УДК 53.088

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ВАРИАЦИИ ПРИ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Докт. техн. наук, проф. ОСИПОВ С. Н.

Белорусский национальный технический университет

Около 100 лет назад К. Пирсон предложил в качестве относительной меры рассеяния стохастической величины вокруг среднего значения использовать коэффициент вариации

$$K_в = \frac{\sigma}{\bar{x}}, \qquad (1)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение, имеющее размерность $\bar{x}$; $\bar{x}$ – средняя величина (центр рассеяния).

Главным преимуществом $K_в$ является его безразмерность, что позволяет сравнивать рассеяние значений самых разнообразных процессов. По аналогии с известными критериями Рейнольдса, Нуссельта, Архимеда и т. п. $K_в$ можно назвать критерием рассеяния (стохастического колебания) параметра x.

Однако первоначально $K_в$ относился к определенной относительно стабильной величине $\bar{x}$. Поэтому для расширения области применения $K_в$ в дальнейшем было введено понятие относительного коэффициента вариации $K_{в.о}$, который определяется по (1), но σ выражается в долях от $\bar{x}$, которое принимается за 1. Такое выражение $K_{в.о}$ позволяет использовать его для оценки стохастического разброса экспериментальных значений вокруг аппроксимирующей кривой, полученной теоретически или с помощью корреляционного (дисперсного) анализа.

В свою очередь $K_в$, как всякий параметр, описывающий стохастический процесс, характеризуется определенной погрешностью, которую можно оценить согласно [1] по формуле

$$\Delta K_в = \frac{tK_в}{\sqrt{2n}}, \qquad (2)$$

где t – предел интегрирования функции распределения случайной величины ($\pm t$), иногда называемый коэффициентом надежности, соответствующий определенному доверительному интервалу и виду распределения; n – количество экспериментальных значений, использованных для статистической обработки.

Если функция распределения случайной величины соответствует закону Гаусса, то для обеспечения надежности 90 % (5%-я двусторонняя квантиль) необходимо $t = \pm 1{,}64$. При односторонней квантили 5 % и $t = 1{,}64$ обеспечивается надежность 95 %, что рекомендуется СТБ ИСО 5725-1–2002 … 5725-6–2002. Необходимость использования односторонней квантили часто возникает на практике.

Таким образом, если необходимо определить $K_в$ с заданной оценкой надежности N, то производить расчет следует по уточненной формуле

$$K_{в.п} = K_в + \Delta K_в, \qquad (3)$$

что при небольших n (3…5) может значительно увеличить расчетную величину $K_{в.п}$.

В последние годы широкое распространение получила методика робастного проектирования производственных процессов Г. Тагучи [2, 3], пример практического использования которой приведен в [4]. В этой методике использованы понятия «сигнал» (управляемый фактор) и «шум» (неуправляемый, т. е. случайный фактор).

Для экспериментатора определяемая величина $\bar{x}$ является сигналом, чему мешает ее стохастичность, характеризующая шум. Отношение сигнала (с) к шуму (ш) по Г. Тагучи описывается формулой

$$\frac{с}{ш} = 10\lg\left(\frac{\bar{x}^2}{\sigma^2}\right). \qquad (4)$$

Тогда с учетом (1) и (2) можно записать

$$\frac{\text{с}}{\text{ш}} = 10\lg\left(\frac{1}{K_{\text{в}}^2\left(1+\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)}\right). \qquad (5)$$

Как видно из приведенной формулы, с ростом $K_{\text{в}}$ и уменьшением n отношение с/ш постоянно снижается и может достигнуть уровня, когда сигнал не удается надежно выделить из шума. Тогда проведенные эксперименты не принесут ожидаемого результата. Поэтому очень важно правильно оценить предельную величину с/ш. Оказывается [5], что без использования специальной аппаратуры и программного обеспечения для отчетливого выделения сигнала из шума необходимо с/ш ≥ 5.

