

## Расчет прямоугольной плиты на двухслойном основании

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков<sup>1)</sup>, канд. техн. наук, доц. С. И. Зиневич<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

© Белорусский национальный технический университет, 2018  
Belarusian National Technical University, 2018

**Реферат.** Опыт эксплуатации бетонных покрытий при интенсивном движении тяжелых автомобилей показал, что, несмотря на высокую прочность самих бетонных плит, под ними должны быть прочные основания. В процессе укладки бетона на грунт в нем в результате нажимов упруго прогибающихся при проезде автомобилей плит накапливаются остаточные деформации. Вначале под плитами образуются полости, плиты теряют контакт с грунтом, а затем в них появляются трещины. Увеличение прочности основания повышает стоимость дорожной одежды. В настоящей работе выполнен статический расчет прямоугольной плиты на двухслойном упругом основании в традиционной постановке. В качестве основания принимались однородные грунты с верхним и нижним слоями в виде полупространства. Рассмотрен вариант нагружения плиты симметричной относительно двух осей внешней нагрузкой от колеса расчетного автомобиля. Вычисления выполнены методом Б. Н. Жемочкина с использованием пакета символьной математики. При этом плита разбивалась на 72 прямоугольных участка, в центре каждого участка устанавливалась вертикальная связь, через которую осуществлялся контакт плиты с упругим основанием. Полученная статически неопределимая система рассчитывалась смешанным методом строительной механики, где за неизвестные принимались усилия в вертикальных связях, а также линейное и два угловых перемещения введенного защемления по оси симметрии плиты. В результате расчета получены поверхности вертикальных перемещений плиты, реактивные напряжения на контакте плиты с упругим основанием. Предлагаемый подход может быть использован для поиска решений по оптимальной (достаточной) прочности основания для расчетного автомобиля, а также для расчетов шарнирно соединенных сборных железобетонных дорожных плит.

**Ключевые слова:** плита, двухслойное основание, упругий слой, полупространство, способ Б. Н. Жемочкина

**Для цитирования:** Босаков, С. В. Расчет прямоугольной плиты на двухслойном основании / С. В. Босаков, С. И. Зиневич // *Наука и техника*. 2018. Т. 17, № 2. С. 91–94. DOI: 10.21122/2227-1031-2018-17-2-91-94

## Calculation of Rectangular Plate on Two-Layer Basis

S. V. Bosakov<sup>1)</sup>, S. I. Zinevich<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

**Abstract.** Operating experience of concrete surfacing with vigorous motion of heavy vehicles has shown that despite high strength of concrete slabs they need a strong base. When concrete is placed on the ground residual deformations are accumulated in it due to presses of elastically bent plates in case of vehicle passage. Initially, cavities are formed under the plates and the plates are losing their contact with the ground, and then cracks appear in them. An increase in base strength makes the cost of road pavement higher. A static analysis of rectangular plate on two-layer elastic foundation has been made in a traditional setting. Homogeneous ground with upper and lower layers in the form of half-space has been taken as a basis. The paper considers a loading variant for a plate which is symmetrical with regard to two axes and loading has been carried out by an external load from the wheels of the calculated vehicle. The calculation has been performed while using the Zhemochkin method with a symbolic mathematics package. In this case the plate has been divided into 72 rectangular sections and a vertical bracing has been set in the center of every section and a contact of the plate with elastic basis has been arranged with the help of the bracing. The obtained statically indeterminate system has been calculated by a mixed method of structural mechanics where efforts in vertical bracings and linear and two angular displacements of input fixing along the

---

### Адрес для переписки

Босаков Сергей Викторович  
Белорусский национальный технический университет  
просп. Независимости, 150,  
220114, г. Минск, Республика Беларусь  
Тел.: +375 17 265-97-28  
ftk75@bntu.by

### Address for correspondence

Bosakov Siarhei V.  
Belarusian National Technical University  
150 Nezavisimosty Ave.,  
220114, Minsk, Republic of Belarus  
Tel: +375 17 265-97-28  
ftk75@bntu.by

axis of plate symmetry have been taken for unknowns. The calculation has made it possible to obtain surfaces of vertical plate displacements, reactive stresses in the contact of the plate with the elastic basis. The proposed approach can be used to search for solutions according to optimal (adequate) basis strength for the calculated vehicle and also for calculations of hingedly joined precast reinforced concrete road plates.

