Существующие в настоящее время модели определения дистанции между автомобилями не учитывают состояние дорожного покрытия. Уточнение упрощенных динамических моделей возможно в таких направлениях, как учет тенденции изменения тормозных качеств автомобилей, влияния разности скоростей, характера торможения, влияния неблагоприятных погодно-климатических факторов.

Пропускную способность участков дорог необходимо определять для наиболее трудного по условиям движения периода года и состояния дорожного покрытия принятого за расчетный в данной климатической зоне. Влияние состояния проезжей части дороги предлагается учитывать с помощью соответствующих для данного региона строительства коэффициентов снижения пропускной способности.

Определение пропускной способности необходимо не только для выявления опасных участков, требующих улучшения условий движения, но и для оценки экономичности и удобства движения всего транспортного потока, выбора эффективных средств организации движения. Необходимо учитывать региональные особенности Республики Беларусь на стадии проектирования и реконструкции автомобильных дорог.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев А. П., Фримштейн М. И.** Управление движением на автомобильных дорогах. – М.: Транспорт, 1979. – 296 с.

2. **Васильев А. П.** Состояние дорог и безопасность движения автомобилей в сложных погодных условиях. – М.: Транспорт, 1976. – 224 с.

УДК 624.071.3

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА С НАВИГАЦИЕЙ НАПРАВЛЕНИЯ ПОИСКА ВБЛИЗИ ГРАНИЦ

Асп. ВЕРБИЦКАЯ О. Л.

Белорусский национальный технический университет

Существующие методы расчета и оптимизации плит перекрытий и покрытий различных сооружений во многих случаях не позволяют учесть их конструктивные особенности. В статье излагаются разработанные автором алгоритм оптимизации, созданная на его основе компьютерная программа вычислений и анализируются результаты численных исследований для плит кусочно-постоянного сечения. Рассматривается задача оптимизации прямоугольной шарнирно опертой по контуру изотропной пластинки, подвергнутой поперечному изгибу. Материал деформируется по закону Гука, пластинка считается тонкой, поэтому наряду с обычными допущениями линейной теории упругости принимается допущение Кирхгофа – Лява о нормали к срединной плоскости.

Эффективность методики оптимизации, как известно, существенно зависит от реализуемых в ней методов расчета конструкций, способов выбора направления движения поисковой точки и определения длины шага. Вначале рассмотрим особенности статического расчета пластинки методом конечных элементов. Расчетная модель пластинки представлена в виде совокупности прямоугольных конечных элементов (КЭ) (рис. 1).

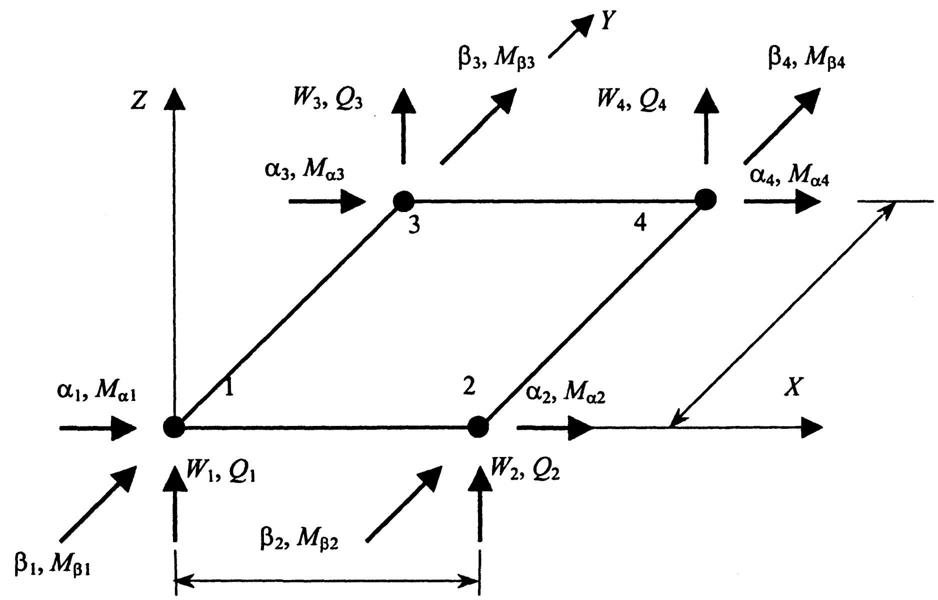

Рис. 1. Схема прямоугольного несовместного конечного элемента и перемещений его узлов

