

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ В ЭВОЛЬВЕНТНОЙ ПЕРЕДАЧЕ

Асп. МАРЧУК А. С.

Институт механики и надежности машин НАН Беларуси

Проектирование зубчатых передач в обобщающих параметрах [1, 2] позволяет осуществлять синтез эвольвентного зацепления в более широком диапазоне вариантов, чем это возможно при проектировании по стандартной методике. Это также значительно упрощает процесс поиска оптимальных параметров передачи по одному или нескольким критериям.

Разработка предлагаемой методики вызвана потребностью в сравнительной оценке коэффициента полезного действия передач на стадии их проектирования и оптимизации с применением аппарата обобщающих параметров. Применение приближенных вычислений (например, [3, 4]) дает, как правило, завышенные значения потерь в таких передачах, неудобно для анализа и оптимизации. Использование в расчетах зубчатых передач существующих теорий трения, использующих многочисленные, трудно проверяемые гипотезы (например, [5, 6]), достаточно спорно и неоправданно увеличивает объем вычислительной работы, не добиваясь существенного уточнения результатов.

В предлагаемой статье при получении формул автор попытался максимально сократить количество принятых допущений, сохраняя в то же время разумную точность вычислений. Данная работа не ставит целью учитывать влияние многочисленных факторов на КПД передачи (частота вращения, прикладываемый момент, вязкость и температура масла, гидродинамические эффекты, линейные размеры зубчатых колес), а лишь исследует зависимость потерь на трение по эвольвентам, связанных непосредственно с основными обобщающими параметрами эвольвентного зацепления. В расчетах широко использованы обобщающие параметры как самые общие характеристики зубчатых колес. Полученные ниже зависимости применимы для эвольвентных прямозубых передач самого широкого диапазона параметров.

Допущения, принятые при расчетах: 1) трением качения пренебрегаем ввиду его малости; 2) коэффициент трения скольжения постоянен по всей длине эвольвент и не зависит от скорости скольжения и приведенного радиуса кривизны. Влияние последнего допущения на точность результата можно уменьшить, выбирая коэффициент трения скольжения в зависимости от скорости скольжения в некоторой средней точке между полюсом и крайними точками зацепления, используя данные работы [6].

Теоретическое значение КПД эвольвентного зацепления определяется по формуле

$$\eta = \frac{A_3 - A_{тр}}{A_3} = 1 - \psi, \quad (1)$$

где  $A_3$  – полная затраченная работа;  $A_{тр}$  – работа, затраченная на трение в зацеплении;  $\psi$  – коэффициент потерь.

Рассмотрим силы, действующие в передаче внешнего (рис. 1а) и внутреннего (рис. 1б) зацеплений. На рис. 1а показано положение точки контакта за полюсом передачи, на рис. 1б – до полюса, если смотреть со стороны шестерни.

Полагая, что вращающий момент передается одной парой зубьев, запишем условие равновесия для текущей точки контакта

$$M_1 = F_n r_{b1} (1 \mp f \operatorname{tg} \alpha_{x1}), \quad (2)$$

где  $M_1$  – момент на ведущем колесе;  $F_n$  – нормальная сила;  $r_{b1}$  – радиус основной окружности шестерни;  $f$  – коэффициент трения скольжения;  $\alpha_{x1}$  – текущий угол профиля эвольвенты шестерни в точке контакта. Знак «–» выбирается при  $\alpha_{x1} < \alpha_w$  (угол зацепления), знак «+» – при  $\alpha_{x1} > \alpha_w$ .

Элементарная работа сил трения в точке контакта [7] будет

$$dA_{тр} = F_n f |\lambda_1| ds_1, \quad (3)$$

где  $|\lambda_1|$  – значение коэффициента удельного скольжения по модулю;  $ds_1$  – дифференциал дуги эвольвенты шестерни. Значение  $\lambda_1$  можно выразить как функцию от  $\alpha_{x1}$

$$\lambda_1 = \left(1 \pm \frac{1}{U}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_w}{\operatorname{tg}\alpha_{x1}}\right), \quad (4)$$

где  $U$  – передаточное отношение. Знак «+» выбирается для наружного, знак «-» – для внутреннего зацепления. В дальнейшем пишем только знак «+».