**Keywords:** plate, two-layer basis, elastic layer, half-space, B. N. Zhemochkin method

**For citation:** Bosakov S. V., Zinevich S. I. (2018) Calculation of Rectangular Plate on Two-Layer Basis. *Science and Technique*. 17 (2), 91–94. DOI: 10.21122/2227-1031-2018-17-2-91-94 (in Russian)

## Введение

В последнее время в Республике Беларусь строится много дорог с цементобетонным покрытием. Наряду со многими положительными характеристиками (с высокой прочностью, не зависящей от времени года, со значительно большей по сравнению с асфальтобетонными покрытиями долговечностью, с хорошими фрикционными и светотехническими характеристиками), цементобетонные покрытия имеют ряд недостатков, к которым можно отнести возможность проникновения в дорожную одежду воды через деформационные швы, ощущение толчков при проезде поперечных швов, несколько большую стоимость устройства по сравнению с асфальтобетонными покрытиями. Одним из наиболее существенных недостатков цементобетонных покрытий является то, что от укладки смеси до ввода покрытия в эксплуатацию требуется длительный и тщательный уход за бетоном, пока он не приобретет необходимую прочность. Это ограничивает возможность использования цементобетона при перестройке и капитальном ремонте дорог, когда невозможно надолго закрыть движение на дороге [1, 2].

Интерес в этом случае представляют сборные бетонные покрытия, которые имеют ряд несомненных преимуществ. Бетонные плиты готовятся на заводах заблаговременно со строгим соблюдением технологических правил и режимов ухода за бетоном. Монтировать покрытие на подготовленное основание можно в течение всего года, используя и неблагоприятные для бетонных работ периоды. Движение по сборным бетонным покрытиям открывается сразу после их устройства. Ремонт таких покрытий осуществляется по типу ремонта тротуаров из бетонной плитки, т. е. путем замены плиты с появившимися дефектами на новые [3, 4].

Вместе с тем устройство сборных покрытий сегодня не нашло широкого применения. Одна из причин – трудность обеспечения ровности покрытия, требуемой для движения с высокими скоростями. В процессе эксплуатации часто возникают просадки отдельных плит, что еще больше ухудшает ровность покрытия.

Опыт эксплуатации бетонных покрытий при интенсивном движении тяжелых автомобилей

показал, что, несмотря на высокую прочность самих бетонных плит, под ними должны быть прочные основания. В процессе укладки бетона на грунт в нем в результате нажимов упруго прогибающихся при проезде автомобилей плит накапливаются остаточные деформации. Вначале под плитами образуются полости, плиты теряют контакт с грунтом, а затем в них появляются трещины. Увеличение прочности основания повышает стоимость дорожной одежды. С целью поиска решений по оптимальной прочности основания выполнены расчеты прямоугольной плиты на двухслойном основании.

## Расчет бетонной плиты

Методом Б. Н. Жемочкина [5] произведен расчет прямоугольной изолированной дорожной плиты на двухслойном основании под действием статической вертикальной нагрузки (рис. 1) в традиционной постановке [6]. С этой целью контактная поверхность плиты разбивалась на прямоугольные участки и в центре каждого участка ставилась вертикальная связь, через которую осуществлялся контакт плиты с упругим основанием (рис. 2). Считали, что усилие в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений в пределах каждого участка. Полученная статически неопределимая система рассчитывалась смешанным методом строительной механики [7], где за неизвестные принимались усилия в вертикальных связях, а также линейное и два угловых перемещения введенного защемления по оси симметрии плиты. Основная система смешанного метода представлена на рис. 3.

