

## ПЕРЕХОДНАЯ КРИВАЯ ЗУБА ЭВОЛЬВЕНТНОЙ ПЕРЕДАЧИ С ЗАДАННОЙ ФОРМОЙ

Асп. МАРЧУК А. С.

Институт механики и надежности машин НАН Беларуси

Одним из наиболее эффективных методов проектирования нестандартных эвольвентных передач является метод проектирования в обобщающих параметрах [1...3]. Он позволяет выявлять и использовать значительные резервы эвольвентной прямозубой передачи, недоступные для передач, проектируемых с помощью стандартной методики. Основная идея метода заключается в проектировании «от изделия – к инструменту». Это подразумевает анализ и выбор геометрии зубцов (зубьев без переходных кривых) без учета геометрии инструмента, что возможно благодаря инвариантности первой относительно второй. То есть, соблюдая некоторые соотношения и ограничения, спроектированную передачу с заданными параметрами можно изготовить инструментом с различными сочетаниями угла профиля и высоты зуба. Такой подход позволяет намного упростить анализ и выбор оптимальных параметров зубчатого зацепления, сделать их более эффективными.

При этом методе форма переходной кривой не обладает свойством инвариантности к инструменту, что, в некотором смысле, оставляет незавершенным общий принцип, принятый в методе.

Настоящая статья посвящена разработке методики назначения параметров переходной кривой и последующего проектирования инструментов таким образом, чтобы первая оставалась инвариантна к последнему при любых углах профиля. Это возможно только при отбражении, учитывающем геометрию станочного зацепления, переходной кривой зуба зубчатого колеса в кривую, закругляющую зуб инструмента. При этом также требуется отдельная разработка зуборезного инструмента для шестерни и колеса.

Полагаем, что первый этап проектирования завершен и обобщающие параметры зубцов

зубчатого колеса установлены ( $\vartheta$  – угол профиля в точке заострения зуба;  $m_a$  – параметр, характеризующие толщину зуба на окружности вершин;  $\alpha_p$  – угол профиля входа зуба в зацепление;  $r_b$  – радиус основной окружности;  $z$  – число зубьев). Определить переходную кривую удобно с помощью какой-либо математической функции. Для нахождения параметров этой функции рассмотрим систему координат  $XOY$ , связанную с осью колеса, и систему  $X_1OY_1$ , повернутую относительно первой на угол  $\pi/z$  (рис. 1). Параметрическая функция, описывающая профиль эвольвенты в системе  $XOY$ , записывается как:

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= \frac{r_b}{\cos \alpha_x} \sin(\text{inv} \vartheta - \text{inv} \alpha_x); \\ Y_3 &= \frac{r_b}{\cos \alpha_x} \cos(\text{inv} \vartheta - \text{inv} \alpha_x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\alpha_x$  – угол профиля в определяемой точке эвольвенты;  $X_3$ ,  $Y_3$  – параметрические уравнения эвольвенты от параметра  $\alpha_x$  [1].

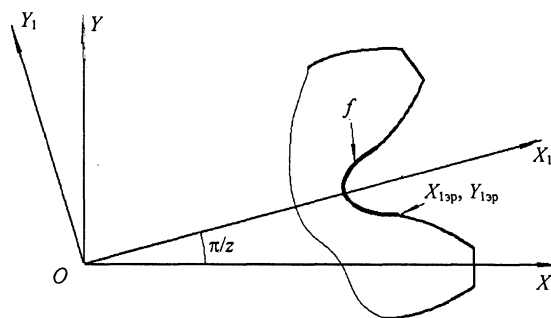


Рис. 1. Переходная кривая

Определим уравнения, которые понадобятся в дальнейшем.