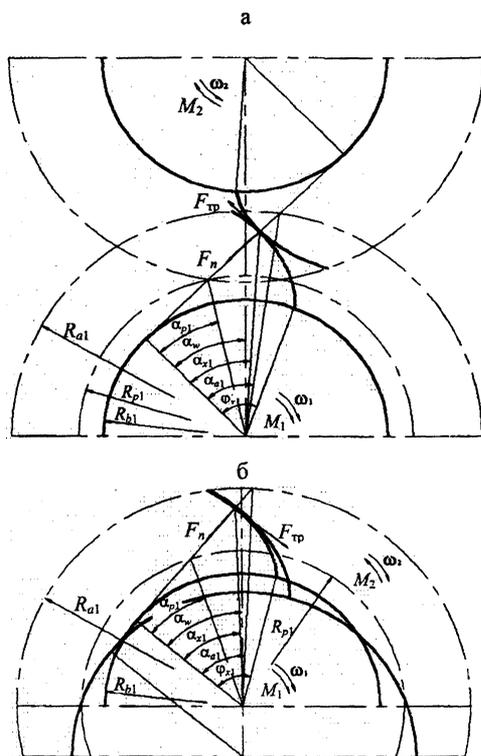


Рис. 1. Схемы сил в зацеплении

Дифференциал дуги эвольвенты шестерни  $ds_1$  определим из общеизвестного уравнения эвольвенты в полярных координатах:

$$\begin{cases} \rho = \frac{r_{b1}}{\cos\alpha_{x1}}; \\ \theta = \operatorname{tg}\alpha_{x1} - \alpha_{x1} = \operatorname{inv}\alpha_{x1}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\rho$  – радиус-вектор точки эвольвенты;  $\theta$  – полярный угол. Из (5) имеем:

$$\begin{cases} d\rho = \frac{r_{b1} \sin\alpha_{x1}}{\cos^2\alpha_{x1}} d\alpha_{x1}; \\ d\theta = \operatorname{tg}^2\alpha_{x1} d\alpha_{x1}, \end{cases} \quad (6)$$

далее

$$\begin{aligned} ds_1 &= \sqrt{(\rho d\theta)^2 + (d\rho)^2} = \\ &= r_{b1} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^4\alpha_{x1}}{\cos^2\alpha_{x1}} + \frac{\sin^2\alpha_{x1}}{\cos^4\alpha_{x1}}} d\alpha_{x1} = \frac{r_{b1} \operatorname{tg}\alpha_{x1}}{\cos^2\alpha_{x1}} d\alpha_{x1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя полученные выражения (4), (7) в (3) и принимая, что  $F_n = \operatorname{const}$  ( $M_1 = \operatorname{var}$ ), определим

$$A_{\text{тр}} = F_n f \left(1 + \frac{1}{U}\right) r_{b1} \int_{\alpha_{p1}}^{\alpha_{a1}} \left|1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_w}{\operatorname{tg}\alpha_{x1}}\right| \frac{\operatorname{tg}\alpha_{x1}}{\cos^2\alpha_{x1}} d\alpha_{x1}, \quad (8)$$

где  $\alpha_{p1}$ ,  $\alpha_{a1}$  – углы профиля для соответственно входа и выхода эвольвенты шестерни в зацепление.