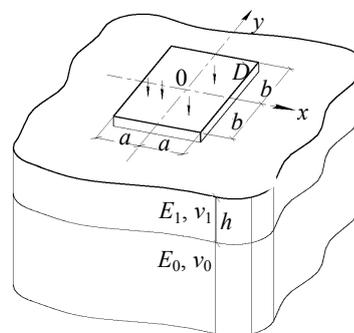


Рис. 1. Прямоугольная плита на упругом двухслойном основании  
Fig. 1. Rectangular plate on elastic two-layer basis

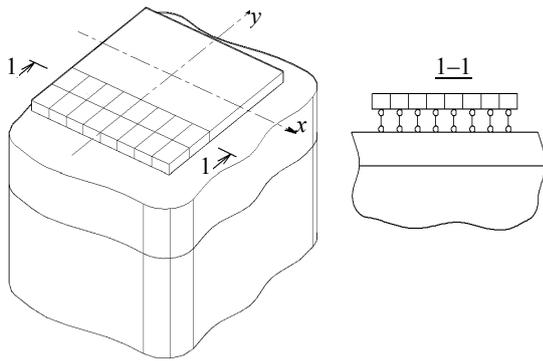


Рис. 2. Деление плиты на участки Б. Н. Жемочкина  
Fig. 2. Division of plate into B. N. Zhemochkin's sections

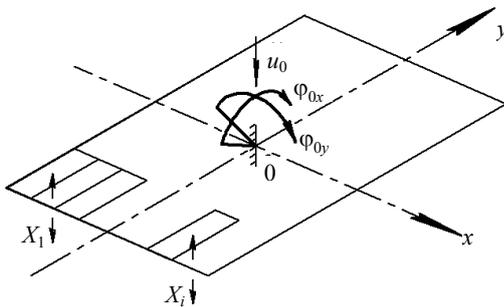


Рис. 3. Основная система смешанного метода  
Fig. 3. Main system of mixed method

Система канонических уравнений способа Б. Н. Жемочкина для определения неизвестных усилий в лишних связях и перемещений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{1,1}X_1 + \dots + \delta_{1,n}X_n + u_0 + \varphi_{0x}y_1 + \varphi_{0y}x_1 + \Delta_{1p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n,1}X_1 + \dots + \delta_{n,n}X_n + u_0 + \varphi_{0x}y_n + \varphi_{0y}x_n + \Delta_{np} = 0; \\ \sum_{k=1}^n X_k - R = 0; \\ \sum_{k=1}^n X_k y_k - M_x = 0; \\ \sum_{k=1}^n X_k x_k - M_y = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $n$  – число прямоугольных участков Б. Н. Жемочкина на плите;  $X_k$  – усилие в связи с номером  $k$ ;  $R$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  – величина равнодействующей внешней силы и моменты равнодействующей относительно координатных осей;  $u_0$ ,  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{0y}$  – линейное и угловые перемещения введенного на плите защемления (рис. 3).

Коэффициенты при неизвестных усилиях  $\delta_{ik}$  в (1) зависят от перемещений упругого основания  $V_{ik}$  и прогибов плиты с защемленной нормалью  $W_{ik}$  и определяются по формулам [8]:

$$\delta_{ik} = \frac{1}{\pi E_1 a} \left( F_{ik} + \frac{\beta}{16} W_{ik} \right);$$

$$\beta = \frac{\pi E_1 a^3}{(1 - \nu_1^2) D},$$

где  $F_{ik}$  – безразмерная функция для определения перемещений точки  $i$  на поверхности двухслойного упругого основания от действия единичной силы, равномерно распределенной по прямоугольному участку  $k$  поверхности основания (определяется интегрированием выражения из [9], которое методом специальной аппроксимации [10] приведено к виду, удобному для интегрирования [8]);  $W_{ik}$  – прогиб точки  $i$  пластинки с защемленной нормалью от действия единичной силы, приложенной в точке  $k$  той же пластинки (принимался в виде суммы решений для бесконечной пластинки с защемленной нормалью и первых четырех частных решений Клебша [8]);  $D$  – цилиндрическая жесткость плиты;  $E_1$ ,  $\nu_1$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона верхнего слоя упругого основания (рис. 1).

