УДК 534.211

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ. ОЦЕНКА КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

КОРЧЕМЕНКО С. В.

Белорусский национальный технический университет

Как известно, интегральные (макроскопические) свойства неоднородной среды описываются с помощью эквивалентной (эффективной) среды [1]. Эффективные упругие операторы (модули) зависят от вида корреляционных функций материальных коэффициентов среды, отражающих ее структурные свойства. Рассмотрим основные соотношения приближений эффективной среды.

Распространение гармонических волн в неоднородной линейной упругой среде описывается уравнениями

$$\left(\lambda_{ijkl}(x)u_{k,l}\right)_{,j}+\rho(x)\omega^2u_i=0, \qquad (1)$$

где λ_{ijkl} – тензор упругих коэффициентов, компоненты которого зависят от пространственных координат x_i (i = 1, 2, 3); $\rho(x)$ – плотность среды; u_i – вектор перемещений; ω – частота.

Граничные условия, или условия на бесконечности, являются детерминированными и ставятся обычным образом для каждой конкретной задачи.

При решении прямых детерминированных задач: $\lambda_{ijkl}(x)$, $\rho(x)$ – заданные реализации, являющиеся функциями пространственных координат; $u_i(x)$ – искомые детерминированные функции, описывающие волновое поле в среде с данной реализацией структуры. В обратных задачах: $u_i(x)$ – измеряемые (наблюдаемые) функции на некотором множестве P, а $\lambda_{ijkl}(x)$, $\rho(x)$ должны быть определены на некотором множестве V. Как известно, эта задача некорректная [1…6] и для решения требует знания какой-либо информации об искомых функциях.

Введем естественную иерархию структур исследуемых полей. Заменим данную конкретную реализацию через множество подобных реализаций, т. е. случайные функции $\Lambda_{ijkl}(x)$, $P(x)$. Таким образом, считаем, что в (1) $\lambda_{ijkl}(x)$, $\rho(x)$ являются случайными функциями, и сохраним за ними те же обозначения. Тогда символически можно записать:

$$\lambda_{ijkl}=\Lambda^*_{ijkl}+\Lambda'_{ijkl};\ \ \rho=\rho^*+\rho';\ \ \Lambda'f=\lambda f-\Lambda^*f, \qquad (2)$$

где $\Lambda^*{}_{ijkl}$, ρ^* – эффективные операторы упругости и плотности, вводимые соотношениями:

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\langle\lambda_{ijkl}(x)l_{kl}\rangle=\Lambda^*_{ijkl}\langle l_{kl}\rangle;\quad \langle\rho u_i\rangle=\rho^*\langle u_i\rangle. \qquad (3)$$

Представляя решения (1) согласно (2), (3) в виде

$$u_i(x)=\langle u_i(x)\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}u_i^{(n)}(x) \qquad (4)$$

и подставляя (4) в (1), получим рекуррентную систему уравнений динамики в виде

$$\begin{gathered}\left(\Lambda^*_{ijkl}u^{(n)}_{k,l}\right)_{,j}+\rho^*\omega^2u_i^{(n)}=-\left(\Lambda'_{ijkl}u^{(n-1)}_{k,l}+\rho'\omega^2u_i^{(n-1)}\right),\\ n=0,1,2,\ldots;\quad u_i^{(-1)}=0;\quad u_i^{(0)}=\langle u_i\rangle.\end{gathered} \qquad (5)$$

Из (5) следует, что решение прямой задачи при n = 0 сводится к заданию эффективных волновых операторов Λ^*_{ijkl}, ρ^*, которые описывают интегральные свойства исходной среды. Разработке методов теоретического вычисления эффективных модулей посвящено много исследований, особенно в случаях статики [7…11]. В случае динамики для статистически изотропных однородных сред эффективные волновые операторы представляют интегральные операторы с разностным ядром по пространственным координатам. Ядро же представляет композицию тензора Грина однородной среды и корреляционного тензора упругих модулей, характеризующего интегральные свойства структуры исходной среды [7, 10, 11]. При вычислении эффективных волновых операторов корреляционные (структурные) функции среды задаются на основе некоторой имеющейся информации о структуре исходной среды. Одним из источников такой информации являются эксперименты по исследованию затухания (рассеяния) волн в неоднородной среде и определению дисперсии скоростей волн. В результате обработки результатов эксперимента получают информацию об аналитическом виде корреляционной функции для данной среды.

