версии знака постоянной Холла в p-InAs / О. К. Гусев, В. П. Киреенко, А. А. Ломтев, В. Б. Яржембицкий // Физика и техника полупроводников. – 1983. – Т. 17, вып. 6. С. 1153–1155.

11. **Гусев О. К., Киреенко В. П., Яржембицкий В. Б.** Аномальный фото-Холл-эффект в кристаллах p-InAs // Физика и техника полупроводников. – 1992. – Т. 26, вып. 6. – С. 1138–1139.

УДК 517.977

ПРОЦЕДУРА НЕПРЕРЫВНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕКУЩЕГО СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОБЫКНОВЕННОЙ СИСТЕМЫ ПО НЕПОЛНОМУ ВЫХОДУ

Докт. физ.-мат. наук, доц. МЕТЕЛЬСКИЙ А. В.,
докт. физ.-мат. наук, проф. МИНЮК С. А.

Белорусский национальный технический университет,
Гродненский государственный университет имени Я. Купалы

1. **Постановка задачи**. Пусть система наблюдения описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \in T = [0, t_1] \tag{1}$$

с доступным измерению выходом

$$y(t) = Cx(t),\ t \in T, \tag{2}$$

где A и C – постоянные $n \times n$- и $m \times n$-матрицы соответственно.

Рассмотрим задачу наблюдения системы (1), (2) в постановке Н. Н. Красовского [1]. Требуется найти линейную ограниченную операцию

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} y(\tau)dV(\tau), \tag{3}$$

где V – функция ограниченной вариации на T, вычисляющая текущее состояние $x(t_1)$ по прошлому выходу $y(t),\ t \in T$.

Известно [2], что в пространстве непрерывных функций $C(T, R^n)$ линейная ограниченная операция имеет вид интеграла Стилтьеса (3). Операцию (3) будем называть восстанавливающей, или операцией восстановления. Иногда задачу восстановления конечного состояния динамической системы по прошлому выходу называют задачей идентификации [3].

2. **Построение восстанавливающей операции**. Условие полной наблюдаемости [1, 3] системы (1), (2) имеет вид

$$\operatorname{rank}\left[C', A'C', \ldots, (A')^{n-1}C'\right] = n. \tag{4}$$

Знак «′» обозначает операцию транспонирования матрицы.

Теорема. Если для системы наблюдения (1), (2) выполнено условие (4), то задача наблюдения разрешима в классе непрерывных линейных операций вида

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} v(\tau)y(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где $v(\tau), \tau \in T$ – матричная непрерывная функция.

Доказательство. Пусть $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ – характеристическое уравнение матрицы A. Тогда выход $y(t)$ системы (1), (2) удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = 0. \tag{6}$$

Обозначим

$$b_0(t) = y(t);\ \ b_k(t) = y^{(k)}(t) + a_1 y^{(k-1)}(t) + \ldots + a_k y(t),\ \ k = \overline{1, n-1};$$

$$d_k(t) = a_n \frac{t^k}{k!} - a_{n-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + (-1)^k a_{n-k},\ k = \overline{0, n-1}.$$

Интегрируя уравнение (6), получим

$$b_{n-1}(t_1) - b_{n-1}(t) + \int_t^{t_1} d_0(\tau - t) y(\tau) d\tau = 0;$$

$$b_{n-1}(t_1)(t_1 - t) - b_{n-2}(t_1) + b_{n-2}(t) + \int_t^{t_1} d_1(\tau - t) y(\tau) d\tau = 0;$$

$$b_{n-1}(t_1)\frac{(t_1 - t)^{n-1}}{(n-1)!} - b_{n-2}(t_1)\frac{(t_1 - t)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1} b_0(t_1) + (-1)^n y(t) + \int_t^{t_1} d_{n-1}(\tau - t) y(\tau) d\tau = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим полиномиальные функции $\delta_i(t) = (-1)^{n-1-i}\frac{(t_1 - t)^i}{i!}$, $i = \overline{0, n-1}$, и $\alpha_i(t)$, $t \in T$, $i = \overline{0,\ n-1}$, удовлетворяющие условиям:

$$\int_0^{t_1} \delta_i(t) \alpha_j(t) dt = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Тогда из (7) получаем

$$b_i(t_1) = \int_0^{t_1} \tilde{v}_i(\tau) y(\tau) d\tau, i = \overline{0, n-1}, \quad (8)$$

где

$$\tilde{v}_i(\tau) = (-1)^{n+1}\alpha_i(\tau) - \int_0^{\tau} \alpha_i(t) d_{n-1}(\tau - t) dt. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$y^{(k)}(t_1) = b_k(t_1) - a_1 y^{(k-1)}(t_1) - \ldots - \\ - a_k y(t_1),\ k = \overline{1,\ n-1}, \quad (10)$$

находим:

$$\dot{y}(t_1) = b_1(t_1) - a_1 b_0(t_1);$$

$$\ddot{y}(t_1) = b_2(t_1) - a_1\big(b_1(t_1) - a_1 b_0(t_1)\big) - a_2 b_0(t_1)$$

и т. д. Отсюда заключаем, что

$$y^{(k)}(t_1) = \int_0^{t_1} \overline{v}_k(\tau) y(\tau) d\tau,\ k = \overline{0,\ n-1}, \quad (11)$$

где $\overline{v}_k(\tau)$ ввиду (8)...(10) линейным образом выражаются через $\alpha_i(\tau), \tau \in T$.

Последовательно дифференцируя выход (2) системы (1) $n - 1$ раз, получаем

$$y^{(k)}(t_1) = CA^k x(t_1),\ k = \overline{0,\ n-1}. \quad (12)$$

Поскольку выполнено условие (4), система линейных алгебраических уравнений (1) имеет единственное решение $x(t_1)$, линейное относительно $y^{(k)}(t_1)$, $k = \overline{0,\ n-1}$. Используя выражения (11), (12), находим $x(t_1)$ в форме (5).