Из представленной на рис. 1 номограммы, построенной по (5), видно, что для достижения с/ш ≥ 5 при любом значении $n \geq 2$ необходимо, чтобы $K_{\text{в}} \leq 0{,}3$. С ростом количества используемых экспериментальных значений с 2 до 100 максимально допустимая величина $K_{\text{в}} = K_{\text{в.п}}$ изменяется примерно от 0,3 до 0,5. Для с/ш = 10 при $n = 2\ldots100$ имеем $K_{\text{в.п}} \leq 0{,}18\ldots0{,}33$. В случае отсутствия учета погрешности $K_{\text{в}}$, т. е. при $n \to \infty$, предельно допустимая величина $K_{\text{в.п}} \leq$ $\leq 0{,}58$ при с/ш = 5 и 0,33 – при с/ш = 10.

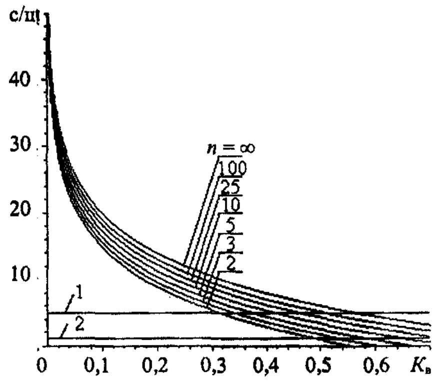

Рис. 1. Зависимость отношения с/ш от величины коэффициента вариации и количества экспериментальных значений: 1 – с/ш = 5; 2 – 1

Как видно из приведенных на рис. 2 зависимостей $K_{\text{в.п}} = f(K_{\text{в}}, n)$, с ростом величины $K_{\text{в}}$ и уменьшением n значение $K_{\text{в.п}}$ увеличивается и при $K_{\text{в}} = 0{,}3$ и $n = 2\ldots5$. В исследованиях физико-механических свойств грунтов, многих теплоизоляционных и композитных строительных материалов часто встречается, что расчетная величина $K_{\text{в.п}} = 0{,}45\ldots0{,}55$. Это требует корректировки методик проведения испытаний и даже прочностной оценки материала. Известные случаи нарушения фундаментов и силовых элементов зданий могут быть связаны с недостаточным учетом стохастичности прочностных свойств.

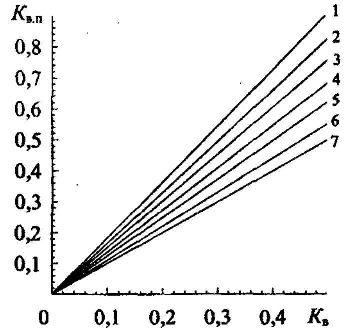

Рис. 2. Влияние величины коэффициента вариации и количества экспериментальных значений на расчетную величину $K_{\text{в.п}}$ при 5%-й односторонней квантили: 1…7 – соответственно n = 2; 3; 5; 10; 25; 100; ∞

Необходимо отметить, что, как показали исследования В. Вейбула [6], распределение наблюдающихся значений прочности хрупких материалов, каковыми является подавляющее большинство строительных материалов и горных пород, имеет одновершинный вид, но не соответствует закону Гаусса.

Наши исследования предельной пластической прочности формовочной массы для изготовления керамического кирпича (около 1200 определений) свидетельствуют о том, что в зависимости от обработки и условий формования виды распределений изменяются от закона Гаусса через логнормальное и гамма до экспоненциального. Однако везде четко прослеживается одновершинность распределений.

Для таких случаев авторы [7] рекомендуют $t = 1{,}6$, что обеспечивает 5%-ю квантиль. Основным достоинством оценки разброса случайных величин средним квадратическим значением σ является возможность определения дисперсии суммы статистически независимых величин как суммы их дисперсий [7] безотносительно к разнообразию законов распределения каждой из суммируемых величин и деформации законов распределения при образовании композиций.

В случае мультипликативного разброса результатов измерений [7] величина относительного коэффициента вариации остается постоянной на всех участках аппроксимирующей кривой, что свидетельствует о прямой пропорциональности факторов случайности с измеряемой величиной. При аддитивном разбросе случайных значений измеряемой величины, не зависящей от ее значений, можно предполагать также определенную независимость влияния случайных и закономерных факторов.