Каждый узел имеет три степени свободы. За основные неизвестные принимаются: W – вертикальное перемещение (прогиб), положительное направление, которого совпадает с направлением оси OZ; θ_x – угол поворота относительно оси X, положительное направление которого противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца оси; θ_y – угол поворота относительно оси Y, положительное направление которого противоположно направлению вращения часовой стрелки, если смотреть с конца оси. Этот тип конечного элемента, как было установлено [1], хотя и неконформный, дает результаты, которые сходятся к точному решению, а в виду своей простоты имеет большое практическое применение.

Покажем особенности формирования матрицы жесткости КЭ. Для связи перемещений внутренних точек КЭ и его узлов принята аппроксимирующая функция в виде полинома [2]

$$W_h(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \\ + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3. \quad (1)$$

Известно, что для конвергенции решения, полученного на моделях и построенных из неконформных конечных элементов, нет доказательства. Однако есть сведения о том, что в определенных случаях эти элементы оказываются лучшими с практической точки зрения, так как обеспечивают высокую точность численного решения на моделях, содержащих небольшое число конечных элементов. В связи с этим коэффициенты неполного полинома (1) определялись пробными расчетами с оценкой конвергенции решения [2].

Матрица жесткости конечного элемента находилась по формуле

$$K = B^T DB, \quad (2)$$

где D – матрица физических коэффициентов; B – матрица, связывающая перемещения узлов элемента и его деформацию (кривизну);

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \chi_x & 0 & 0 \\ 0 & \chi_y & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{xy} \end{bmatrix};$$

$\chi_x = W,_x$; $\chi_y = W,_y$; $\chi_{xy} = W,_{xy}$ – кривизны соответственно от изгиба вдоль осей X, Y и скручивания конечного элемента; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала; h – толщина конечного элемента.

Для подтверждения конвергенции решения по разработанной автором программе Cross выполнен расчет квадратной шарнирно опертой по контуру пластинки со стороной 6 м, модулем упругости E = 20 ГПа, коэффициентом Пуассона ν = 0,30, загруженной поперечной равномерно распределенной нагрузкой p = 36 кН/м^2. Получено решение для конечно-элементной сетки разной сгущенности (табл. 1).

Таблица 1

Сетка КЭ	Прогибы в центре, W_{max}, мм	Изгибающие моменты, $M_{x\,max}$, кНм	Сетка КЭ	Прогибы в центре, W_{max}, мм	Изгибающие моменты, $M_{x\,max}$, кНм
2×2	11,72	–	11×11	–	61,301
3×3	–	52,064	12×12	12,893	–
4×4	12,548	–	13×13	–	61,495
5×5	–	58,463	14×14	12,896	–
6×6	12,768	–	15×15	–	61,588
7×7	–	60,216	16×16	12,900	–
8×8	12,842	–	17×17	–	61,617
9×9	–	60,941	18×18	12,890	–
10×10	12,875	–	19×19	–	61,593

В соответствии с точным решением [3] значения прогиба и изгибающего момента в центре пластинки равны:

$$W_{max} = C_5 \frac{pa^4}{D_0} = 0{,}00406 \frac{36 \cdot 10^3 \cdot 6^4}{0{,}01465 \cdot 10^9} = 12{,}93 \text{ мм};$$

$$M_{x\max} = C_6 pa^2 = 0{,}0479 \cdot 36 \cdot 10^3 \cdot 6^2 =$$
$$= 62{,}078 \text{ кНм},$$

где C_5 = 0,00406 и C_6 = 0,0479 – коэффициенты табулированного решения [3]; D_0 – цилиндрическая жесткость пластинки,

$$D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{20 \cdot 10^9 \cdot 0{,}2^3}{12(1-0{,}3^2)} = 0{,}01465 \cdot 10^9 \text{ Нм}.$$

Получено решение и для прямоугольной пластинки с отношением сторон, равным трем, на сетке конечных элементов 27×9. Сравнение величин максимального прогиба пластинки W_{max} = 18,332 мм и изгибающего момента $M_{x\,max}$ = 36,030 кНм, полученных по программе Cross, с точным решением (W_{max} = 18,78 мм; M_{max} = 36,54 кНм) показывает их практическое совпадение. Погрешность при определении прогибов не превышает 2,5 %, а для изгибающих моментов – 1,4 %.

