

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ В КООРДИНАТАХ УГЛОВ ПРОФИЛЯ ПРИ ВЕРШИНЕ ЗУБЬЕВ

Асп. МАРЧУК А. С.

Институт механики и надежности машин НАН Беларуси

При проектировании зубчатых передач в обобщающих параметрах [1...4] синтез эвольвентного зацепления может быть осуществлен в более широком диапазоне вариантов, чем при проектировании по стандартизированной методике. При наиболее общем методе проектирования и несомненных достоинствах, касающихся заложенных в эвольвентную геометрию зуба резервов, его основной недостаток – нестандартность, требующая дополнительных затрат на изготовление инструмента для производства и контроля передачи. Метод применяется в случаях, когда при помощи стандартного инструмента невозможно изготовить зубчатое зацепление с требуемыми качествами, и, кроме того, дополнительные затраты на расчет и изготовление окупаются значительным улучшением эксплуатационных характеристик передачи. Отметим также, что применение обобщенных параметров целесообразно только в случае использования компьютерной техники, так как лишь в этом случае практически возможно получение оптимальных результатов.

В указанных выше работах для построения блокирующего контура используются обобщающие параметры $\vartheta_{1,2}$ (углы давления в точке на окружности заострения зубцов, тождественно равные углам профиля в той же точке). Анализ блокирующего контура в координатах $\vartheta_{1,2}$ подробно описан в [3]. Такая система построения не является единственно возможной при проектировании в обобщающих параметрах и не всегда удобна при расчетах. В настоящей статье автор предлагает методику построения и анализа области существования (блокирующего контура) эвольвентной зубчатой передачи внешнего зацепления, основанную на принципах метода обобщающих параметров. Ниже приводится методика построения и анализа об-

ласти существования в координатах обобщающих параметров $\alpha_{a1,2}$ (углов профиля при вершине зубьев), которая является, по мнению автора, более удобным аналогом по отношению к координатам $\vartheta_{1,2}$.

Установим характер связи параметров $\vartheta_{1,2}$ и $\alpha_{a1,2}$, используя уравнение [3]:

$$\vartheta_{1,2} = \operatorname{arcsinv}(m_{a1,2} \cos \alpha_{a1,2} + \operatorname{inv} \alpha_{a1,2}), \quad (1)$$

где m_a – параметр, характеризующий толщину зуба на окружности вершин; $\operatorname{arcsinv}()$ – функция, обратная инволютной функции:

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha. \quad (2)$$

Производная обратной функции $\operatorname{arcsinv}()$ вычислится по правилу

$$y' = (\operatorname{arcsinv}(x))' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 (\operatorname{arcsinv}(x))}. \quad (3)$$

Возьмем частную производную функции (1) по α_a

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_a} = \frac{-m_a \sin \alpha_a + \operatorname{tg}^2 \alpha_a}{\operatorname{tg}^2 (\operatorname{arcsinv}(m_a \cos \alpha_a + \operatorname{inv} \alpha_a))}. \quad (4)$$

Экстремум функции $\vartheta(\alpha_a)$ имеет место, если:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_a} = 0 \Leftrightarrow m_a \sin^2 \alpha_a + \sin \alpha_a + m_a = 0. \quad (5)$$

Решив уравнение (5), получим, что функция (1) в интересующем нас интервале ($0 < \alpha_a < \pi/2$) имеет экстремум (минимум) в точке, где

$$\alpha_{a \text{ экстр}} = \arcsin \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4m_a^2}}{2m_a} \right). \quad (6)$$

Известно, что параметр m_a в реальных передачах не превышает значение $m_a = 0,17$, при котором $\alpha_{a \text{ экстр}} = 9,5^\circ$ – невозможная для α_a max величина. Подставив в (4) любые значения: $0 < m_a < 0,17$ и $9,5^\circ < \alpha_a < \pi/2$, получим, что $\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha_a} > 0$. Поэтому для практических расчетов в

диапазоне $9,5^\circ < \alpha_a < \pi/2$ можно принять, что функция (1) является монотонно возрастающей.

