

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА И ИНТЕГРАЛА ДИНИ

Докт. физ.-мат. наук МЕЛЕШКО И. Н.

Белорусский национальный технический университет

Интеграл Пуассона

$$P(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau, \quad (1)$$

$$r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

и интеграл Дини

$$D(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau, \quad t = e^{i\tau}, \quad (2)$$

$$z = re^{i\varphi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

играют важную роль в краевых задачах математической физики. Так, решение задачи Дирихле для круга может быть представлено интегралом Пуассона [1, с. 309–318], [2, с. 215–223], а с помощью интеграла Дини можно получить решение задачи Неймана [3, с. 598–600].

Квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами занимают особое место в теории и практике приближенного вычисления определенных интегралов [4].

Важность свойства положительности коэффициентов квадратурной формулы отмечается в [5]. Естественно, что еще большую значимость это качество приобретает, когда коэффициенты – не числа, а некоторые функции.

Полученные в работе квадратурные формулы для интегралов (1), (2) имеют неотрицательные коэффициенты, сравнительно просты, устойчивы и позволяют оценивать погрешности вычислений.

1. Квадратурная формула для интеграла Пуассона. Зададим на отрезке $[-\pi, \pi]$ систему точек:

$$\varphi_k = kh; \quad k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n; \quad h = \frac{2\pi}{2n+1}$$

и приблизим плотность $f(\varphi)$ интеграла Пуассона на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi) \approx \tilde{f}(\varphi) = \sum_{-n}^n \Theta_k(\varphi) f(\varphi_k), \quad (3)$$

где

$$\Theta_k(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \in \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]; \\ 0, & \varphi \notin \left[\varphi_k - \frac{h}{2}, \varphi_k + \frac{h}{2} \right]. \end{cases}$$

Тогда, подставляя интеграл Пуассона (1) вместо плотности ее приближение по (3), получим квадратурную формулу

$$P(r, \varphi) \approx \tilde{P}(r, \varphi) = \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k), \quad (4)$$

где коэффициенты

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\tau-\varphi) + r^2} d\tau. \quad (5)$$

Теорема 1. Коэффициенты квадратурной формулы (4) $A_k(r, \varphi)$ неотрицательны:

$$\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) \equiv 1, \quad r < 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (6)$$

а для их вычисления имеет место единая формула

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[h + 2 \operatorname{Im} \left(\ln \left(1 - ze^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)} \right) - \ln \left(1 - ze^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)} \right) \right) \right], \quad (7)$$

где $z = re^{i\varphi}$, а для логарифмической функции выбрана ветвь, принимающая на промежутке $(-1; 1)$ действительной оси действительные значения.

Доказательство. Так как ядро интеграла Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} > 0, \quad r \neq 1,$$

из представления (5) для коэффициентов $A_k(r, \varphi)$ следует, что они неотрицательны для всех r и φ ($r < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$).

Очевидно, что

$$\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau. \quad (8)$$

Но, как известно, значение интеграла Пуассона с плотностью, равной единице, также равняется единице. Следовательно, справедливо равенство (6).

Заметив, что ядро интеграла Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} = 2\operatorname{Re} \frac{t}{t-z} - 1 \quad (t = e^{i\tau}, z = re^{i\varphi}),$$

а затем, представив $\frac{1}{1-\frac{z}{t}}$ в виде ряда геометрической прогрессии, получим

$$\begin{aligned} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} &= 1 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{t^m} \right) = \\ &= 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} r^m \cos m(\tau-\varphi). \end{aligned}$$

Подставляя теперь это представление ядра Пуассона тригонометрическим рядом в выражение для коэффициентов $A_k(r, \varphi)$ (5), получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} A_k(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} r^m \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \cos m(\tau-\varphi) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[h + 2 \operatorname{Im} \left(\ln \left(1 - ze^{-i(\varphi_k + \frac{h}{2})} \right) - \ln \left(1 - ze^{-i(\varphi_k - \frac{h}{2})} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

приводящие к (7).

Найдем неравенства для оценки погрешности квадратурной формулы (4).

Теорема 2. Пусть плотность интеграла Пуассона $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, тогда имеет место равномерная по r и φ ($r \leq 1; -\pi \leq \varphi \leq \pi$) следующая оценка погрешности приближенной формулы (4):

$$|P(r, \varphi) - \tilde{P}(r, \varphi)| \leq \omega(f; h), \quad (9)$$

где $\omega(f; h)$ – модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|P(r, \varphi) - \tilde{P}(r, \varphi)| \leq \frac{M_1}{2} h; \quad r \leq 1; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (10)$$

$$M_1 = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f'(\varphi)|.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(r, \varphi) - \tilde{P}(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau) - \tilde{f}(\tau)] \times \\ &\times \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau, \end{aligned}$$

где функция $\tilde{f}(\varphi)$ определена формулой (3). В силу положительности ядра Пуассона

$$\begin{aligned} |P(r, \varphi) - \tilde{P}(r, \varphi)| &\leq \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Но, если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \omega(f; h); \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (12)$$

Если же $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то с помощью формулы Тейлора легко установить, что

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \frac{M_1}{2} h; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (13)$$

Так как значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2} d\tau = 1,$$

из неравенств (11)...(13) следуют неравенства (9), (10).