Прогиб и изгибающий момент в центре квадратной пластинки, полученные методом конечных элементов (табл. 1), оказались еще ближе по своим значениям к точному решению. Вычислительная погрешность не превышала 0,75 %. При этом очевидна устойчивая конвергенция численного решения – при сгущении сетки решение стабильно стремится к точному.

Постановка задачи оптимизации. Предположим, что пластинка имеет кусочно-постоянные поперечные сечения. Разобьем ее на такие участки, каждый из которых имеет постоянную толщину. Пусть число таких участков равно n. В качестве целевой функции примем объем пластинки V. Требуется минимизировать функцию $V(\vec{X})$, где $\vec{X} \in R_n$ – вектор (точка) n-мерного пространства R_n, компонентами которого являются толщины отдельных участков пластинки:

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T. \quad (3)$$

Тогда функция $V(\vec{X})$ представлена в виде линейной функции параметров оптимизации и может быть записана в виде

$$V(\vec{X}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad (4)$$

где a_i – постоянные коэффициенты, устанавливаемые из геометрических соображений, $a_i > 0$; x_i – толщина пластинки в различных ее частях.

Введем ограничение на параметры оптимизации снизу:

$$x_i = x_{0i}; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (5)$$

Ограничения, выражающие условие прочности, запишем в форме:

$$R_u - \sigma_{et} = 0; \quad t = 1, 2, \ldots, m, \quad (6)$$

где R_u – расчетное сопротивление материала пластинки; σ_{et} – максимальное эквивалентное напряжение в пластинке; m – число ограничений.

Целевая функция $V(\vec{X})$ представляет гиперплоскость в n + 1-мерном пространстве, построенном на параметрах вектора $\vec{X}$ и V. Условия (6) не могут быть выражены в явном виде через параметры оптимизации $\vec{X}$, так как расчет пластинки выполняется численным методом. В связи с этим наиболее приемлемым методом оптимизации для решения такой задачи является метод градиентного спуска. Градиент целевой функции $V(\vec{X})$ во всех точках пространства R_n одинаков и может быть найден аналитически. При реализации итерационных численных процедур поиск очередной точки $\vec{X}$ пространства R_n, отстоящей от предыдущей на расстоянии s, в процессе оптимизации можно выполнить по следующей зависимости:

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{a_i s}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}}; \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{7}$$

где s – шаг перемещения точки в процессе поиска решения в пространстве R_n; a_i и s не зависят от положения точки $\{x_i\}$ в пространстве R_n.

Задача поиска направления движения точки к оптимуму усложняется вблизи границ, описанных ограничениями вида (5) и (6). Учитывая, что статический расчет пластинки связан с большим объемом вычислений, поиск оптимального решения на каждом шаге приближений должен осуществляться при как можно меньшем количестве обращений к подпрограмме статического расчета пластинки.

Пусть вблизи границы, описываемой условием (6), расположена точка N с координатами x_{1N}, x_{2N}, ..., x_{nN}. Левую часть уравнения (6) можно рассматривать как некоторую функцию $\varepsilon(\vec{X})$, неявно выраженную через параметры оптимизации x_1, x_2, ..., x_n. Учитывая, что размеры окрестности точки N малы, функцию $\varepsilon(\vec{X})$ можно представить как линейную. Приравняв ее к нулю, получим границы допустимой области параметров оптимизации

$$\varepsilon(\vec{X}) = b_0 + b_1 x_1 + ... + b_n x_n = 0 , \tag{8}$$

где n – количество параметров оптимизации.

