

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЛЕТА ПОЛОГО БРУСА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОЙ СИЛЫ И СКРУЧИВАЮЩЕГО МОМЕНТА, ВЫЗВАННЫХ ГРАДИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

Канд. техн. наук, доц. СЕДНИН В. А., инж. АБРАЖЕВИЧ С. И.

Белорусский национальный технический университет,
Белорусско-германское совместное предприятие «Бел-Изолит»

При оптимизации конструктивных параметров предварительно изолированного самокомпенсирующегося теплофикационного трубопровода [1] важно определить условия потери устойчивости (состояние, при котором в трубах возникают большие осевые сжимающие силы и скручивающие моменты).

При потере устойчивости ось эквивалентного бруса выпучивается и может образовать пространственную кривую. Будем считать, что концы бруса закреплены шарнирно. Рассматриваемая система является неконсервативной, но для определения критических значений осевой силы P и скручивающего момента для данной системы можно воспользоваться статическим методом [2, 3].

Выберем основную (x, y, z) и скользящую системы координат (x_1, y_1, z_1) (рис. 1). Обозначим через v и w перемещение точки, лежащей на оси бруса x , в направлении осей y и z .

Определяя проекции вектора момента M на осях y_1 и z_1 для малых перемещений получаем дифференциальные уравнения упругой кривой в плоскостях xOy и xOz [1, 2]. Так как изгибная жесткость эквивалентного бруса относительно главных центральных осей одна и та же и равна B , получим

$$\begin{aligned} B \frac{d^2 v}{dx^2} + M \frac{dw}{dx} + Pv &= 0; \\ B \frac{d^2 w}{dx^2} - M \frac{dv}{dx} + Pw &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

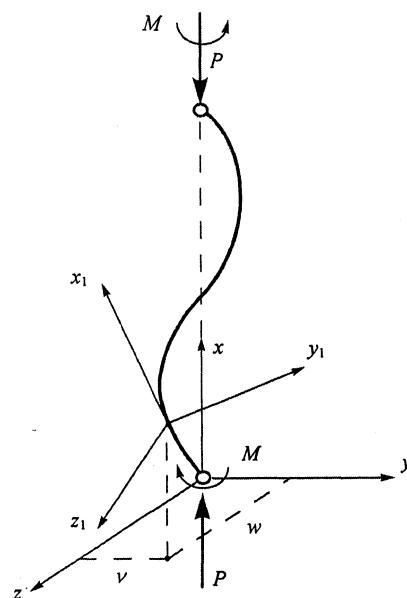


Рис. 1. Потеря устойчивости эквивалентного бруса при кручении и осевом сжатии

Полагая $\frac{M}{B} = k$ и $\frac{P}{B} = s^2$, получаем систему уравнений, решение которой будем искать в виде:

$$\begin{aligned} v &= A \sin r_1 x + B \cos r_1 x + C \sin r_2 x + D \cos r_2 x; \\ w &= A \sin r_1 x + B \cos r_1 x - C \cos r_2 x + D \sin r_2 x. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая систему уравнений (2), находим, что r_1 и r_2 должны удовлетворять одному и тому же квадратному уравнению

$$r^2 + kr - s^2 = 0. \quad (3)$$

Для определения постоянных A, B, C, D используем граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = H, \quad v = 0; \\ x = 0, \quad x = H, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Из условий при $x = 0$ следует:

$$A + C = 0 \text{ и } B + D = 0.$$

Из условий при $x = H$ следует:

$$\begin{aligned} A(\sin r_1 H - \sin r_2 H) + B(\cos r_1 H - \cos r_2 H) = 0; \\ -A(\cos r_1 H - \cos r_2 H) + B(\sin r_1 H - \sin r_2 H) = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю определитель системы, получаем

$$(\sin r_1 H - \sin r_2 H)^2 + (\cos r_1 H - \cos r_2 H)^2 = 0.$$

Или

$$\cos(r_1 H - r_2 H) = 1.$$

Наименьшая величина аргумента, не равная нулю и, следовательно, не дающая тривиального (нулевого) решения системы уравнений, равна $r_1 H - r_2 H = 2\pi$, но из (3) следует

$$r_1 - r_2 = 2\sqrt{\frac{k^2}{4} + s^2}, \quad \text{т. е. } \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{k^2}{4} + s^2.$$

