

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ МНОГОПОЛЮСНЫХ СЕТЕЙ

Канд. физ.-мат. наук, доц. КОРЗНИКОВ А. Д.

Белорусский национальный технический университет

Среди задач оптимизации на графах (сетях) широко известна задача оптимального преобразования сети. Так, при поиске оптимального управления сложными динамическими системами, математическими моделями которых являются многополюсные сети, возникает задача оптимального синтеза сети с заданными параметрами ее функционирования. Например, при управлении процессом функционирования транспортной системы приходится учитывать множественность критериев эффективности, что приводит к необходимости решать комплекс проблем, связанных с анализом существующей сети маршрутов, минимизацией затрат по перемещению грузов (пассажиров), оптимальным распределением транспортных средств между маршрутами и т. п. Модели и алгоритмы решения ряда таких задач описаны в [1, 2]. Однако одной из особенностей, присущих логистическим системам, является их динамизм, в связи с чем часто возникает необходимость увеличения пропускной способности системы с минимальными затратами. Эта задача допускает несколько формулировок.

Как и в [1], рассмотрим сеть $G(V, U)$, где V – множество вершин, $|V| = r$; U – множество дуг. В сети выделены подмножества $S \subset V$ – вершины, в которых сосредоточен груз (источники), и $T \subset V$ – вершины, в которых сосредоточены пункты спроса (стоки). Известно, что стоимость увеличения пропускной способности дуги $(i, j) \in U$ на единицу равна c_{ij} , а ее пропускная способность – d_{ij} .

1. Пусть известна величина потока v_s , из каждого источника $s \in S$ и v_t – в каждый сток $t \in T$ сети $G(V, U)$. Для некоторого множества источников $S' \subset S$ и стоков $T' \subset T$ требуется увеличить выходящие и входящие потоки на величины $\Delta v_s, s \in S'$ и $\Delta v_t, t \in T'$ $\left(\sum_{s \in S'} \Delta v_s = \sum_{t \in T'} \Delta v_t \right)$ соот-

ветственно. Либо необходимо увеличить суммарный поток из источников множества S' в стоки множества T' на величину Δv . Каким образом следует синтезировать новую сеть, увеличив пропускные способности дуг с минимальными затратами, чтобы получить требуемые потоки?

2. Пусть известно, что суммарные затраты на преобразование сети ограничены некоторой величиной C . Как следует увеличить пропускные способности дуг, чтобы в синтезированной сети получить как можно большую величину потока из источников множества S' в стоки множества T' (или увеличить величину потока между некоторыми источниками и стоками на заданную величину, максимально увеличив поток из источников множества S' в стоки множества T'), чтобы суммарные затраты на преобразование сети не превысили величину C .

Для сетей с одним источником и стоком эти задачи решены [3, 4]. Здесь мы опишем сетевые модели для многополюсных сетей и алгоритмы решения этих задач, использующие идею модифицированных сетей и стоимостей [1].

Обозначим через y_{ij} приращение пропускной способности дуги $(i, j) \in U$, а x_{ij} – дуговой поток по этой дуге; $N(k)$ – множество вершин сети $G(V, U)$, соседних с вершиной $k \in V$.

Первая из сформулированных задач может быть записана следующим образом: минимизировать суммарные затраты $\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} y_{ij}$ на преобразование сети при условиях:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i \in N(k)} x_{ik} - \sum_{j \in N(k)} x_{kj} &= 0, \quad k \notin S \cup T; \\ \sum_{i \in N(s_l)} x_{is_l} - \sum_{j \in N(s_l)} x_{s_l j} &= -v_{s_l}, \quad s_l \in S \setminus S'; \\ \sum_{i \in N(t_l)} x_{it_l} - \sum_{j \in N(t_l)} x_{t_l j} &= v_{t_l}, \quad t_l \in T \setminus T', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i \in N(s_l)} x_{is_l} - \sum_{j \in N(s_l)} x_{sj} &= -v_{s_l} - \Delta v_{s_l}, s_l \in S'; \\ \sum_{i \in N(t_l)} x_{it_l} - \sum_{j \in N(t_l)} x_{tj} &= v_{t_l} + \Delta v_{t_l}, t_l \in T', \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij} + y_{ij}, (i, j) \in U. \quad (3)$$