Вопросы нахождения корреляционных функций по данным измерения коэффициентов затухания (рассеяния) и дисперсии скорости рассматривались в [7]. Приведем примеры теоретического нахождения корреляционных функций для статистически изотропных однородных сред.

Для слоистой неоднородной среды изменение упругих коэффициентов задается формулой [12]

$$\varepsilon'(x)=\sum_k \varepsilon'_k\,\mu\!\left(\frac{x-x_k}{\alpha_k}\right);\qquad \mu=\begin{cases}1;\ x_k<x<x_k+\alpha_k;\\ 0;\ x<x_k;\ x>x_k+\alpha_k,\end{cases} \tag{6}$$

где $\varepsilon'(x)$ – случайные флуктуации функции $\varepsilon(x)$; x_k – случайные координаты скачка $\varepsilon(x)$ вдоль прямой x; α_k – случайная толщина слоя. В простейшем случае $\varepsilon'(x)$; x_k, α_k – независимые случайные величины.

Рассмотрим слой общей толщины L. Пусть случайная величина n – число различных компонент на длине L, распределена по закону Пуассона

$$P(n)=\frac{\langle n\rangle \exp(-\langle n\rangle)}{n!},\quad \langle n\rangle = n_1 L, \tag{7}$$

где $n_1=\mathrm{const}$ и связана с вероятностью $W(x)$ появления другого компонента на интервале от x до $x+dx$

$$W(x)dx=n_1 dx. \tag{8}$$

Величина α распределена по экспоненте

$$f_a(\alpha)=a^{-1}\exp(-\alpha/a),\quad a=\langle\alpha\rangle .$$

Тогда корреляционная функция имеет вид [12]

$$R(z)=\langle \varepsilon'(x)\varepsilon'(x+z)\rangle = n_1\langle\varepsilon^2\rangle\langle a\rangle \exp\left(-|z|a^{-1}\right). \tag{9}$$

Возможная реализация $\varepsilon(x)$ представлена на рис. 1а.

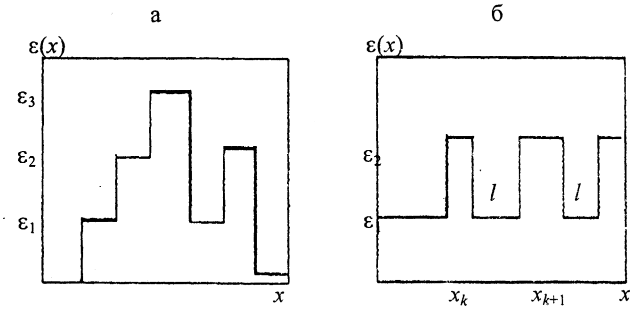

Рис. 1

Для слоистого материала со значениями компонент ε_1 и ε_2 вводится функция $v(x)=[\varepsilon(x)-0{,}5(\varepsilon_1+\varepsilon_2)]\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\right)^{-1}$. Тогда корреляционная функция $v(x)$ имеет вид [12] $R(z)=0{,}25(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\exp(-2n_1|z|)$, что соответствует распределению Пуассона координаты x_k. Толщина слоя L – случайная величина – при этом распределена по экспоненциальному закону. Возможная реализация такой среды представлена на рис. 1б.

В случае, если толщина слоя L распределена по закону Рэлея, корреляционная функция примет вид [13] $R(z)=R_0\exp\left(-z^2a^{-2}\right)$. Таким образом, распределение структурных параметров x_k, α_k связано с конкретным видом корреляционной функции.

