косвенно (контрольные точки на $[0, A]$ отсутствуют). Таким образом, анализируя имеющуюся информацию о поведении функции $\delta(\varphi)$ на $\left[A, \frac{2\pi}{k} \right]$, мы должны с достаточной вероятностью получить значения $\delta(\varphi)$ на $[0, A]$.

Для рассматриваемых углов φ косинусы положительны, поэтому

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} 1 - \cos k\varphi, & 0 \leq \varphi \leq \frac{A}{2}; \\ 1 - \cos k(\varphi - A), & \frac{A}{2} \leq \varphi \leq A. \end{cases} \quad (9)$$

Функция $\delta(\varphi)$ меняется на участке $[0, \delta_{\max}]$ немонотонно (рис. 5).

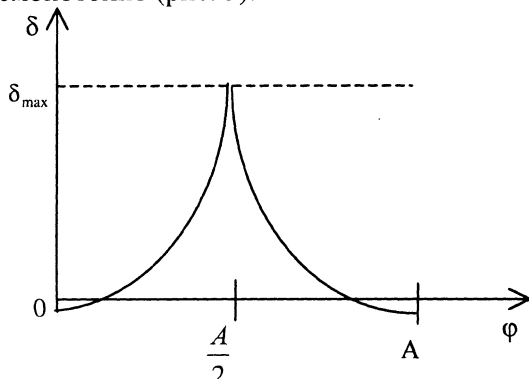


Рис. 5. График функции $\delta(\varphi)$

Плотность распределения случайной величины φ

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & 0 < \varphi < A; \\ 0, & \varphi \notin [0, A]. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $G(\delta)$ случайной величины δ

$$G(\delta) = \frac{2}{Ak} \arccos(1 - \delta). \quad (10)$$

Плотность вероятности $g(\varphi)$ задается формулой

$$g(\delta) = G'(\delta) = \begin{cases} \frac{2}{Ak} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \delta)^2}}, & 0 < \delta < \delta_{\max}; \\ 0, & \delta \notin]0, \delta_{\max}[. \end{cases} \quad (11)$$

Используя это, можно вычислить вероятность того, что относительная ошибка контроля δ не превосходит некоторой допустимой величины $\delta_{\text{доп}}$:

$$\begin{aligned} P(\delta \leq \delta_{\text{доп}}) &= \int_0^{\delta_{\text{доп}}} g(\delta) d\delta = \int_0^{\delta_{\text{доп}}} \frac{2}{kA} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \delta)^2}} d\delta = \\ &= \frac{2}{kA} \arccos(1 - \delta) \Big|_0^{\delta_{\text{доп}}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$P = \frac{2}{kA} \arccos(1 - \delta_{\text{доп}}). \quad (12)$$

Отсюда определяем

$$A = \frac{2}{kP} \arccos(1 - \delta_{\text{доп}}).$$

Используя (8), находим число измерений $n = 2S$, обеспечивающее (с вероятностью P) погрешность измерения в пределах допуска:

$$\frac{2\pi}{k} - (2S - 1)a^* = \frac{2}{k\pi} \arccos(1 - \delta_{\text{доп}}).$$

Откуда

$$2S = 1 + \frac{2\pi}{ka^*} - \frac{2}{kP\alpha^*} \arccos(1 - \delta_{\text{доп}}).$$

Поскольку $a = \frac{2\pi z}{360k}$, то

$$n = 2S = 1 + \frac{360}{z} \left(1 - \frac{2}{\pi P} \arccos(1 - \delta_{\text{доп}})\right). \quad (13)$$

Таким образом, количество контрольных точек определяется требуемой точностью, угловым шагом и заданной вероятностью.

Результаты расчета количества контрольных точек представлены в табл. 1 (угловой шаг измерения $z = 10^\circ$).

Таблица 1

P	δ				
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
	n				
0,99	13	16	19	23	27
0,95	12	15	18	22	27
0,9	11	14	17	21	26
0,8	7	11	15	19	25
0,7	3	7	12	17	23
0,6	3	3	7	13	20
0,5	3	3	3	7	17

Значения минимально необходимого числа контрольных точек с использованием методики для случая равномерно расположенных на профиле точек приведены в табл. 2.

Таблица 2

P	δ				
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
	n				
0,99	14	16	19	24	35
0,95	10	12	14	17	25
0,68	5	6	7	9	12

Результаты сравнения расчетных значений минимально необходимого числа контрольных точек, полученных при использовании различных методик, приведены на рис. 6.

С целью практического применения данной методики может быть разработана программа для расчета необходимого числа контрольных точек.

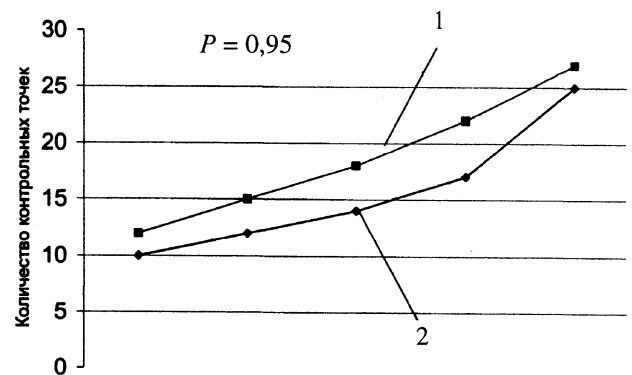


Рис. 6. Результаты сравнения минимально необходимого числа контрольных точек, полученных при использовании различных методик. Относительная погрешность измерения $(1 - \delta)$: 1 – методика, учитывающая неравномерное расположение точек; 2 – методика, не учитывающая неравномерное расположение точек

ЛИТЕРАТУРА

1. Соломахо В. Л. Метрологическое обеспечение координатных измерений в машиностроении. – Мн.: ООО «Реклама – Факсбелар», 131 с.