Если необходимо увеличить суммарный поток из источников множества S' в стоки множества T' на величину Δv , то к условиям (2) добавятся ограничения:

$$\begin{aligned} \sum_{s_l \in S'} \Delta v_{s_l} &= \sum_{t_l \in T'} \Delta v_{t_l} = \Delta v, \\ \Delta v_{s_l} &\geq 0, s_l \in S'; \Delta v_{t_l} \geq 0, t_l \in T'. \end{aligned} \quad (4)$$

Вторая задача может быть записана в следующем виде: максимизировать суммарное приращение потока $\Delta v = \sum_{s_l \in S'} \Delta v_{s_l}$ при условии, что выполняются ограничения (1)...(4) и

$$\sum_{(i,j) \in U} c_{ij} y_{ij} \leq C. \quad (5)$$

Ниже приводятся алгоритмы решения сформулированных задач, которые существенно используют их сетевое представление, что позволяет значительно уменьшить объем обрабатываемой информации.

Как и в [1], для сети $G(V, U)$ построим модифицированную сеть $G(\bar{V}, \bar{U})$. Каждой вершине $l_p \in T \cap S, p = \overline{1, k}$ поставим в соответствие две вершины s_p и t_p , соединив их ориентированной дугой $(t_p, s_p), p = \overline{1, k}$, полагая: $\bar{S} = \{s_1, \dots, s_k, \dots, s_m\}; \bar{T} = \{t_1, \dots, t_k, \dots, t_n\}$. Заметим, что $\bar{T} \cap \bar{S} = \emptyset$. Введем две дополнительные вершины s и t , полагая для каждой дуги (s, s_i) и (t_j, t) стоимость увеличения их пропускной способности на единицу равной $c_{ss_i} = \infty, i = \overline{1, m}; c_{t_j, t} = \infty, j = \overline{1, n}$. Все выходящие (в том числе и неориентированные) дуги из вершины l_p остаются инцидентными вершине s_p , причем полагая для них: $d_{s_p, i} = d_{l_p, i}; c_{s_p, i} = c_{l_p, i}$. Аналогично для всех входящих в вершину l_p дуг полагая: $d_{j, t_p} = d_{j, l_p}; c_{j, t_p} = c_{j, l_p}$. Обозначим через

U_{l_p} множество неориентированных дуг, инцидентных вершине $l_p, p = \overline{1, k}$.

Рассмотрим задачу оптимального синтеза многополюсной сети в первой постановке. Будем считать пропускные способности дуг: $d_{ss_i} = v_{s_i}, s_i \in S \setminus S'; d_{ss_i} = v_{s_i} + \Delta v_{s_i}, s_i \in S'$. Соответственно для дуг (t_j, t) имеем: $d_{t_j, t} = v_{t_j}, t_j \in T \setminus T'; d_{t_j, t} = v_{t_j} + \Delta v_{t_j}, t_j \in T'$. Пропускные способности дуг $(t_p, s_p), p = \overline{1, k}$ будем полагать неограниченными.

Необходимо синтезировать новую сеть, увеличив пропускные способности дуг (i, j) на величину y_{ij} таким образом, чтобы полученный максимальный поток в сети отвечал требуемым параметрам, а суммарная стоимость этого преобразования была минимальной. Матрицу $Y = \|y_{ij}\|$, порядок которой определяется числом вершин сети, будем называть матрицей синтеза сети, а если она удовлетворяет требуемым условиям – матрицей оптимального синтеза. Величина $C(Y) = \sum c_{ij} y_{ij}$ равна стоимости синтеза сети.

Теорема 1. Если $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ – матрица оптимального синтеза сети $G(\bar{V}, \bar{U})$, то матрица $Y^0 = \|y_{ij}^0\|_{rxr}$, где

$$\left. \begin{aligned} y_{ij}^0 &= \bar{y}_{ij}^0, \text{ если } (i, j) \notin \bigcup_{p=1}^k U_{l_p} \text{ и } i, j \neq s, t; \\ y_{it_p}^0 &= \bar{y}_{it_p}^0 - \bar{y}_{s_p, t_p}^0, y_{t_p, i}^0 = 0, \text{ если } \bar{y}_{it_p}^0 - \bar{y}_{s_p, t_p}^0 > 0; \\ &\quad (i, l_p) \in U_{l_p}, p = \overline{1, k}; \\ y_{t_p, i}^0 &= \bar{y}_{s_p, i}^0 - \bar{y}_{it_p}^0, y_{it_p}^0 = 0, \text{ если } \bar{y}_{s_p, i}^0 - \bar{y}_{it_p}^0 < 0; \\ &\quad (i, l_p) \in U_{l_p}, p = \overline{1, k}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