2. Квадратурная формула для интеграла Дини. Преобразуем интеграл Дини

$$D(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \ln \frac{2}{|t-z|} - \frac{\ln 2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau \quad (14)$$

Подставив в представление (14) интеграла Дини вместо плотности ее приближение по формуле (3), получим квадратурную формулу

$$D(r, \varphi) \approx \tilde{D}(r, \varphi) = \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) f(\varphi_k) - \frac{h \ln 2}{\pi} \sum_{-n}^n f(\varphi_k), \quad (15)$$

где коэффициенты

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau. \quad (16)$$

Теорема 3. Коэффициенты квадратурной формулы (15) $A_k(r, \varphi)$ неотрицательны, а для их вычисления имеет место формула

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \left[h \ln 2 + \operatorname{Im} \left(L^2 \left(z e^{-i(\varphi_k - \frac{h}{2})} \right) - L^2 \left(z e^{-i(\varphi_k + \frac{h}{2})} \right) \right) \right], \quad (17)$$

где $L^2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ (дилогарифм Эйлера) [6].

Доказательство. Так как $\ln \frac{2}{|t-z|} > 0$, из представления (16) для коэффициентов $A_k(r, \varphi)$ следует, что они неотрицательны для всех r и φ ($r < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$).

Далее

$$\begin{aligned} A_k(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln 2 d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \ln \frac{1}{|t-z|} d\tau = \\ &= \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} \left(\sum_1^{\infty} \frac{r^k}{k} \cos k(\tau - \varphi) \right) d\tau = \frac{h \ln 2}{\pi} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \left(\frac{r^k}{k^2} \sin k(\tau - \varphi) \right) \Big|_{\varphi_k - \frac{h}{2}}^{\varphi_k + \frac{h}{2}} = \frac{h \ln 2}{\pi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{r^k \sin \left(\varphi - \varphi_k + \frac{h}{2} \right)}{k^2} - \frac{r^k \sin \left(\varphi - \varphi_k + \frac{h}{2} \right)}{k^2} \right] = \\ &= \frac{h \ln 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\sum_1^{\infty} \frac{z^k e^{-i(\varphi_k - \frac{h}{2})}}{k^2} - \sum_1^{\infty} \frac{z^k e^{-i(\varphi_k + \frac{h}{2})}}{k^2} \right] \end{aligned}$$

Последнее равенство приводит к формуле (17).

Получим теперь неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (15).

Теорема 4. Пусть плотность $f(\varphi)$ интеграла Дини (2) непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, тогда имеет место равномерная по r и φ ($r \leq 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi$) следующая оценка погрешности приближенной формулы (15):

$$|D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| \leq 4\omega(f; h) \ln 2, \quad (18)$$

где $\omega(f; h)$ – модуль непрерывности функции $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| \leq 2M_1 h \ln 2, \quad r \leq 1; -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (19)$$

$$M_1 = \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f'(x)|.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned} D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau) - \tilde{f}(\tau)] \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau - \ln 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\tau) - \tilde{f}(\tau)] d\tau \right], \end{aligned}$$

где функция $\tilde{f}(\varphi)$ определена формулой (3). В силу положительности $\ln \frac{2}{|t-z|}$

$$(z = r e^{i\varphi}, t = e^{i\varphi}, r \leq 1).$$

$$\begin{aligned} |D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| &\leq \frac{1}{\pi} \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \times \\ &\times \left[\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{2}{|t-z|} d\tau + \ln 2 \int_{-\pi}^{\pi} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Далее из

$$\ln \frac{1}{t-z} = -\operatorname{Re} \ln \left(1 - \frac{z}{t}\right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{t}\right)^k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k \cos k(\tau - \varphi)}{k}$$

Следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{t-z} d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos k(\tau - \varphi) d\tau = 0.$$

Итак, справедливо неравенство

$$|D(r, \varphi) - \tilde{D}(r, \varphi)| \leq 4 \max_{\varphi \in [-\pi, \pi]} |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \ln 2. \quad (20)$$

Если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$,

$$\text{то } |f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \omega(f; h); \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (21)$$

Если же $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то

$$|f(\varphi) - \tilde{f}(\varphi)| \leq \frac{M_1}{2} h; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (22)$$

Из неравенств (20)...(22) следуют неравенства (18), (19).

3. Пример. Пусть плотность

$$f(\varphi) = \sin \varphi + \varphi \cos \varphi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

В этом случае

$$D(r, \varphi) = \operatorname{Im} \left[\left(z - \frac{1}{z} \right) \ln(1+z) \right], \quad (23)$$

где $\ln(1+z)$ – ветвь логарифмической функции, принимающая на промежутке $(-1; 1)$ действительной оси действительные значения.

Результаты вычислений по точной формуле (23) и по приближенной формуле (15) при $n = 20$, $n = 50$ и $n = 100$ приводим в табл. 1.

Таблица 1

r	$D\left(r, \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{D}_{20}\left(r, \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{D}_{50}\left(r, \frac{\pi}{4}\right)$	$\tilde{D}_{100}\left(r, \frac{\pi}{4}\right)$
0,1	0,041846	0,041666	0,041816	0,041838
0,3	0,161401	0,160827	0,161306	0,161377
0,5	0,322505	0,321498	0,322340	0,322464
0,7	0,518788	0,517311	0,518545	0,518727
0,9	0,745141	0,743161	0,744816	0,745059

Численный эксперимент подтверждает эффективность и устойчивость квадратурной формулы (15).

ВЫВОД

Для интеграла Пуассона и интеграла Дини получены квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами. Равномерные оценки погрешностей приближенных формул позволяют вычислять эти интегралы с заданной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
5. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.