Границы области допустимых решений в этом случае представляют собой гиперплоскости в пространстве R_n. Для определения коэффициентов b_0, b_1, ..., b_n вычислим значения $\varepsilon_j(\vec{X})$ в точках, расположенных на координатных осях пространства R_n и удаленных от точки N на расстоянии s, а также в самой точке N (рис. 2). Используя равенство (8) для перечисленных точек, получим систему, содержащую $n+1$ линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= b_0 + b_1 x_{10} + b_2 x_{20} + ... + b_n x_{n0}; \\
\varepsilon_1 &= b_0 + b_1 x_{11} + b_2 x_{21} + ... + b_n x_{n1}; \\
\varepsilon_2 &= b_0 + b_1 x_{12} + b_2 x_{22} + ... + b_n x_{n2}; \\
&... \; ... \; ... \; ... \; ... \\
\varepsilon_n &= b_0 + b_1 x_{1n} + b_2 x_{2n} + ... + b_n x_{nn}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь первый индекс обозначает номер параметра оптимизации, а второй – номер базовой точки в окрестности точки N. Решив (9), найдем значения коэффициентов b_i.

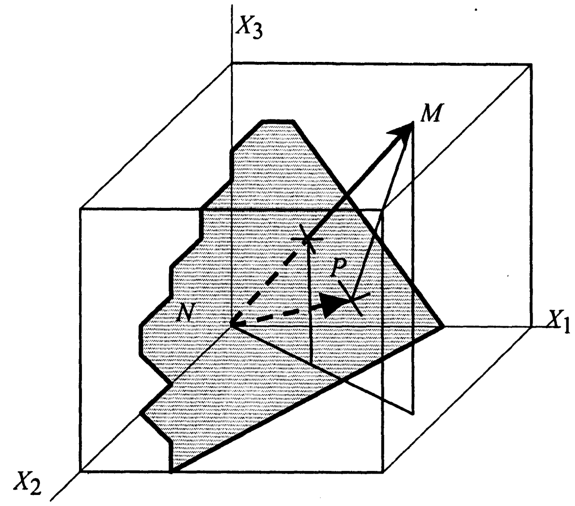

Рис. 2. Корректировка направления поиска оптимального решения вблизи границы

Для продолжения поиска оптимального решения вблизи границы (6) из точки N направим вектор в сторону антиградиента функции $V(\vec{X})$ и обозначим конец этого вектора буквой M. Координаты точки M определим из (7). Если условие (6) в точке M выполняется, то на данном шаге приближения в качестве промежуточного решения принимается вектор $\vec{X}_M$

$$\vec{X}_M = (x_{1M}, x_{2M}, ..., x_{nM})^T . \tag{10}$$

Если в точке M условие (6) не выполняется, то направление поиска оптимального решения необходимо скорректировать. Для этого определяются направляющие косинусы β_i гиперплоскости $\varepsilon(\vec{X}) = 0$:

$$\beta_i = \frac{b_i}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}; \quad g_0 = \frac{b_0}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}. \quad (11)$$

Уравнение нормали, опущенной из точки M на плоскость $\varepsilon(\vec{X}) = 0$, имеет вид

$$\frac{x_i - x_{i,M}}{\beta_i} = \frac{x_{i+1} + x_{i+1,M}}{\beta_{i+1}}; \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \quad (12)$$

Координаты точки пересечения гиперплоскости $\varepsilon(\vec{X}) = 0$ и нормали к ней определяются в результате решения уравнений:

$$A_\beta \vec{X}_p = G, \qquad (13)$$

где

$$G = \left(\frac{x_{1M}}{\beta_1} - \frac{x_{2M}}{\beta_2}, \frac{x_{2M}}{\beta_2} - \frac{x_{3M}}{\beta_3}, \ldots, \frac{x_{n-1M}}{\beta_{n-1}} - \frac{x_{nM}}{\beta_n} \right);$$

$$\vec{X}_p = \left(x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{np} \right)^T;$$

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1} & -\frac{1}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2} & -\frac{1}{\beta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta_3} & -\frac{1}{\beta_4} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Представим ограничение (5) в виде:

$$\varphi = x_j - x_{0j} = 0; \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (14)$$