Из проведенного анализа следует, что значение $\vartheta_{1,2\text{max}}$ на любой изолинии в координатах $\vartheta_{1,2}$ соответствует значению $\alpha_{a1,2\text{max}}$ в координатах $\alpha_{a1,2}$ для той же изолинии. Взаимооднозначное соответствие точек пересечения изолиний и, кроме того, точек, где $\alpha_w = \alpha_{w \text{ max}}$ в координатах $\vartheta_{1,2}$ и $\alpha_{a1,2}$, очевидно (уравнения изолиний). Таким образом, показано, что формулы [3] для этих точек блокирующего контура в координатах $\vartheta_{1,2}$ определяют те же значения того же контура в координатах $\alpha_{a1,2}$. Не ограничиваясь полученным результатом, покажем способ определения этих и других характерных точек без использования параметров $\vartheta_{1,2}$, применяя параметры $\alpha_{a1,2}$.

Определим на изолинии коэффициента перекрытия $\varepsilon = \text{const}$ точку с максимальным значением угла зацепления α_w . Задача сводится к поиску экстремума функции $\alpha_w = f(\alpha_{a1})$ по этой изолинии, неявно заданной системой уравнений:

$$F_1 = m_{a1} \cos \alpha_{a1} + \text{inv} \alpha_{a1} + u(m_{a2} \cos \alpha_{a2} + \text{inv} \alpha_{a2}) - \pi/z_1 - (1+u) \text{inv} \alpha_w = 0; \quad (7)$$

$$F_2 = \text{tg} \alpha_{a1} + u \text{tg} \alpha_{a2} - (1+u) \text{tg} \alpha_w - \frac{2\pi\varepsilon}{z_1} = 0. \quad (8)$$

Требуется определить условие равенства

$$\left(\frac{d\alpha_w}{d\alpha_{a1}} \right)_{\varepsilon=\text{const}} = 0. \quad (9)$$

Запишем уравнения полных дифференциалов функций F_1, F_2 :

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a1}} d\alpha_{a1} + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a2}} d\alpha_{a2} + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_w} d\alpha_w = 0; \quad (10)$$

$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a1}} d\alpha_{a1} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a2}} d\alpha_{a2} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_w} d\alpha_w = 0. \quad (11)$$

Перепишем систему (10), (11) в другом виде и в дальнейшем будем пользоваться ею:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_w} \frac{d\alpha_w}{d\alpha_{a1}} + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a2}} \frac{d\alpha_{a2}}{d\alpha_{a1}} = -\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a1}}; \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_w} \frac{d\alpha_w}{d\alpha_{a1}} + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a2}} \frac{d\alpha_{a2}}{d\alpha_{a1}} = -\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a1}}. \end{cases} \quad (12)$$

Применяя способ Крамера, определим выражение

$$\left(\frac{d\alpha_w}{d\alpha_{a1}} \right)_{\varepsilon=\text{const}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad (13)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_w} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a2}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_w} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a2}} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a1}} & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a2}} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a1}} & \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a2}} \end{vmatrix}.$$

Из (13) имеем

$$\Delta_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a1}} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a2}} + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a2}} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a1}} = 0. \quad (14)$$

Определим частные производные от функций F_1, F_2 по $\alpha_{a1,2}$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a1}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_{a1}}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a2}} = \frac{u}{\cos^2 \alpha_{a2}}; \quad (16)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a1}} = \text{tg}^2 \alpha_{a1} - m_{a1} \sin \alpha_{a1}; \quad (17)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a2}} = u(\text{tg}^2 \alpha_{a2} - m_{a2} \sin \alpha_{a2}). \quad (18)$$

Подставляя (15)–(18) в (14), после простых преобразований получим условие максимума функции α_w при $\varepsilon = \text{const}$

$$\cos^2 \alpha_{a1} (1 + m_{a1} \sin \alpha_{a1}) = \cos^2 \alpha_{a2} (1 + m_{a2} \sin \alpha_{a2}). \quad (19)$$

Из системы (12) получим выражение, характеризующее максимальное значение α_{a2} :

$$\left(\frac{d\alpha_{a2}}{d\alpha_{a1}} \right)_{\varepsilon=\text{const}} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_w} & -\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_w} & -\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a1}} \end{vmatrix}.$$

Из (20) имеем

$$\Delta_2 = -\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_w} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a1}} + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a1}} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_w} = 0. \quad (21)$$

Определим частные производные от функций F_1, F_2 по α_w :

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_w} = -\frac{(u+1)}{\cos^2 \alpha_w}; \quad (22)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_w} = -(1+u) \operatorname{tg}^2 \alpha_w. \quad (23)$$

Тогда выражение (21) преобразуется к виду:

$$\cos^2 \alpha_w = \cos^2 \alpha_{a1} (1 + m_{a1} \sin \alpha_{a1})$$

либо

$$\operatorname{tg} \alpha_w = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha_{a1} (1 + m_{a1} \sin \alpha_{a1})} - 1}. \quad (24)$$