Теорема доказана.

3. **Обсуждение полученных результатов.** Пример.

1. Если

$$\text{rank}\left[C', A'C', \ldots, (A')^{n-1}C'\right] = r < n,$$

то наблюдаемы посредством операции (5) будут конечные состояния $x(t_1)$ из подпространства $Hx(t_1) = 0$, где

$$\text{rank}\left[C', A'C', \ldots, (A')^{n-1}C', H'\right] = n.$$

2. Предложенная конструкция непрерывной восстанавливающей операции очевидным образом распространяется на неоднородные системы (1), (2), в частности на системы управления.

Пример. Продемонстрируем сказанное на примере системы стабилизации летательного аппарата [4]:

$$\dot{x}_1 = -d_1 x_2 - d_2 x_3 + d_1 x_4,\ \dot{x}_2 = x_1,\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_0}x_3 + \frac{K}{T_0}u;$$

$$\dot{x}_4 = d_3 x_2 - d_3 x_4, t > 0 \quad (13)$$

с выходом $y_1(t) = x_3(t)$; $y_2(t) = x_4(t)$; $t \in [0, t_1]$. Параметры системы (13) определены в [4, с. 197].

Рассмотрим задачу вычисления конечного состояния $x(t_1)$ этой системы с помощью непрерывной линейной операции (5).

Дифференцируя последнее уравнение системы (13) два раза, получаем

$$\dddot{x}_4 = -d_2 d_3 x_3 - d_1 \dot{x}_4 - d_3 \ddot{x}_4. \quad (14)$$

Последовательно интегрируя (14), приходим к соотношению

$$\left(\ddot{x}_4(t_1) + d_3\dot{x}_4(t_1) + d_1 x_4(t_1)\right)\frac{(t_1 - t)^2}{2} - \\ - \left(\dot{x}_4(t_1) + d_3 x_4(t_1)\right)(t_1 - t) + x_4(t_1) = \\ = \frac{d_2 d_3}{2}\int_t^{t_1}(\tau - t)^2 y_1(\tau) d\tau + d_1\int_t^{t_1}(\tau - t) y_2(\tau) d\tau -$$

$$-d_3\int_t^{t_1} y_2(\tau)d\tau + y_2(t),\ t>0. \qquad (15)$$

Введем функции $\delta_0(t)=1$; $\delta_1(t)=-(t_1-t)$; $\delta_2(t)=\frac{1}{2}(t_1-t)^2$ и определим функции $\alpha_i(t)$, $i=\overline{0,2}$ из условий:

$$\int_0^{t_1}\alpha_i(t)\delta_j(t)dt=\begin{cases}1,\ i=j;\\ 0,\ i\neq j.\end{cases}$$

Умножая (15) на $\alpha_i(t)$, $i=\overline{0,2}$ и интегрируя от 0 до t_1, получим:

$$\begin{aligned}&x_4(t_1)=b_0;\ \dot{x}_4(t_1)+d_3x_4(t_1)=b_1;\\ &\ddot{x}_4(t_1)+d_3\dot{x}_4(t_1)+d_1x_4(t_1)=b_2,\end{aligned} \qquad (16)$$

где

$$b_i=\int_0^{t_1}\left(v_{1i}(\tau)y_1(\tau)+v_{2i}(\tau)y_2(\tau)\right)d\tau=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_0^{t_1}v_{ji}(\tau)y_j(\tau)d\tau;$$

$$v_{1i}(\tau)=-\frac{d_2d_3}{2}\int_0^{\tau}\alpha_i(s)(\tau-s)^2ds;$$

$$v_{2i}(\tau)=\int_0^{\tau}\left(d_1(\tau-s)-d_3\right)\alpha_i(s)ds+\alpha_i(\tau).$$

Из (16) находим:

$$\dot{x}_4(t_1)=b_1-d_3b_0=\sum_{i=1}^{2}\int_0^{t_1}\left(v_{i1}(\tau)-d_3v_{i0}(\tau)\right)y_i(\tau)d\tau; \qquad (17)$$

$$\ddot{x}_4(t_1)=b_2-d_3b_1+(d_3^2-d_1)b_0=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\int_0^{t_1}(v_{i2}(\tau)-d_3v_{i1}(\tau)+(d_3^2-d_1)v_{i0}(\tau))y_i(\tau)d\tau.$$

В силу системы (13) и формул (17) имеем выражения для компонент текущего состояния $(x_1(t_1),\ldots,x_4(t_1))'$:

$$x_1(t_1)=\frac{1}{d_3}\ddot{x}_4(t_1)+\dot{x}_4(t_1)=\frac{1}{d_3}\sum_{i=1}^{2}\int_0^{t_1}\left(v_{i2}-d_1v_{i0}\right)y_id\tau;$$

$$x_2(t_1)=\frac{1}{d_3}\dot{x}_4(t_1)+x_4(t_1)=\frac{1}{d_3}\sum_{i=1}^{2}\int_0^{t_1}v_{i1}(\tau)y_i(\tau)d\tau;$$

$$x_3(t_1)=\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}\left(1-\frac{T}{T_0}\right)y_2(\tau)d\tau+\frac{K}{t_1T_0}\int_0^{t_1}\tau u(\tau)d\tau;$$

$$x_4(t_1)=\sum_{i=1}^{2}\int_0^{t_1}v_{i0}(\tau)y_i(\tau)d\tau.$$

Отметим, что предложенная процедура идентификации текущего состояния не требует интегрирования уравнения (1) в отличие от других известных подходов [1, 3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красовский Н. Н.** Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

2. **Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.

3. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.

4. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.