Безразмерный параметр  $\beta$  в работе М. И. Горбунова-Посадова получил название показателя гибкости [5]. Он обобщенно характеризует физико-механические свойства основания и плиты.

Свободные члены в системе (1) определяются через прогибы плиты с защемленной нормалью  $W_{ik}$ .

Рассчитывалась железобетонная плита прямоугольной формы с размерами в плане 3000×6000 мм, изготовленная из бетона класса С20/25. Толщины плиты и защитного слоя арматуры приняты равными соответственно 180 и 30 мм. Плита опирается на двухслойное упругое основание с упругими постоянными:  $E_1 = 50$  МПа;  $\nu_1 = 0,25$ ;  $h_1 = 0,5$  м;  $E_2 = 50$  МПа;  $\nu_2 = 0,25$ .

Прямоугольная плита нагружена в центре колесом расчетного автомобиля в виде круга диаметром 0,41 м, передающего равномерно распределенную нагрузку величиной 0,6 МПа (65 кН) (рис. 4).

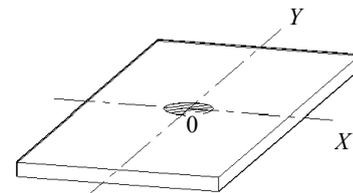


Рис. 4. Схема загрузки плиты колесом расчетного автомобиля

Fig. 4. Chart of plate loading by standard vehicle wheel

Полученные результаты расчетов приведены на рис. 5–7.

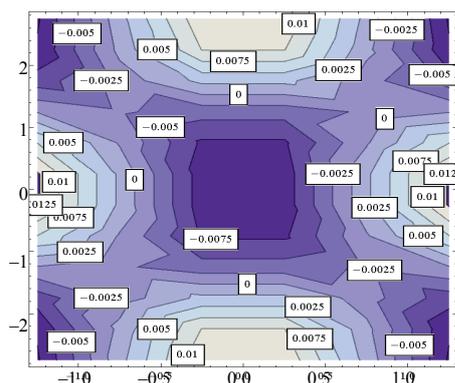


Рис. 5. Изолинии равных вертикальных перемещений, м  
Fig. 5. Isolines of equal vertical movements, m

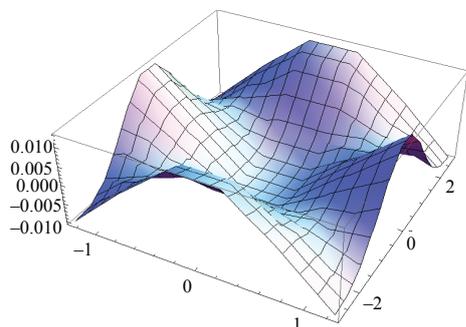


Рис. 6. Поверхность вертикальных перемещений, м  
Fig. 6. Surface of vertical movements, m

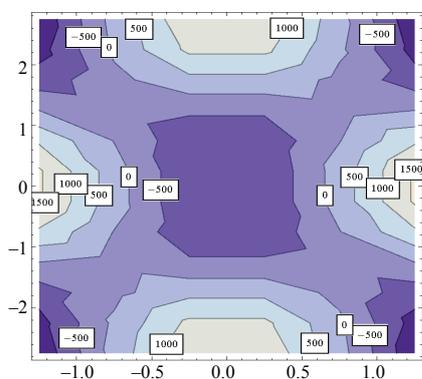


Рис. 7. Изолинии равных контактных напряжений, кПа  
Fig. 7. Isolines of equal contact stresses, kPa