Граница области допустимых решений, как следует из (14), представляет собой гиперплоскость, нормаль к которой совпадает с соответствующей осью координат X_j. Поэтому определение координат проекции точки M на эту границу упрощается

$$x_{jC} = \begin{cases} x_{iM} & \text{при } i \neq j; \\ x_{0i} & \text{при } i = j. \end{cases} \qquad (15)$$

Общее количество ограничений параметров оптимизации $\{x_i\}$ равно $n + m$. На каждом шаге поиска оптимального решения, если хотя бы одна из границ пересечена, строится план, включающий прогнозируемую точку M и все ее проекции на границах $\varepsilon_t(\vec{X}) = 0$, $t = 1, 2, \ldots, m$; $\varphi_j(\vec{X}) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Затем устанавливается такая точка плана, в которой одновременно выполняются условия (5), (6) и целевая функция $V(\vec{X})$ имеет наименьшее значение. Эта точка и принимается в качестве решения на данном шаге приближения. Из плана проекций (рис. 3) следует, что требуемое количество обращений к статическому расчету пластинки на каждом шаге приближения равно $n + m + 1$.

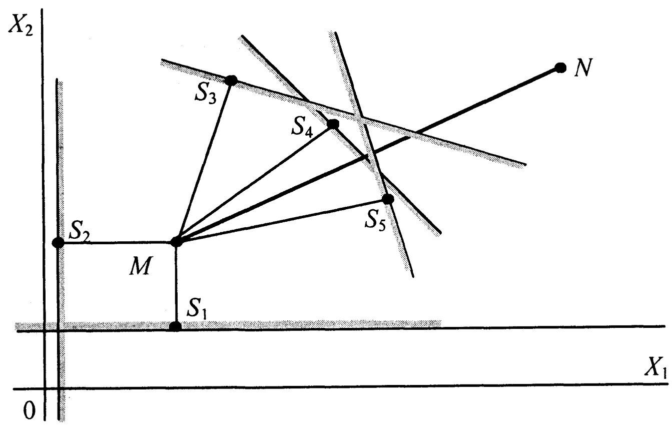

Рис. 3. Схема построения плана проекций на границы допустимой области параметров оптимизации

Изложенный выше алгоритм оптимизации прямоугольных пластинок кусочно-постоянного сечения реализован в программе Cross, составленной на объектно-ориентированном языке Delphi-Pascal.

Для иллюстрации процесса поиска оптимального решения методом градиентного спуска с навигацией направления вблизи границ выполнен расчет квадратной пластинки 6×6 м, разделенной на две части: центральную 3×3 м с толщиной x_1 и расположенную по краю пластинки с толщиной x_2. Были приняты следующие данные: E = 20 ГПа; ν = 0,30; линейные ограничения: $x_1 < h_{min}$ = 0,10 м и $x_2 < h_{min}$ = 0,10 м; ограничения прогибов – $W_{max} < W_{adm}$ = 5 мм; ограничение по прочности – σ_{max} < 5,4 МПа; количество шагов 50; шаг продвижения 2 см. Поиск оптимального решения осуществлялся из двух стартовых точек: 1 – x_1 = 0,7 м; x_2 = 0,5 м, 2 – 0,4 м; 0,6 м. Результаты расчета (рис. 4) показывают, что в обоих случаях получается одно и то же оптимальное решение x_1 = 0,38 м; x_2 = 0,29 м. При этом объем пластинки равен V_{opt} = 11,44 м^3.