Для статистически изотропной и однородной среды собственными функциями операторов Λ^*_{ijkl}, ρ^* являются $\langle u(\mathbf{x})\rangle = u(\mathbf{q})\exp(i\,\mathbf{qx})$. Дисперсионные уравнения, определяющие закон дисперсии $q_\alpha=q_\alpha(\omega)$ $(\alpha=l,t)$, получаются на основе уравнений (5) при $n=0$ [7]:

$$q_\alpha^2(\omega)=\frac{\rho^*(q)\omega^2}{\Lambda^*_\alpha(q)};$$

$$\Lambda_l^*(q) = \lambda^*(q) + 2\mu^*(q); \quad \Lambda_t^*(q) = \mu^*(q). \qquad (10)$$

На основании измерений коэффициентов $\delta_\alpha(\omega) = \operatorname{Im} q_\alpha(\omega)$ – затухания среднего поля и дисперсии скорости волн, связанных с $\chi_\alpha(\omega) = = \operatorname{Re} q_\alpha(\omega)$, находятся спектры $\Lambda_\alpha^*(\omega)$, $\rho^*(\omega)$ и затем ядра $\Lambda_\alpha^*(x - x_1)$; $\rho^*(x - x_1)$ операторов Λ^*, ρ^*, которые связаны с корреляционными функциями $R_\lambda^{(\alpha)}(x - x_1)$; $R_\rho(x - x_1)$ через известную функцию Грина $G^0(x - x_1)$ в виде произведения $\Lambda_\alpha^*(x - x_1) = G^0(x - x_1) R_\lambda^{(\alpha)}(x - x_1)$. Таким образом, в символической записи имеем $R_\lambda^{(\alpha)}(x - x_1) = \Lambda_\alpha^*(x - x_1) G^0(x - x_1)$.

По виду корреляционной функции $R_\lambda^{(\alpha)}(x - x_1)$ упругих модулей можно сделать некоторые выводы о свойствах конкретных реализаций $\lambda_{ijkl}(x)$. Например, о гладкости, степени упорядоченности или неупорядоченности структуры. Однако на практике при решении задач геофизики, дефектоскопии необходимо знание данной конкретной реализации физико-механических коэффициентов среды. Для этого необходимо в рассеянной волне выделить иерархию структур полевых величин и установить ее взаимосвязь с особенностями структуры среды.

Рассмотренные соотношения приближений эффективной среды и корреляционной функции являются составной частью алгоритма идентификации упругих коэффициентов неоднородной среды на основе совместного применения статистического варианта метода осреднения и метода статистического обращения. Этот метод в сейсмологии позволяет определить свойства среды по направлению распространения волн, вызванных землетрясениями, создавать механические резонаторы и фильтры в акустоэлектронике, проектировать многослойные конструкции, которые являются наиболее перспективными в строительстве с точки зрения виброзвукоизоляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Исимару А.** Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 317 с.
2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1981. – 286 с.
3. **Лаврентьев М. М. и др.** Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
4. **Горюнов А. А., Сасковец А. В.** Обратные задачи рассеяния в акустике. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 152 с.
5. **Keys R. G., Weglein A. B.** Generalized linear inversion and the first Born theory for acoustic media // Y. Math. Phis. – 1983. – V. 24, № 6. – P. 1444–1449.
6. **Чигарев А. В.** Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. – Мн.: УП «Технопринт», 2000. – 425 с.
7. **Болотин В. В., Москаленко В. Н.** К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композитных материалов // Изв. АН СССР, МТТ. – 1969. – № 3.
8. **Шермергор Т. Д.** Теория упругости структурно неоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
9. **Лифшиц И. М., Пархомовский Г. Д.** Поглощение ультразвука в поликристаллах // Уч. зап. Харьковского госуниверситета. – 1948. – Т. 27.
10. **Mc. Coy I. I.** Macroscopic response of continuous with random microstructure // Mechanics Today. – N.-Y., 1981. – V. 6.
11. **Беликов Б. П. и др.** Упругие свойства породообразующих минералов и горных пород. – М.: Наука, 1970. – 275 с.
12. **Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.** Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 463 с.
13. **Волков С. Д., Ставров В. П.** Статистическая механика композиционных материалов. – Мн.: Изд-во БГУ, 1978. – 206 с.