Отсюда получаем критические значения скручивающего момента M и сжимающей силы P

$$\frac{1}{4} \left(\frac{M}{B} \right)^2 + \frac{P}{B} = \left(\frac{\pi}{H} \right)^2. \quad (5)$$

Уравнение (5) может быть использовано и для случая действия скручивающего момента и растягивающей силы. В этом случае перед силой P надо поставить знак «-». Уравнение (5) также может быть использовано и в частных случаях действия одного скручивающего момента M , тогда сила $P = 0$, или действия одной только сжимающей силы, тогда момент $M = 0$.

При $M = 0$ из (5) получаем значение критической силы P , которая равна эйлеровой $P_3 = \frac{\pi^2 B}{H^2}$; при $P = 0$ из (5) получаем значение

критического момента $M_{кр} = \frac{2\pi B}{H}$. Оба критических значения соответствуют случаю шарнирного опирания концов бруса.

В случае заземления концов бруса получается аналогичный результат, хотя зависимости между P и M более сложные, чем в (5). Но при заземлении концов бруса критическая сила P (при $M = 0$), естественно, равна эйлеровой $P_3 = \frac{4\pi^2 B}{H^2}$, а критический момент (при

$P = 0$) равен $M_{кр} = 2,861 \frac{\pi B}{l}$.

Теперь рассмотрим возможность потери устойчивости эквивалентного бруса, когда винтовой брус изготовлен из тонкостенной трубы и подвергается нагреву при невозможности торцевых перемещений. Так как реактивный момент M связан с осевой силой P уравнением

$$M = PR \sin \varphi \cos \varphi \frac{v}{1 + v \sin^2 \varphi}, \quad (6)$$

(здесь R – радиус образующего цилиндра), уравнение (5) принимает вид

$$(\Gamma P)^2 + 4BP = \frac{4\pi^2 B^2}{H^2}, \quad (7)$$

где $\Gamma = \frac{R \sin \varphi \cos \varphi}{1 + v \sin^2 \varphi} v$.

Решая квадратное уравнение, найдем $P_{кр}$

$$P_{кр} = \frac{2B}{\Gamma^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2 \Gamma^2}{H^2}} - 1 \right). \quad (8)$$

Следовательно, максимальное значение $P_{кр}$

будет равно $P_{кр'} = \frac{\pi^2 B}{H^2}$, что соответствует случаю, когда нет скручивающего момента.

Но при закреплении торцов винтового бруса таким образом, что запрещены и взаимный поворот, и линейное (осевое) перемещение торцов будут одновременно возникать при нагреве и осевая сила P и скручивающий момент M .

Определим величину B . При малом угле подъема витка φ из (5)

$$B = \frac{EJH}{\pi R i} \frac{1}{1 + 1 + v}$$

и для тонкостенной трубы имеем

$$B = \frac{Ed^3 \delta H}{8(2 + \nu) Ri}, \quad (9)$$

где i – число витков.

В общем случае при учете угла подъема витков получаем:

$$B = \frac{\sin \varphi}{\frac{1 + \sin^2 \varphi}{2EJ} + \frac{\cos^2 \varphi}{2GJP}} = \frac{2EJ \sin \varphi}{1 + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \frac{2EJ}{2G \cdot 2J}};$$

$$B = \frac{\sin \varphi Ed^3 \delta \pi}{4(2 + \nu \cos^2 \varphi)}. \quad (10)$$

Таким образом, задавшись параметрами винтового полого бруса ($R, d, \delta, i, H, \varphi$), из уравнений (6), (7), (9), (10) можно найти критическую силу $P_{кр}$ и скручивающий момент $M_{кр}$ для заданного сочетания параметров бруса и решить задачу потери устойчивости эквивалентного бруса. Для этого необходимо связать полученные силовые факторы с температурными напряжениями. В [1] указаны зависимости осевой силы и скручивающего момента от $E\alpha\Delta T$, φ , k , F .