является матрицей оптимального синтеза сети $G(V, U)$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует матрица синтеза сети $Y = \|y_{ij}\|$ такая, что $\sum_{i,j} c_{ij} y_{ij} < \sum_{i,j} c_{ij} y_{ij}^0$. Построим матрицу

$\bar{Y} = \|\bar{y}_{ij}\|$ синтеза сети $G(\bar{V}, \bar{U})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{y}_{si} &= y_{ji} = 0, \forall i, j \in \bar{V}; \\ \bar{y}_{i_p} &= y_{i_p}, \bar{y}_{s_p} = y_{i_p}, \forall i \in V; \\ \bar{y}_{i_p s_p} &= 0, p = \bar{1}, \bar{k}.\end{aligned}$$

Все остальные элементы матриц $\bar{Y}$ и Y совпадают.

Если $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ – оптимальное преобразование приведенной однополюсной сети $G(\bar{V}, \bar{U})$, то из того, что $\bar{y}_{s_p}^0 > 0$, следует, что $\bar{y}_{i_p}^0 = 0$, и наоборот. Действительно, в противном случае t_p, s_p, i образуют цикл $(t_p, s_p), (s_p, i), (i, t_p)$, по которому можно уменьшить поток (а соответственно и пропускные способности дуг), не изменив при этом суммарного потока из источника в сток, что противоречит оптимальности матрицы синтеза $\bar{Y}^0$. Но отсюда следует, что стоимость синтеза $C(\bar{Y}^0)$ равна стоимости синтеза $C(Y^0)$.

Поскольку поток по дуге ориентирует ее естественным образом, величины y_{i_p} и y_{i_p} не могут одновременно быть положительными. Тогда стоимости синтеза $C(\bar{Y})$ и $C(Y)$ также равны. Но отсюда следует $C(\bar{Y}^0) > C(\bar{Y})$, что противоречит оптимальности матрицы синтеза $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ сети $G(\bar{V}, \bar{U})$.

Таким образом, для отыскания оптимального синтеза $Y^0 = \|y_{ij}^0\|$ многополюсной сети $G(V, U)$ достаточно найти оптимальный синтез $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ однополюсной приведенной сети $G(\bar{V}, \bar{U})$.

Алгоритм нахождения оптимального синтеза сети $G(V, U)$. Начальный шаг. Строим однополюсную приведенную сеть $G(\bar{V}, \bar{U})$, как описано выше. Полагаем все элементы матрицы $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ равными нулю, а $\bar{X}^0 = \|\bar{x}_{ij}^0\|$ – максимальный поток в сети $G(\bar{V}, \bar{U})$ величины v , $v^0 = v + \Delta v$.

Шаг 1. Для имеющегося потока определяем матрицу модифицированных дуговых весов:

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{ij} < d_{ij}; \\ c_{ij}, & \text{если } x_{ij} \geq d_{ij}; \\ -c_{ij}, & \text{если } x_{ji} > d_{ji}. \end{cases}$$

Элементы матрицы $R = \|r_{ij}\|$ полагаем равными: $r_{ij} = j, i, j = \bar{1}, \bar{V}$.

Шаг 2. Последовательно для вершин $k = 1, 2, \dots, \bar{V}$ осуществляем тернарные операции $c_{ij}^* = \min(c_{ij}^*, c_{ik}^* + c_{kj}^*)$, $i \neq j \neq k$, полагая при этом:

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } c_{ij}^* \leq c_{ik}^* + c_{kj}^*; \\ r_{ik}, & \text{если } c_{ij}^* > c_{ik}^* + c_{kj}^*. \end{cases}$$

Если $c_{st}^* = \infty$, то переходим к шагу 4, в противном случае – к шагу 3.

Шаг 3. С помощью элементов матрицы R находим путь L минимального веса из источника s в сток t :

$$r_{st} = i_1, r_{i_1 i_2} = i_2, \dots, r_{i_{k-1} i_k} = t, L = \{(s, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, t)\}.$$