Производная  $\frac{\partial Y_3}{\partial X_3}$  эвольвенты в системе координат  $XOY$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial \alpha_x} &= r_b \left( \frac{\sin \alpha_x}{\cos^2 \alpha_x} \cos(\text{inv} \vartheta - \text{inv} \alpha_x) + \frac{\text{tg}^2 \alpha_x}{\cos \alpha_x} \sin(\text{inv} \vartheta - \text{inv} \alpha_x) \right); \\ \frac{\partial Y_3}{\partial \alpha_x} &= r_b \left( \frac{\sin \alpha_x}{\cos^2 \alpha_x} \sin(\text{inv} \vartheta - \text{inv} \alpha_x) - \frac{\text{tg}^2 \alpha_x}{\cos \alpha_x} \cos(\text{inv} \vartheta - \text{inv} \alpha_x) \right); \\ \frac{\partial Y_3}{\partial X_3} &= -\text{tg}(\text{tg} \alpha_x - \text{inv} \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В систему  $X_1 O Y_1$  эвольвента преобразуется как:

$$\left. \begin{aligned} X_{13} &= X_3 \cos\left(\frac{\pi}{z}\right) + Y_3 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right); \\ Y_{13} &= -X_3 \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) + Y_3 \cos\left(\frac{\pi}{z}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда производная эвольвенты в системе координат  $X_1 O Y_1$  будет (дифференцируем (3) с учетом (2), принимая  $X_3$  как независимую переменную):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{13}}{\partial Y_{13}} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z}\right) + \frac{\partial Y_3}{\partial X_3} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) + \frac{\partial Y_3}{\partial X_3} \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)} = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{z}\right) - \text{tg}(\text{tg} \alpha_x - \text{inv} \vartheta) \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{z}\right) - \text{tg}(\text{tg} \alpha_x - \text{inv} \vartheta) \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)} = \\ &= -\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{z} + \text{tg} \alpha_x - \text{inv} \vartheta\right)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим, что явная функция переходной кривой  $X_1 = f(Y_1)$  симметрична относительно оси впадины зубьев и плавно сопрягается с эвольвентой. Поэтому она должна удовлетворять условиям:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)_{Y_1=0} &= 0; \\ f(Y_{13p}) &= X_{13p}(\alpha_p); \\ \left(\frac{\partial f}{\partial Y_1}\right)_{Y_1=Y_{13p}} &= \left(\frac{\partial X_{13}}{\partial Y_{13}}\right)_{\alpha_x=\alpha_p} = \\ &= -\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{z} + \text{tg} \alpha_p - \text{inv} \vartheta\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $Y_{13p}$  – координата  $Y_1$  точки сопряжения эвольвенты с переходной кривой в системе  $X_1 O Y_1$ .

Для определения геометрии кривой закругления зуба инструмента принимаем две системы координат: неподвижную  $X_1 O Y_1$ , связанную с зубчатым колесом, и подвижную  $Y_n O_n X_n$ , связанную с полоидной прямой инструмента (на рис. 2 ось  $O_n Y_n$ ), которая перекачивается без скольжения по полоидной окружности с радиусом

$$R = \frac{r_b}{\cos \alpha}, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – угол профиля инструмента. (Данная схема не применима к колесам, нарезаемым долбяками!)

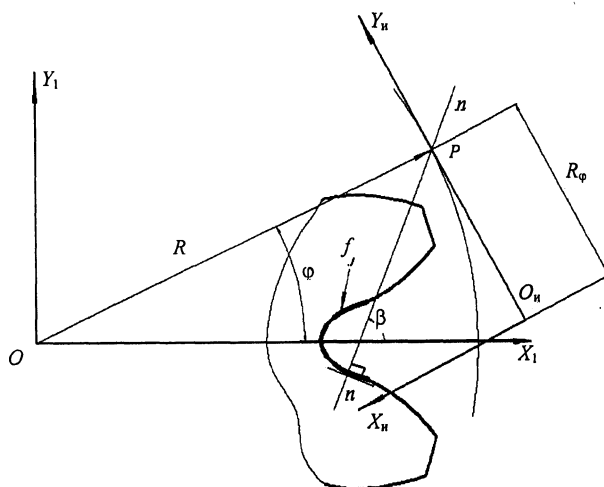


Рис. 2. К определению угла  $\varphi$

На основании теоремы Виллиса [4] взаимогнбаемые профили имеют общую нормаль в точке их касания, проходящую через полюс станочного зацепления  $P$ , который является точкой касания полоидной прямой и полоидной окружности в станочном зацеплении.