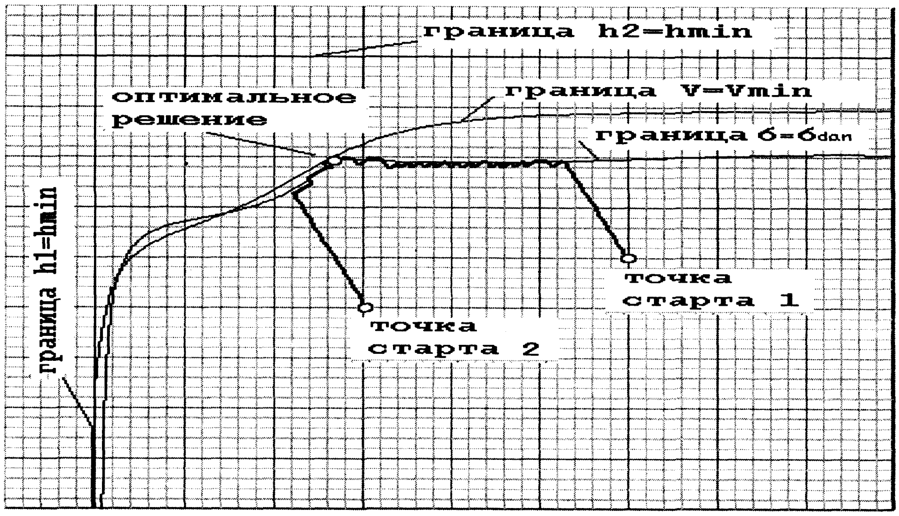

Рис. 4. Схема процесса поиска оптимального решения

Также выполнен расчет квадратной шарнирно опертой по контуру пластинки 6×6 м, разделенной на четыре части, каждая из которых отличается толщиной (рис. 5). Пластина нагружена распределенной нагрузкой $p = 36$ кН/м^2. Модуль упругости и коэффициент Пуассона были приняты соответственно равными E = = 20 ГПа; ν = 0,30. Решение получено на конечно-элементной модели, построенной из 64 элементов (8×8).

Координаты начальной точки для всех участков пластины были приняты равными 0,6 м. В процессе поиска оптимального решения сделано 240 шагов. В результате найдена оптимальная форма пластинки с объемом V_{opt} = = 10,5 м^3 и толщинами: h_1 = 0,212 м; h_2 = = 0,331 м; h_3 = 0,375 м; h_4 = 0,405 м (рис. 5).

Таким образом, алгоритм и разработанная на его основе компьютерная программа позволяют организовать устойчивый вычислительный процесс поиска оптимальных прямоугольных пластин кусочно-постоянного сечения, имеющих шарнирное опирание по контуру.

Предлагаемый алгоритм оптимизации прямоугольных пластинок методом градиентного спуска с навигацией направления поиска вблизи границы по плану проекций решения на границы рекомендуется для разработки прикладных программ расчета строительных конструкций – плит перекрытий и покрытий зданий и сооружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Adini A., Clough P. W.** Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method. Rept. to Narl., Sci. Found. USA., 1961.

2. Метод конечных элементов и проектирование транспортных сооружений / А. С. Городецкий, В. И. Заворицкий, А. И. Лантух-Лященко, А. О. Рассказов – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.

3. **Биргер И. А., Пановко Я. Г.** Прочность, устойчивость, колебания: Справ: В 3 т. – М.: Машиностроение, 1968. – Т.1. – 832 с.

4. **Секулович М.** Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 662 с.

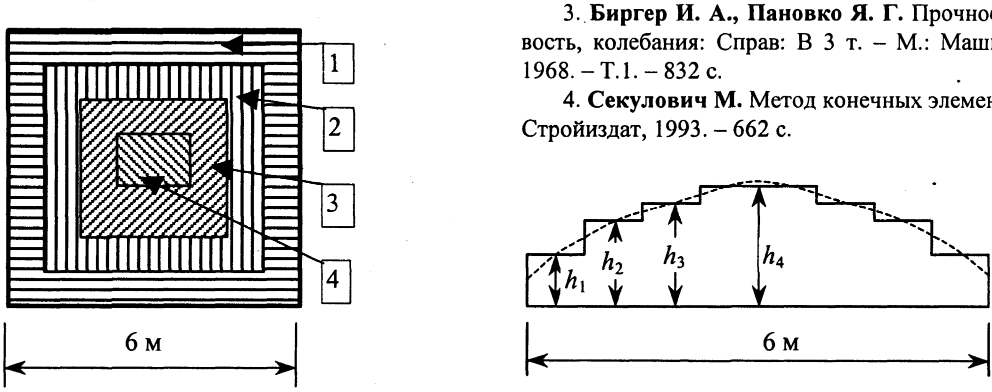

Рис. 5. Схема деления квадратной пластинки на четыре части