Из системы (12) можно так же определить выражение, характеризующее максимальное значение α_{a1} , при условии, что

$$\left(\frac{d\alpha_{a1}}{d\alpha_{a2}} \right)_{\varepsilon=\text{const}} = \frac{1}{\frac{d\alpha_{a2}}{d\alpha_{a1}}} = \frac{\Delta}{\Delta_2} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, условие максимума α_{a1}

$$\Delta = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_w} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_{a2}} - \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_{a2}} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_w} = 0. \quad (26)$$

Подставив значения частных производных и произведя преобразование, получим:

$$\cos^2 \alpha_w = \cos^2 \alpha_{a2} (1 + m_{a2} \sin \alpha_{a2}),$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha_w = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha_{a2} (1 + m_{a2} \sin \alpha_{a2})} - 1}. \quad (27)$$

Числовые значения координат точки, где $\alpha_w = \alpha_{w\max}$ (точка Q на изолинии $\varepsilon = \text{const}$), получаем при решении численными методами

системы уравнений (7), (8), (19); значение координат для точки $\alpha_{a2} = \alpha_{a2\max}$ (точка E) – решением (7), (8), (24); значение координат для точки $\alpha_{a1} = \alpha_{a1\max}$ (точка F) – (7), (8), (27).

Определяем координаты точки B (пересечения изолиний углов профиля начала интерференций $\alpha_{p1} = 0$ и $\alpha_{p2} = 0$) с помощью совместного решения уравнения (7) и уравнений:

$$\operatorname{tg} \alpha_{p2} = \frac{1}{u} ((1+u) \operatorname{tg} \alpha_w - \operatorname{tg} \alpha_{a1}); \quad (28)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{p1} = (1+u) \operatorname{tg} \alpha_w - u \operatorname{tg} \alpha_{a2}, \quad (29)$$

где $\alpha_{p1,2}$ – углы профиля входа эвольвенты в зацепление.

Координата α_{a1} точки B определится посредством решения уравнения

$$\begin{aligned} m_{a1} \cos \alpha_{a1} - \alpha_{a1} + u \left(m_{a2} \cos \left(\arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_{a1}}{u} \right) \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{inv} \left(\arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_{a1}}{u} \right) \right) \right) - \frac{\pi}{z_1} + \\ \left. + (1+u) \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_{a1}}{1+u} \right) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Координату α_{a1} точки C (пересечения изолиний $\alpha_{p2} = 0$ и $\varepsilon = \text{const}$) определяем, решая совместно (7), (8), (28):

$$\begin{aligned} m_{a1} \cos \alpha_{a1} - \alpha_{a1} + u \left(m_{a2} \cos \left(\arctg \left(\frac{2\pi\varepsilon}{z_2} \right) \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{inv} \left(\arctg \left(\frac{2\pi\varepsilon}{z_2} \right) \right) \right) - \frac{\pi}{z_1} + \\ \left. + (1+u) \arctg \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_{a1}}{1+u} \right) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Координату α_{a2} точки D (пересечения изолиний $\alpha_{p1} = 0$ и $\varepsilon = \text{const}$) определяем, решая совместно (7), (8), (29):

$$\begin{aligned} m_{a1} \cos \left(\arctg \left(\frac{2\pi\varepsilon}{z_1} \right) \right) + \operatorname{inv} \left(\arctg \left(\frac{2\pi\varepsilon}{z_1} \right) \right) + \\ + u(m_{a2} \cos \alpha_{a2} - \alpha_{a2}) - \\ - \frac{\pi}{z_1} + (1+u) \arctg \left(\frac{u \operatorname{tg} \alpha_{a2}}{1+u} \right) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