Пусть

$$L^+ = \{(i, j) \in L / x_{ij} < d_{ij}\}, L^- = \{(i, j) \in L / x_{ji} > d_{ji}\},$$

$$L^* = \{(i, j) \in L / 0 < x_{ji} \leq d_{ji}\}.$$

Если $L^* = L = \emptyset$, то полагаем $\varepsilon = \min_{(i,j) \in L^+} (d_{ij} - x_{ij})$, в противном случае вычисляем:

$$\varepsilon_1 = \min_{(i,j) \in L^+} (d_{ij} - x_{ij}); \varepsilon_2 = \min_{(i,j) \in L^-} (x_{ji} - d_{ji});$$

$$\varepsilon_3 = \min_{(i,j) \in L^*} (x_{ji} + d_{ij}).$$

Увеличиваем поток из источника s в сток t на величину $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (или до требуемой величины v_0 , если $\varepsilon + v$ ее превосходит), изменяя поток вдоль пути L следующим образом:

$$x_{ij} := x_{ij} + \varepsilon, \text{ если } (i, j) \in L^+;$$

$$x_{ij} := x_{ij} - \varepsilon, \text{ если } (i, j) \in L^- \cup L^*.$$

Если суммарный поток $\{x_{ij}^0\}$ достиг заданной величины, то переходим к шагу 4. В противном случае – к шагу 1.

Шаг 4. Вычисляем матрицу $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ оптимального синтеза приведенной сети $G(\bar{V}, \bar{U})$:

$$\bar{y}_{ij}^0 = \begin{cases} x_{ij}^0 - d_{ij}, & \text{если } x_{ij}^0 > d_{ij}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По формулам (6) находим матрицу $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|_{r \times r}$ оптимального синтеза исходной многополюсной сети $G(V, U)$ с минимальной стоимостью преобразования

$$C = \sum_i \sum_j c_{ij} y_{ij}^0.$$

Поскольку увеличение потока каждый раз осуществляется вдоль пути минимального веса, а вес пути – это затраты, связанные с увеличением потока вдоль этого пути на единицу, то понятно, что суммарные затраты, связанные с синтезом сети заданной величины потока, будут минимальны. Для доказательства корректности алгоритма осталось показать, что на каждом шаге алгоритма не могут возникнуть циклы отрицательного веса, так как алгоритм построения путей минимального веса работает только при отсутствии циклов отрицательного веса.

Действительно, в начале работы алгоритма циклов отрицательного веса нет, так как $x_{ij} \leq d_{ij}$ для всех дуг сети. Предположим, что на некоторой итерации алгоритма при увеличении потока вдоль пути L минимального веса возник отрицательный цикл L^0 . Очевидно, что $L \cap L^0 \neq \emptyset$, так как модифицированные веса изменились только для дуг, входящих в путь L . Причем дуги множества $L \cap L^0$ при увеличении потока вдоль пути L проходят в направлении потока, а в цикле L^0 – в противоположном (т. е. суммарные модифицированные веса C_L^* дуг множества $L \cap L^0$ в направлении потока вдоль пути L положительны) (рис. 1).

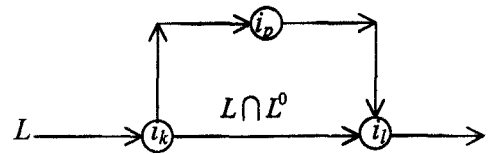


Рис. 1

Это означает, что $-C_L^* + C_{L^0 \setminus L}^* < 0$, т. е. $C_L^* > C_{L^0 \setminus L}^*$. Но тогда вес пути, полученного из пути L заменой дуг множества $L \cap L^0$ на дуги множества $L \setminus L^0$ (т. е. проходящего через вершины i_k, i_p, i_l), меньше веса пути L , что противоречит его минимальности. Корректность алгоритма доказана.

Рассмотрим теперь вторую задачу – максимально увеличить суммарный поток из источников множества $s' \subset S'$ в стоки множества $t' \subset T'$ таким образом, чтобы суммарные затраты на синтез новой сети не превысили заданной величины C .

Для многополюсной сети $G(V, U)$ известны величины потоков $v_{s_i}, i = \overline{1, m}$, выходящих из каждого источника $s_i \in S$ и $v_{t_j}, j = \overline{1, n}$, – потоков, входящих в каждый сток $t_j \in T$. По правилу, описанному выше, для многополюсной сети строим приведенную сеть $G(\bar{V}, \bar{U})$. Определим матрицу $\bar{D} = \|\bar{d}_{ij}\|$ пропускных способностей следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{is} &= 0, i \in V; \bar{d}_{sj} = 0, j \in \bar{V} \setminus \bar{S}; \bar{d}_{ss_i} = v_{s_i}, i = \overline{1, m}; \\ \bar{d}_{ij} &= 0, j \in V; \bar{d}_{it} = 0, i \in \bar{V} \setminus T; \bar{d}_{t_j} = v_{t_j}, j = \overline{1, n}; \\ \bar{d}_{s_p j} &= d_{s_p j}; \bar{d}_{is_p} = d_{is_p}; \bar{d}_{t_p j} = d_{t_p j}; \bar{d}_{it_p} = d_{it_p}, p = \overline{1, k}, \\ & i, j \in \bar{V} \setminus S \cap T. \end{aligned}$$

Величины $\bar{d}_{s_p j}$ и $\bar{d}_{s_p t_p}$ определяются содержанием моделируемой задачи. Здесь мы будем полагать их значения как угодно большими.