Элементарная затраченная работа

$$dA_3 = M_1 d\varphi_{x1}, \quad (9)$$

где  $\varphi_{x1}$  – угол поворота шестерни относительно некоторого начального положения, который определяем по рис. 1:

$$\varphi_{x1} = \operatorname{tg}\alpha_{x1}, \quad (10)$$

откуда

$$d\varphi_{x1} = \frac{d\alpha_{x1}}{\cos^2\alpha_{x1}}. \quad (11)$$

Затраченную работу по всей длине эвольвенты найдем, подставляя выражения (2) и (11) в (9) и интегрируя:

$$A_3 = F_n r_{b1} \int_{\alpha_{p1}}^{\alpha_{a1}} (1 \mp f \operatorname{tg}\alpha_{x1}) \frac{1}{\cos^2\alpha_{x1}} d\alpha_{x1}. \quad (12)$$

Среднее значение коэффициента потерь

$$\Psi_{\text{cp}} = \frac{A_{\text{тр}}}{A_3} = \frac{f \left(1 + \frac{1}{U}\right) \int_{\alpha_{p1}}^{\alpha_{a1}} \left|1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_w}{\operatorname{tg}\alpha_{x1}}\right| \frac{\operatorname{tg}\alpha_{x1}}{\cos^2\alpha_{x1}} d\alpha_{x1}}{\int_{\alpha_{p1}}^{\alpha_{a1}} (1 \mp f \operatorname{tg}\alpha_{x1}) \frac{1}{\cos^2\alpha_{x1}} d\alpha_{x1}}. \quad (13)$$

Мгновенное значение коэффициента потерь

$$\Psi_{\text{мгн}} = \frac{dA_{\text{тп}}}{dA_3} = \frac{f\left(1 + \frac{1}{U}\right) \left| \text{tg}\alpha_{x1} - \text{tg}\alpha_w \right|}{1 \mp f \text{tg}\alpha_{x1}}. \quad (14)$$

Учитывая, что  $\lambda_1 < 0$ , если  $\alpha_{x1} < \alpha_w$  для случая, когда  $\alpha_{p1} < \alpha_w < \alpha_{a1}$  (наиболее распространенный случай стандартных зубчатых передач), избавимся от модуля и определим первообразные выражений (8) и (12):

$$\begin{aligned} A_{\text{тп}} &= F_n f \left(1 + \frac{1}{U}\right) r_{b1} \left( - \int_{\alpha_{p1}}^{\alpha_w} \left(1 - \frac{\text{tg}\alpha_w}{\text{tg}\alpha_{x1}}\right) \frac{\text{tg}\alpha_{x1}}{\cos^2 \alpha_{x1}} d\alpha_{x1} + \int_{\alpha_w}^{\alpha_{a1}} \left(1 - \frac{\text{tg}\alpha_w}{\text{tg}\alpha_{x1}}\right) \frac{\text{tg}\alpha_{x1}}{\cos^2 \alpha_{x1}} d\alpha_{x1} \right) = \\ &= F_n f \left(1 + \frac{1}{U}\right) r_{b1} \left( - \left[ \frac{\text{tg}^2 \alpha_w}{2} - \text{tg}^2 \alpha_w - \frac{\text{tg}^2 \alpha_{p1}}{2} + \text{tg}\alpha_w \text{tg}\alpha_{p1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\text{tg}^2 \alpha_{a1}}{2} - \text{tg}\alpha_w \text{tg}\alpha_{a1} - \frac{\text{tg}^2 \alpha_w}{2} + \text{tg}^2 \alpha_w \right] \right) = \\ &= F_n f \left(1 + \frac{1}{U}\right) r_{b1} \left( \text{tg}^2 \alpha_w + \frac{1}{2} (\text{tg}^2 \alpha_{a1} + \text{tg}^2 \alpha_{p1}) - \text{tg}\alpha_w (\text{tg}\alpha_{a1} + \text{tg}\alpha_{p1}) \right); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= F_n r_{b1} \left( \int_{\alpha_{p1}}^{\alpha_w} \frac{(1 - f \text{tg}\alpha_{x1})}{\cos^2 \alpha_{x1}} d\alpha_{x1} + \int_{\alpha_w}^{\alpha_{a1}} \frac{(1 + f \text{tg}\alpha_{x1})}{\cos^2 \alpha_{x1}} d\alpha_{x1} \right) = F_n r_{b1} \left( \left[ \text{tg}\alpha_w - \frac{f \text{tg}^2 \alpha_w}{2} - \text{tg}\alpha_{p1} + \frac{f \text{tg}^2 \alpha_{p1}}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \text{tg}\alpha_{a1} + \frac{f \text{tg}^2 \alpha_{a1}}{2} - \text{tg}\alpha_w - \frac{f \text{tg}^2 \alpha_w}{2} \right] \right) = \\ &= F_n r_{b1} \left( \text{tg}\alpha_{a1} - \text{tg}\alpha_{p1} + \frac{f}{2} (\text{tg}^2 \alpha_{a1} + \text{tg}^2 \alpha_{p1} - 2 \text{tg}^2 \alpha_w) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, для передач, в которых может быть принято, что усилие по линии зацепления передается одной парой зубьев (это зависит при заданном моменте от теоретического