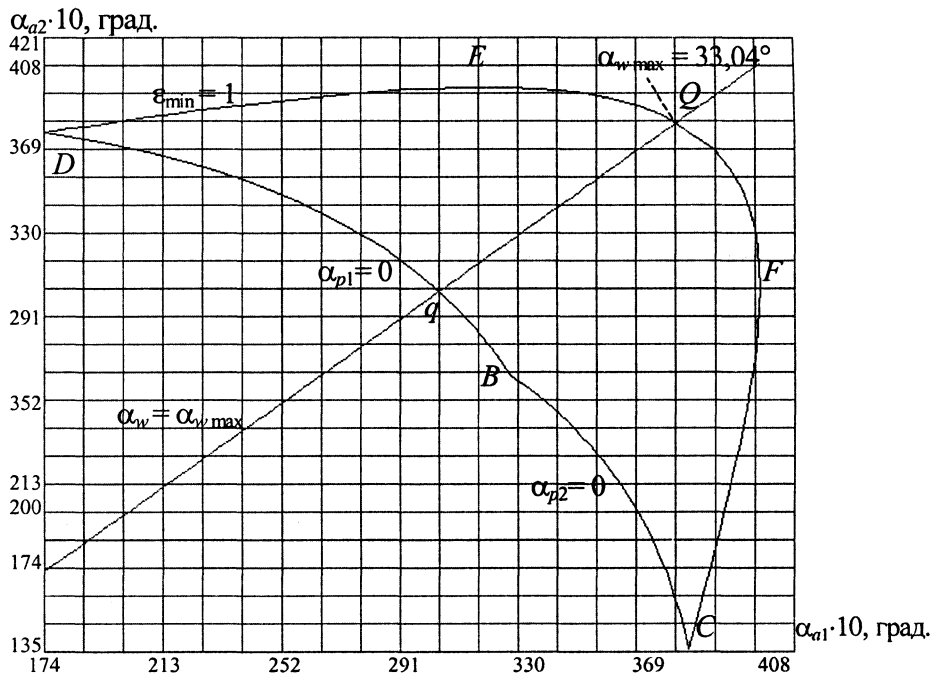


Рис. 1. Область существования передачи с изолинией максимального угла зацепления ($q - Q$):
 $z_1 = 20$; $z_2 = 26$; $m_{a1} = 0,032$; $m_{a2} = 0,025$

При одновременном анализе нескольких блокирующих контуров в координатах $\alpha_{a1,2}$ следует учитывать такую особенность, как изменение положения изолинии $\alpha_w = \text{const}$ при изменении параметров $m_{a1,2}$ (стягивание области $\alpha_w < \alpha_{w \text{ const}}$ при увеличении $m_{a1,2}$ к точке начала координат), в отличие от координатной системы $\vartheta_{1,2}$, в которой оно остается постоянным для любых $m_{a1,2}$.

Пример области существования, а также изолинии $\alpha_{w \text{ max}}(q - Q)$ для эвольвентной зубчатой передачи внешнего зацепления, построенный с помощью компьютерной программы по представленной методике, показан на рис. 1.

Решения, приведенные в настоящей статье, в преобразованном виде (без параметра ϑ) аналогичны решениям [3]. Предлагаемая методика строит и анализирует блокирующий контур в координатах $\alpha_{a1,2}$ без решения дополнительных трансцендентных уравнений перевода параметров $\alpha_{a1,2}$ в $\vartheta_{1,2}$, которые в отличие от первых не используются непосредственно для дальнейшего проектирования инструмента. Параметры $\alpha_{a1,2}$ вместе с $z_{1,2}$ и $m_{a1,2}$ полностью характеризуют геометрию зацепления, не уступая параметрам $\vartheta_{1,2}$ в наглядности, более информативны, допускают быстрое определение важней-

ших качественных показателей по точкам изолиний, перестройку их в других координатах без продолжительных приближенных вычислений. Большим удобством, с точки зрения автора, является линейная зависимость между коэффициентами m_{a1} и m_{a2} в уравнениях изолиний ($m_{a2} = A - C m_{a1}$, где A и C – постоянные для некоторого решения уравнения изолинии α'_{a1} и α'_{a2}). Это позволяет для любой точки изолинии корректировать данные коэффициенты, не изменяя координат α'_{a1} , α'_{a2} , и значения некоторых других показателей. Параметры $\alpha_{a1,2}$ являются одновременно более удобными переменными для математического анализа возможностей передачи и оптимизации их на этапе проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулгаков Э. Б. Геометрия зубчатых передач в обобщающих параметрах // Вестник машиностроения. – 1969. – № 11. – С. 22–26.
2. Вулгаков Э. Б. Анализ обобщенной области существования зубчатого зацепления // Машиноведение. – 1970. – № 4. – С. 54–62.
3. Вулгаков Э. Б. Зубчатые передачи с улучшенными свойствами. – М.: Машиностроение, 1974. – 263 с.
4. Вулгаков Э. Б., Васина Л. М. Эвольвентные зубчатые передачи в обобщающих параметрах // Машиностроение: Справ. – М., 1978. – 194 с.