Далее формируем матрицу $\bar{C} = \|\bar{c}_{ij}\|$ стоимостей увеличения пропускных способностей дуг приведенной сети на единицу.

Полагаем:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{is} &= \infty, i \in \bar{V}; \bar{c}_{ss_i} = 0, i = \overline{1, m}; \bar{c}_{sj} = \infty, j \in \bar{V} \setminus \bar{S}; \\ \bar{c}_{it} &= \infty, i \in V; \bar{c}_{tj} = 0, j = \overline{1, n}; c_{it} = \infty, i \in \bar{V} \setminus \bar{T}; \\ \bar{c}_{s_pj} &= c_{l_pj}; \bar{c}_{js_p} = c_{jl_p}; \bar{c}_{t_pj} = c_{l_pj}; \bar{c}_{it_p} = c_{il_p}, p = \overline{1, k}; i, j \in \bar{V} \setminus S \cap T.\end{aligned}$$

Заменяя величины $\bar{c}_{t_p s_p}, \bar{c}_{s_p t_p}, p = \overline{1, k}$, определяются содержанием моделируемой задачи. В нашем случае естественно положить $\bar{c}_{t_p s_p} = \bar{c}_{s_p t_p} = 0, p = \overline{1, k}$.

Несложно проверить (аналогично теореме 1), что если $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ – матрица оптимального синтеза приведенной сети $G(\bar{V}, \bar{U})$, то матрица $Y^0 = \|y_{ij}^0\|$ получения по формулам (6) будет матрицей оптимального синтеза исходной многополюсной сети $G(V, U)$, а величина $\Delta v = \sum_i \bar{y}_{si}$ является максимальной величиной,

на которую можно увеличить поток из источников множества $S' \subset S$ в стоки множества $T' \subset T$ таким образом, чтобы суммарные затраты на синтез новой сети не превысили заданной величины C .

Алгоритм максимального увеличения потока с заданным уровнем затрат. Начальный шаг. Строим однополюсную приведенную сеть $G(\bar{V}, \bar{U})$, формируя матрицу $\bar{D} = \|\bar{d}_{ij}\|$ пропускных способностей дуг и матрицу $\bar{C} = \|\bar{c}_{ij}\|$ дуговых весов этой сети, как описано выше. Пользуясь любым из известных алгоритмов [3, 4], строим максимальный поток из источника s в сток t в приведенной сети $G(\bar{V}, \bar{U})$. Полагаем C_ε и все элементы матрицы преобразования $\bar{Y} = \|\bar{y}_{ij}\|$ равными нулю.

Шаг 1. Для потока $X = \|x_{ij}\|$ определяем матрицу модифицированных дуговых весов единичного потока:

$$c_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{ij} < d_{ij}; \\ c_{ij}, & \text{если } x_{ij} \geq d_{ij}; \\ -c_{ji}, & \text{если } x_{ji} > d_{ji}. \end{cases} \quad (7)$$

Элементы матрицы $R = \|r_{ij}\|$ полагаем равными $r_{ij} = j, i = \overline{1, |\bar{V}|}; j = \overline{1, |\bar{V}|}$.

Шаг 2. Последовательно для вершины $k = 1, \dots, |\bar{V}|$ осуществляем тернарные операции $c_{ij}^* := \min(c_{ij}^*, c_{ik}^* + c_{kj}^*)$ для всех $i \neq j \neq k$.

Одновременно с тернарной операцией изменяем элементы матрицы R по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } c_{ij}^* \leq c_{ik}^* + c_{kj}^*; \\ r_{ik}, & \text{если } c_{ij}^* > c_{ik}^* + c_{kj}^*. \end{cases}$$

Шаг 3. Элемент c_{st}^* указывает минимальный вес пути из источника s в сток t , а элементы матрицы R : $r_{st} = i_1, r_{i_1 t} = i_2, \dots, r_{i_{k-1} t} = i_k, r_{i_k t} = t$, указывают этот путь $L = \{s, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k, t\}$.