коэффициента перекрытия, зазоров в зацеплении, жесткости зубьев), значение  $\Psi_{\text{ср}}$  за оборот шестерни может быть вычислено как

$$\Psi_{\text{ср}} = \frac{f\left(1 + \frac{1}{U}\right) \left( \text{tg}^2 \alpha_w + \frac{1}{2} (\text{tg}^2 \alpha_{a1} + \text{tg}^2 \alpha_{p1}) - \text{tg}\alpha_w (\text{tg}\alpha_{a1} + \text{tg}\alpha_{p1}) \right)}{\text{tg}\alpha_{a1} - \text{tg}\alpha_{p1} + \frac{f}{2} (\text{tg}^2 \alpha_{a1} + \text{tg}^2 \alpha_{p1} - 2 \text{tg}^2 \alpha_w)}. \quad (17)$$

Аналогично вычисляя для этого же случая для внеполусных передач ( $\alpha_w > \alpha_{p1}, \alpha_{a1}$ ), получим

Рассмотрим потери в передаче, если усилие передается несколькими парами зубьев. В этом случае требуется знание функции нормальной силы на зубе от положения точки контакта на линии зацепления. Удобно получить ее от параметра  $\alpha_{x1} \rightarrow F_n = F_n(\alpha_{x1})$  при  $M_1 = \text{const}$ . Зная эту функцию, среднее значение коэффициента потерь за полный оборот шестерни можно по-

$$\Psi_{\text{ср}} = \frac{f\left(1 + \frac{1}{U}\right) \left( \text{tg}\alpha_w (\text{tg}\alpha_{a1} - \text{tg}\alpha_{p1}) - \frac{1}{2} (\text{tg}^2 \alpha_{a1} - \text{tg}^2 \alpha_{p1}) \right)}{\text{tg}\alpha_{a1} - \text{tg}\alpha_{p1} - \frac{f}{2} (\text{tg}^2 \alpha_{a1} - \text{tg}^2 \alpha_{p1})}. \quad (18)$$

лучить, интегрируя (как правило, численными методами) выражение

$$\psi_{cp} = \frac{z_1 r_{bl} f \left(1 + \frac{1}{U}\right) \int_0^{\alpha_{a1}} \left| 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_w}{\operatorname{tg} \alpha_{x1}} \right| F_n(\alpha_{x1}) \frac{\operatorname{tg} \alpha_{x1}}{\cos^2 \alpha_{x1}} d\alpha_{x1}}{\alpha_{p1} M_1 2\pi}, \quad (19)$$

где  $z_1$  – количество зубьев шестерни.