Если в некоторый момент времени переходная кривая формируется в точке с координатами  $(Y_{li}; X_{li})$ , то, преобразуя на основании рис. 2 в систему  $X_n O Y_n$ , получим точку с координатами:

$$\left. \begin{aligned} X_{ni} &= R - X_{li} \cos \varphi - Y_{li} \sin \varphi; \\ Y_{ni} &= R \varphi - X_{li} \sin \varphi + Y_{li} \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\varphi$  – угол поворота инструмента относительно заготовки.

По рис. 2 свяжем текущие значения координат галтели  $Y_{li}, X_{li}$  функции переходной кривой с углом поворота инструмента  $\varphi$ . Для этого определим координату  $Y_{1пол}$  точки пересечения нормали  $n-n$  с полоидной окружностью (в точке полюса  $P$ ). Уравнение нормали  $n-n$ , проходящей через точку  $Y_{li}, X_{li}$  функции  $f$  переходной кривой, будет

$$Y_1 = kX_1 + C, \quad (8)$$

где  $k = \operatorname{tg} \beta = \left( -\frac{df}{dY_1} \right)_{Y_1=Y_{li}}$ ;  $C = Y_{li} - kX_{li}$ .

Уравнение полоидной окружности

$$R^2 = Y_1^2 + X_1^2. \quad (9)$$

Задача сводится к нахождению корня системы уравнений (8), (9). Это приводит к квадратному уравнению относительно  $Y_{1пол}$

$$Y_{1пол}^2 \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) - Y_{1пол} \left( \frac{2C}{k^2} \right) + \left( \frac{C^2}{k^2} - R^2 \right) = 0, \quad (10)$$

требуемым решением которого является

$$Y_{1пол} = \frac{\frac{C}{k^2} + \sqrt{R^2 \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) - \left( \frac{C^2}{k^2} \right)}}{1 + \frac{1}{k^2}}. \quad (11)$$

Отсюда угол поворота инструмента

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{\frac{C}{Rk^2} + \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) - \left( \frac{C}{Rk} \right)^2}}{1 + \frac{1}{k^2}} \right). \quad (12)$$

Параметры инструмента ниже полоидной прямой (рис. 3) определяются как

$$\left. \begin{aligned} Y_{ин} &= \left( \frac{\pi}{z} - \operatorname{inv} \vartheta + \operatorname{inv} \alpha \right) \frac{r_b}{\cos \alpha}; \\ X_{и1} &= r_b (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_p) \sin \alpha; \\ Y_{и1} &= Y_{ин} - X_{и1} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

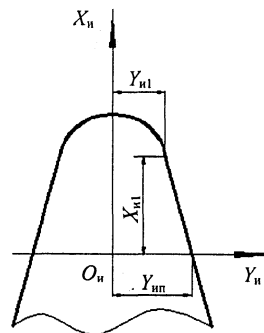


Рис. 3. Параметры зуба инструмента

Расчет прямолинейной части инструмента возможен по [1] и здесь не приводится, так как он в соответствии с предлагаемой методикой не имеет никакого влияния на форму переходной кривой.

Приведем пример использования разработанной методики. Определим (выбор уравнения во многом произволен и делался с учетом изложенных выше условий) переходную кривую с помощью уравнения эллипса (рис. 4)

$$\frac{(X_{1эл} - X_{1эл0})^2}{a^2} + \frac{Y_{1эл}^2}{b^2} = 1, \quad (14)$$

или в другом виде

$$X_{1эл} = X_{1эл0} - a \sqrt{1 - \frac{Y_{1эл}^2}{b^2}}. \quad (15)$$

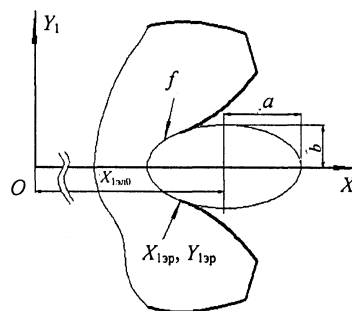


Рис. 4. Определение параметров вписанного эллипса

Тогда:

$$\frac{dX_{1эл}}{dY_{1эл}} = \frac{aY_{1эл}}{b^2 \sqrt{1 - \frac{Y_{1эл}^2}{b^2}}}; \quad (16)$$

$$\frac{d^2 X_{1эл}}{dY_{1эл}^2} = \frac{a}{b^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{Y_{1эл}^2}{b^2}}} + \frac{Y_{1эл}^2}{b^2 \left(1 - \frac{Y_{1эл}^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{a}{b^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{Y_{1эл}^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (17)$$

Радиус кривизны переходной кривой в искомой точке определяем по формуле

$$\rho_r = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{df}{dY_1} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 f}{dY_1^2}}, \quad (18)$$

что после подстановки выражений (16), (17) даст

$$\rho_r = \frac{b^2}{a} \left( 1 + \frac{Y_{1эл}^2}{b^2} \left( \frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (19)$$

В уравнении эллипса (14) на основании рис. 4 и формулы (15) можно варьировать параметр  $b$ , изменяя форму переходной кривой:

$$0 < b < |Y_{1эп}| \Rightarrow b = |Y_{1эп}| k_b, \quad (20)$$

где  $k_b > 1$ .

Тогда другие параметры выразятся:

$$a = - \frac{b^2}{Y_{1эп} \left( \frac{\pi}{z} + \operatorname{tg} \alpha_p - \operatorname{inv} \vartheta \right)} \sqrt{1 - \frac{Y_{1эп}^2}{b^2}}; \quad (21)$$

$$X_{1эл0} = X_{1эп} + a \sqrt{1 - \frac{Y_{1эп}^2}{b^2}}, \quad (22)$$

где  $X_{1эп}$  – координата  $X_1$  точки сопряжения эвольвенты с переходной кривой в системе  $X_1 O Y_1$ .

На основании полученных выражений (14)–(22) и предложенной методики написана компьютерная программа. Рис. 5...8 иллюстрируют ее работу для зубчатого колеса с  $z = 47$ ;  $\vartheta = 29,80^\circ$ ;  $m_a = 0,0106$ ;  $\alpha_p = 14,5^\circ$ ;  $r_b = 65,93$  мм. На рис. 5 показаны кривые закругления впадины зуба эллипсом при различных величинах параметра  $b$ .

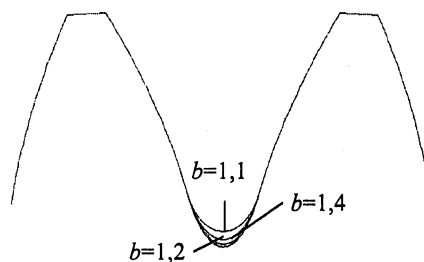


Рис. 5. Галтели, описанные по эллипсу, при различных значениях параметра  $b$

На рис. 6, 7 ниже полюдной прямой показаны профиль зуба инструмента при различных углах станочного зацепления (угла профиля инструмента). Эти изменения не влияют на форму переходной кривой зубчатого колеса. Таким образом, угол профиля инструмента может выбираться по желанию конструктора при ограничении лишь условием заострения кривой закругления зуба.