Далее полагаем $\varepsilon_1 = \min_{(i,j) \in L^+} (d_{ij} - x_{ij})$ для множества L^+ ненасыщенных дуг, проходимых в $(s - t)$ пути L в направлении потока, $\varepsilon_2 = \min_{(i,j) \in L^-} x_{ji}$ для множества L^- дуг (i, j) , проходимым в $(s - t)$ пути L в направлении, противоположном направлению потока.

Если $C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{(i,j) \in L} c_{ij}^* \leq C$, где $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то положим $C_\varepsilon := C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{(i,j) \in L} c_{ij}^*$ и переходим к шагу 4.

Если

$$C_\varepsilon := C_\varepsilon + \varepsilon \sum_{(i,j) \in L} c_{ij}^* > C, \text{ то } \varepsilon = \frac{C - C_\varepsilon}{\sum_{(i,j) \in L} c_{ij}^*}, C = C_\varepsilon,$$

и переходим к шагу 4.

Шаг 4. Увеличиваем поток из источника s в сток t :

$$x_{ij} := \begin{cases} x_{ij} + \varepsilon, & \text{если } (i, j) \in L \setminus L^-, \\ x_{ij} - \varepsilon, & \text{если } (i, j) \in L^-. \end{cases}$$

Если $C_\varepsilon < C$, то переходим к шагу 1. В противном случае алгоритм заканчивает работу. Вычисляем элементы матрицы оптимального синтеза $\bar{Y}^0 = \|\bar{y}_{ij}^0\|$ приведенной сети

$$\bar{y}_{ij}^0 = \begin{cases} x_{ij}^0 - \bar{d}_{ij}, & \text{если } x_{ij}^0 > \bar{d}_{ij}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По формулам (6) находим матрицу оптимального преобразования Y^0 исходной задачи.

Корректность алгоритма следует из того, что, как это было доказано, в сети не возникает циклов отрицательного веса, и по построению матрицы $\bar{C} = \|\bar{c}_{ij}\|$ стоимость оптимального син-

теза исходной многополюсной и приведенной сети совпадают.

ВЫВОД

Получены алгоритмы оптимального синтеза многополюсных сетей, которые могут использоваться при решении любых задач, связанных оптимальным преобразованием динамических систем, допускающих формулировку в терминах теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корзников А. Д., Корзников В. А. Моделирование и оптимизация процесса перемещения грузов в логистической транспортной системе // Вестник БНТУ. – 2003. – № 6. – С. 54–60.
2. Меламед И. И. Методы оптимизации в транспортном процессе // ИНТ ВИНТИ. Сер. организации управления транспортом. – 1991. – № 10. – 165 с.
3. Fulkerson D. R. Increasing the Capacity of a Network, the Parametric Budget Problem // Man. Sci., 5(4), 1959. – P. 472–483.
4. Hu T. C. Minimum Convex Cost Flows // NRLQ, 13(1), 1966. – P. 1–9.

УДК 511.522.2

ПОЛНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

Студ. ЛЕЩИНСКИЙ А. С.

Белорусский национальный технический университет

История великой теоремы Ферма началась в 1637 г., когда французский математик Пьер Ферма (1601...1665) сформулировал теорему, согласно которой при натуральном $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах x, y, z .

Для полного доказательства достаточно доказать две теоремы.

Теорема 1.0. $h_2 \neq 0 \bmod p$, где h_2 – второй множитель числа классов идеалов кругового поля $Q(\zeta_p)$; p – простое нечетное число.

Теорема 2.0. Для простого показателя $p \geq 5$ справедлив второй случай теоремы Ферма, если $h_2 \neq 0 \bmod p$.

Первый случай теоремы Ферма при $h_2 \neq 0 \bmod p$ был доказан Вандивером. В дальнейшем будем использовать обозначение $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

Теорема 2.1. Уравнение

$$x^p + y^p = \varepsilon \pi^{np} z^p,$$

где $x, y, z, \varepsilon \in Z[\zeta + \zeta^{-1}]$, ε – единица кольца, целое $n \geq 1$, простое $p \geq 5$, $\pi = (1 - \zeta)(1 - \zeta^{-1})$, не имеет решений в ненулевых x, y, z .

□ Пусть уравнение имеет решение в ненулевых x, y, z .