Проанализируем полученные результаты. Формула (14) характеризует «работоспособность» произвольного, бесконечно малого участка эвольвенты, может быть использована для определения предельных параметров зацепления (ввиду того, что передача энергии при  $\psi_{мгн} = 1$  невозможна). Кроме того, она наряду с коэффициентом удельного скольжения может охарактеризовать износ и температурную напряженность точки эвольвенты. Эта формула отражает также отрицательное влияние низкого значения передаточного отношения на КПД передачи, особенно в повышающих передачах при  $U < 1$ .

$$\psi_{cp} = \frac{0,08 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\operatorname{tg}^2 20^\circ + \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 25^\circ + \operatorname{tg}^2 8,65^\circ) - \operatorname{tg} 20^\circ (\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 8,65^\circ)\right)}{\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{tg} 8,65^\circ + \frac{0,08}{2} (\operatorname{tg}^2 25^\circ + \operatorname{tg}^2 8,65^\circ - 2 \operatorname{tg}^2 20^\circ)} = 0,011.$$

Исследуем аналогично другие значения:

- $\alpha_w = 20^\circ; \alpha_{a1} = 32^\circ; \alpha_{p1} = 17,26^\circ \rightarrow \psi_{cp} = 0,013;$
- $\alpha_w = 20^\circ; \alpha_{a1} = 29^\circ; \alpha_{p1} = 13,5^\circ \rightarrow \psi_{cp} = 0,0097;$
- $\alpha_w = 35^\circ; \alpha_{a1} = 40^\circ; \alpha_{p1} = 27,7^\circ \rightarrow \psi_{cp} = 0,0095;$
- $\alpha_w = 45^\circ; \alpha_{a1} = 50^\circ; \alpha_{p1} = 41,27^\circ \rightarrow \psi_{cp} = 0,0096.$

Для внеполусных передач:

- $\alpha_w = 35^\circ; \alpha_{a1} = 32^\circ; \alpha_{p1} = 17,26^\circ \rightarrow \psi_{cp} = 0,029;$
- $\alpha_w = 35^\circ; \alpha_{a1} = 25^\circ; \alpha_{p1} = 8,65^\circ \rightarrow \psi_{cp} = 0,048.$

Для передачи с высоким коэффициентом перекрытия ( $\varepsilon = 2,05; z_1 = 47; z_2 = 50; \alpha_w = 21,5^\circ$ ; обобщающими параметрами  $\vartheta_1 = 29,80^\circ; \vartheta_2 = 29,27^\circ$ ; коэффициентами толщины при вершине зуба  $m_{a1} = 0,011; m_{a2} = 0,010$ ; межосевым расстоянием  $a_w = 146,25$  мм; шириной венца  $b_1 = b_2 = 26$  мм) автором получена функция распределения удельной нормальной силы (рис. 2) в зависимости от угла развернутости эвольвенты  $\operatorname{tg} \alpha_{x1}$ . На рис. 2 вариант а соответствует нагрузке при беззазорном зацеплении, вариант б – при средневероятных зазорах по 7-й степени точности (ГОСТ1643–81), в – по 8-й степени

Проведем несколько простых вычислений. Рассчитаем  $\psi_{cp}$  для условной передачи с  $z_1 = 20; U = 2$  и коэффициентом перекрытия  $\varepsilon = 1$  (гарантированное однопарное зацепление) для различных  $\alpha_w, \alpha_{p1}, \alpha_{a1}$ , заботясь при этом об отсутствии подрезания зубьев, но не учитывая возможного заострения их (так как исследуется только одна сторона зуба).

Пример. Принимая  $\alpha_w = 20^\circ$ , из условия не подрезания зуба колеса следует:

$$\alpha_{a1 \max} \leq \arctg((1 + U) \operatorname{tg} \alpha_w) \leq \arctg((1 + 2) \operatorname{tg} 20^\circ) = 47,52^\circ.$$

Принимаем  $\alpha_{a1} = 25^\circ$ , тогда

$$\alpha_{p1} = \arctg\left(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \frac{2\pi\varepsilon}{z_1}\right) = \arctg\left(\operatorname{tg} 25^\circ - \frac{2\pi \cdot 1}{20}\right) = 8,65^\circ.$$

Принимаем  $f = 0,08$  (несколько завышен), тогда средний коэффициент потерь равен

точности. Расчетный нагружающий момент  $M_1 = 540 \cdot 10^3$  Н·мм. Жесткость зуба определялась путем решения задачи теории упругости об усеченном клине.