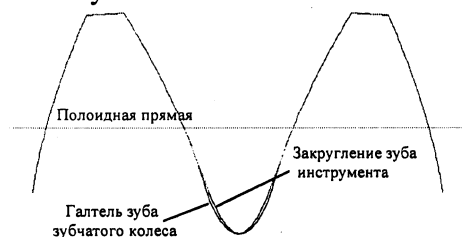


Рис. 6. Галтель, описанная по эллипсу ( $b = 1,4$ ), и форма инструмента ( $\alpha = 20^\circ$ ) ниже полюды

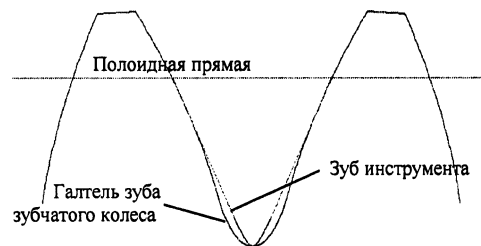


Рис. 7. Галтель, описанная по эллипсу ( $b = 1,4$ ), и форма инструмента ( $\alpha = 24^\circ$ ) ниже полюды

На графике (рис. 8) по оси абсцисс отложены расстояния по оси симметрии зуба от центра колеса (координата  $X$  на рис. 1), определяющие положение точки на галтели, на оси ординат – напряжения от единичной силы на единицу ширины зубчатого венца, определенные с помощью метода неплоских сечений.

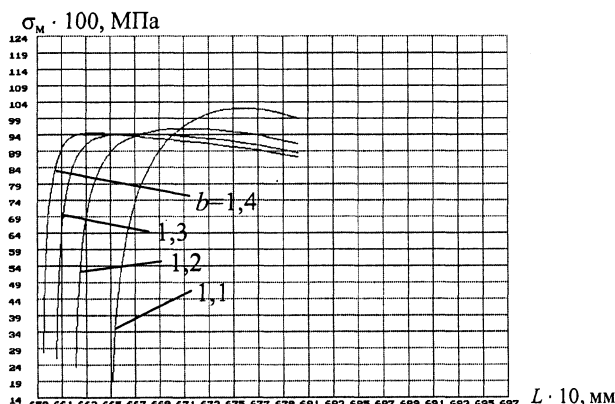


Рис. 8. Напряжения изгиба в галтели, очерченной по эллипсу, при различных параметрах  $b$

Известно, что большую роль в снижении шума и вибраций, а также в распределении нагрузки между зубьями играет увеличение податливости зубьев, которое можно получить, увеличивая их высоту. Поэтому полезными

представляются полученные результаты, показывающие уменьшение изгибных напряжений с ростом глубины впадины галтели (до некоторого предела). Расчеты, проведенные автором при исследовании различных переходных кривых (закругление зуба инструмента окружностью, эллипсом, параболой, синусоидой), при проектировании «от кривой закругления зуба инструмента к галтели» (обычная методология, описанная, например, в [1, 4]), как правило, не дают подобного сочетания. Кроме того, получаемое снижение изгибных напряжений меньше, чем в предлагаемом методе.

Предложенная методика в настоящее время экспериментально не апробирована.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вулгаков Э. Б. Зубчатые передачи с улучшенными свойствами. – М.: Машиностроение, 1974. – 263 с.
2. Вулгаков Э. Б., Васина Л. М. Эвольвентные зубчатые передачи в обобщающих параметрах: Справ. по геометрическому расчету. – М.: Машиностроение, 1978. – 174 с.
3. Авиационные зубчатые передачи и редукторы: Справ. / Под ред. Э. Б. Вулгакова. – М.: Машиностроение, 1981. – 374 с.
4. Гавриленко В. А. Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. – М.: Машгиз, 1969. – 431 с.

УДК 669.018.95

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ НИТРИДА КРЕМНИЯ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ УЛЬТРАДИСПЕРСНЫХ ПОРОШКОВ

Кандидаты техн. наук ГОЛУБЦОВА Е. С., КАЛЕДИН Б. А.

Белорусский национальный технический университет

Известно [1, 2], что механические характеристики горячепрессованных материалов на основе нитрида кремния из ультрадисперсных порошков выше, чем у материалов из более крупных порошков. Цель настоящей ра-

боты – изучить твердость и вязкость разрушения конструкционной керамики системы  $\text{Si}_3\text{N}_4 - (\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Y}_2\text{O}_3) - \text{TiN}$  в зависимости от состава и прилагаемой нагрузки, а также получить математические модели, устанавливаю-