### ВЫВОД

Приведен статический расчет прямоугольной плиты на упругом двухслойном основании под действием внешней нагрузки от колеса расчетного автомобиля. В результате вычислений получены поверхности вертикальных перемещений плиты, а также реактивные напряжения на контакте плиты с упругим основанием. Предлагаемый подход может быть использован для поиска решений по оптимальной (достаточной) прочности основания для стандартной плиты, а также для расчетов шарнирно соединенных железобетонных плит сборных дорожных покрытий.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Носов, В. П. Состояние, проблемы, перспективы применения цементобетона при строительстве автомобильных дорог / В. П. Носов // *Бетон на рубеже третьего тысячелетия: материалы 1-й Всерос. конф. по проблемам бетона и железобетона*. М.: Ассоциация «Железобетон», 2001. Ч. 3. С. 1711–1715.
2. Левицкий, Е. Ф. Бетонные покрытия автомобильных дорог / Е. Ф. Левицкий, В. А. Чернигов. М.: Транспорт, 1980. Ч. 1. 288 с.
3. Бабков, В. Ф. Проектирование автомобильных дорог. Ч. 1 / В. Ф. Бабков, О. В. Андреев. М.: Транспорт, 1979. 367 с.
4. Орловский, В. С. Проектирование и строительство сборных дорожных покрытий / В. С. Орловский. М.: Транспорт, 1978. 149 с.
5. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. М.: Стройиздат, 1962. 239 с.
6. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. М.: Стройиздат, 1984. 639 с.
7. Ржаницын, А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. М.: Высш. шк., 1991. 439 с.
8. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. Минск: БНТУ, 2002. 128 с.
9. Коган, Б. И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б. И. Коган // *Труды ХАДИ*. 1953. Вып. 14. С. 33–46.
10. Развитие теории контактных задач в СССР / Б. Л. Абрамян [и др.]; под ред. Л. А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.

Поступила 20.10.2017

Подписана в печать 28.12.2017

Опубликована онлайн 30.03.2018

### REFERENCES

1. Nosov V. P. (2001) Status, Problems and Prospects for Application of Cement Concrete in Construction of Auto-Roads. *Concrete at the Turn of the third Millennium: Proceedings of the 1st All-Russian Conference on the Problems of Concrete and Ferroconcrete*. Moscow, "Ferroconcrete" Association, 1711–1715 (in Russian).
2. Levitsky E. F., Chernigov V. A. (1980) *Concrete Pavement of Auto-Roads*. Moscow, Transport Publ. 288 (in Russian).
3. Babkov V. F., Andreev O. V. (1979) *Highway Designing. Part 1*. Moscow, Transport Publ. 367 (in Russian).
4. Orlovsky V. S. (1978) *Designing and Construction of Prefabricated Auto-Road Pavements*. Moscow, Transport Publ. 149 (in Russian).
5. Zhemochkin B. N., Sinitsyn A. P. (1962) *Practical Calculation Methods of Foundation Beams and Plates on Elastic Foundation*. Moscow, Stroyizdat Publ. 239 (in Russian).
6. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. (1984) *Calculation of Structures on Elastic Foundation*. Moscow, Stroyizdat Publ. 639 (in Russian).
7. Rzhantsyn A. R. (1991) *Structural Mechanics*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 439 (in Russian).
8. Bosakov S. V. (2002) *Static Calculations of Slabs on Elastic Foundation*. Minsk, Belarusian National Technical University. 128 (in Russian).
9. Kogan B. I. (1953) Stresses and Deformations of Multi-Layer Coatings. *Trudy Khar'kovskogo Avtomobil'no-Dorozhnogo Instituta* [Proceedings of Kharkov Automobile and Highway Institute], 14, 33–46 (in Russian).
10. Abramyan B. L., Aleksandrov V. M., Amenzade Yu. A., Aramanovich I. G., Babeshko V. A., Belokon' A. V., Bondareva V. F., Borodachev N. M., Vorovich I. I., Druyanov B. A., Galin L. A. (ed.) (1976) *Development of Theory for Contact Problems in the USSR*. Moscow, Nauka Publ. 493 (in Russian).

Received: 20.10.2017

Accepted: 28.12.2017

Published online: 30.03.2018