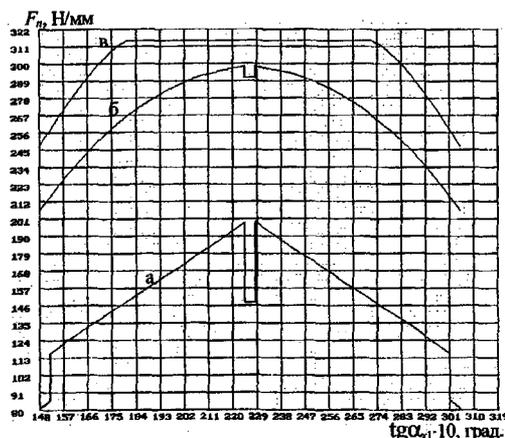


Рис. 2. Удельная сила на зубе  $F_n = F_n(\alpha_{x1})$ .

Для представленных на рис. 2 функций путем численного интегрирования выражения (19) при  $f = 0,06$  по формуле

$$\psi_{cp} = \frac{z_1 r_{b1} f \frac{1}{8} \left( \sum_{i=1}^{100} (F_{ni} + F_{ni+1}) (|\lambda_{-i}| + |\lambda_{-i+1}|) (\operatorname{tg}^2 \alpha_{xli+1} - \operatorname{tg}^2 \alpha_{xli}) \right)}{\frac{M_1}{b_1} 2\pi}, \quad (20)$$

где  $i$  – индекс суммирования, было получено: для варианта а  $\psi_{cp} = 0,0072$ ; для варианта б  $\psi_{cp} = 0,0121$ ; для варианта в  $\psi_{cp} = 0,0148$ . КПД по варианту а достаточно точно совпадает с экспериментальным для передачи с  $\varepsilon > 2$  [4]. Значения потерь при учете зазоров отражают их реальные величины для некоторого угла поворота шестерни  $\ll 2\pi$ , однако в среднем являются завышенными ввиду того, что при расчете усилий был принят вариант максимального нагружения зуба, который в реальной передаче встречается достаточно редко. Поэтому для анализа потерь в передачах с  $\varepsilon > 2$  ( $\varepsilon > 1$ ) целесообразно применять формулу (19) при расчете усилий для беззазорного зацепления.

#### ВЫВОД

Анализируя полученные результаты, можно прийти к выводу, что КПД передачи (связанный с потерями от трения на эвольвенте) в малой степени зависит от угла зацепления, а более определяется длиной и положением рабочего участка линии зацепления относительно

полюса. С этой точки зрения внеполюсные передачи уступают распространенным стандартным. Для передач с высоким коэффициентом перекрытия (и соответственно увеличенной длиной контактных линий) для снижения потерь в зацеплении следует стремиться (путем уменьшения жесткости и увеличения точности зубьев) к более равномерному распределению нагрузки между зубьями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вулгаков Э. Б. Зубчатые передачи с улучшенными свойствами. – М.: Машиностроение, 1974. – 263 с.
2. Вулгаков Э. Б., Васина Л. М. Эвольвентные зубчатые передачи в обобщающих параметрах: Справ. – М.: Машиностроение, 1978. – 194 с.
3. Кудрявцев В. Н. Зубчатые передачи. – Л.: Машгиз, 1957. – 262 с.
4. Повышение несущей способности механического привода / Под общ. ред. В. Н. Кудрявцева. – Л.: Машиностроение, 1973. – 222 с.
5. Решетов Д. Н. Работоспособность и надежность деталей машин. – М.: Высш. шк., 1974. – 206 с.
6. Решиков В. Ф. Трение и износ тяжело нагруженных передач. – М.: Машиностроение, 1975. – 232 с.
7. Кудрявцев В. Н. Детали машин. – Л.: Машиностроение, 1980. – 263 с.