Теперь рассмотрим потерю устойчивости полого тонкостенного стержня в упругой среде. Стержень с шарнирно опертыми концами сжимается силами P (рис. 2), причем выпучиванию стержня препятствует реакция упругой среды.

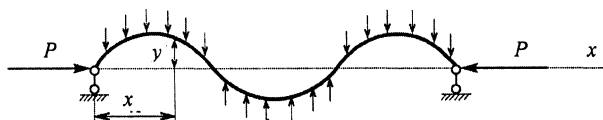


Рис. 2. Продольный изгиб в упругой среде

Реакция грунта пропорциональна длине элемента оси стержня и величине прогиба y

$$dy = C_0 y dx, \quad (11)$$

где C_0 – коэффициент пропорциональности (жесткость среды), кг/см².

Находим величину критической силы для стержня. Для этого воспользуемся методом сравнения потенциальной энергии деформируемой среды и изгиба стержня

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^H (y'')^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^H y^2 dx$$

с работой сил P , сжимающих стержень:

$$\frac{P}{2} \int_0^H (y')^2 dx.$$

Приравнявая, получим выражение для нахождения критической силы

$$\frac{P}{2} \int_0^H (y'')^2 dx = \frac{EJ}{2} \int_0^H (y'')^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_0^H y^2 dx. \quad (12)$$

Для изогнутой оси стержня (рис. 2) общий вид уравнения имеет вид

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{H}. \quad (13)$$

Выполнив подстановку (13) в (12), запишем

$$P = \frac{EJ \sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{H} \right)^4 + C_0 \sum a_n^2}{\sum a_n^2 \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2}. \quad (14)$$

Для определения $P_{кр}$ нужно найти $\min$ выражения (14). Наименьшее число получается в том случае, когда все a_n (кроме одного) обращаются в 0, т. е. первой искривленной формой стержня будет синусоида, но не с одной полуволной, а с $-n$:

$$y = a_n \sin \frac{n\pi x}{H} \quad (15)$$

и

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{H^2} \left(n^2 + \frac{\gamma}{n^2} \right), \quad (16)$$

где

$$\gamma = \frac{C_0 H^4}{EJ\pi^4}. \quad (17)$$

Пока упругая среда обладает малой жесткостью и коэффициент C_0 мал, первая форма будет без точек перегиба. Увеличивая C_0 (или γ), мы достигнем предела, когда первой формой равновесия будет синусоида с двумя полуволнами. Соответствующие значения γ найдутся

$$1 + \frac{\gamma}{1} = 4 + \frac{\gamma}{4},$$

или $\gamma = 4$.

Форма равновесия с $n+1$ полуволнами будет первой формой равновесия при значении $\gamma = 4$, при котором $n^2 + \frac{\gamma}{n^2}$ в (16) увеличивается с заменой n на $n+1$. Величина, соответствующая моменту перехода от n к $n+1$ полуволнам, определяется

$$n^2 + \frac{\gamma}{n^2} = (n+1)^2 + \frac{\gamma}{(n+1)^2}.$$

Откуда

$$\gamma = n^2(n+1)^2. \quad (18)$$

Зная длину H и жесткость EJ , а также жесткость среды C_0 , из (17) вычисляется γ , а из равенства (18) – число полуволн n , и, наконец, из (16) – критическая сила $P_{кр}$.

Если γ очень велико, то число полуволн будет также велико. При этом стержень будет искривляться змейкой с большим числом полуволн. В этом случае (18) можно заменить на $n = \sqrt[4]{\gamma}$, и критическая сила будет равна

$$P_{кр} = \frac{2\pi EJ}{(H/n)^2} = \frac{2\pi^2 EJ}{\lambda^2}, \quad (19)$$

где λ – длина одной полуволны.

Иными словами, если длинный тонкостенный стержень искривляется в упругой среде по большому числу полуволн, то $P_{кр}$ для него оказывается вдвое больше эйлеровой силы для стержня той же жесткости EJ и длиной полуволны λ с обоими опертыми концами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седнин В. А., Абражевич С. И. Расчет на прочность предварительно изолированного самокомпенсирующегося теплофикационного трубопровода // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2004. – № 6. – С. 52–59.
2. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 480 с.
3. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. – М., 1986. – 568 с.