Приведенные на рис. 1 результаты расчетов впервые дают возможность обоснованно разделить $K_в$ на два класса по принципу надежного (~95 % при односторонней квантили 5 %) определения среднего значения исследуемого параметра $\bar{x}$: 1-й класс – при $0 < K_в \leq 0,3$ и 2-й класс – при $0,3 < K_в < 0,6$. В 1-м классе искомое расчетное значение x можно определять при $n \geq 2$, если функция распределения значений не имеет каких-либо особенностей (разрывы, осцилляции, сингулярности и т. п.), во 2-м – обязательно необходимо учитывать минимальное количество определений в зависимости от величины $K_в$. Насколько это необходимо, видно даже из приведенных в кадастре физических свойств горных пород [8], где для руды марганцевой среднезернистой окисленной (рудник Ихтвиси) Чиатурского месторождения приведено: временное сопротивление сжатию $\bar{x}$ = = 2 МПа; $n = 3$ и $K_в = 0,57$. При таких значениях n и $K_в$ с/ш ≈ 1, т. е. уровень сигнала соответствует шуму и, следовательно, надежность определения $x_р$ близка к нулю. В этом же кадастре [8] и другой технической литературе встречается немало таких случаев. Также необходимо отметить, что поскольку распределение частных средних ограниченных выборок $\bar{x}$ относительно среднего всей совокупности $\bar{X}$ распределяется со стандартным отклонением $\sigma/\sqrt{n}$, то при больших значениях σ (соответственно $K_в$) и малых n сами частные средние определяются в широких доверительных интервалах.

Под коэффициентом статистического запаса, например прочности образцов определенного материала, понимается величина

$$K_с = \frac{1}{1 - tK_в\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2n}}\right)}, \qquad (6)$$

которая показывает, во сколько раз необходимо уменьшить $\bar{x}$, чтобы с надежностью 0,95 получить расчетную величину прочности. В таком случае при $t = 1,6$ зависимости $K_с = f(K_в, n)$ в виде номограммы представлены на рис. 3, из которого видно, что с увеличением $K_в$ и уменьшением n величина $K_с$ увеличивается. Предельные значения $K_с \approx 5$ несколько меньше сочетания $K_{в.п}$ и n для с/ш = 5 (рис. 1).

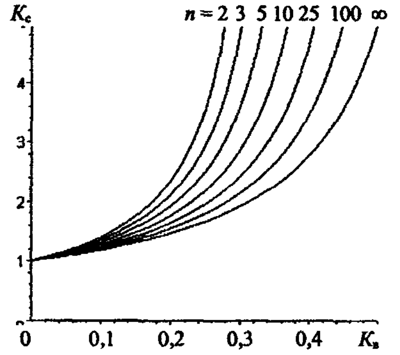

Рис. 3. Зависимость коэффициента статистического запаса от величины коэффициента вариации и количества экспериментальных значений

Пользуясь этой номограммой можно оценить выгоду увеличения количества экспериментальных исследований образцов на прочность при соответствующем уменьшении $K_с$ или наоборот. Так, если $K_в = 0,2$, то увеличение n с 2 до 10, т. е. в 5 раз, позволяет уменьшить $K_с$ с 2,5 до 1,6, т. е. на 36 %, и соответственно только за счет более точного определения свойств получить существенную экономию материала.

Кроме статистического запаса прочности, необходимо учитывать структурно-механический, динамический и т. п. [9], в результате чего общие значения коэффициентов запасов прочности для хрупких материалов достигают 9, а для пластичных при повторно-переменных нагрузках – 15.

За последние 80 лет все большее применение, особенно при выполнении диссертационных работ, находит так называемое «научное планирование» экспериментов, основанное в общем на принципах дисперсного анализа и позволяющее минимизировать количество экспериментов для многофакторных зависимостей [10]. Следует отметить, что изложенное выше предложение по использованию идеи Г. Тагучи ни в коей мере не противопоставляется другим известным методам (корреляционный анализ, статистика экстремальных значений, дисперсный анализ и др.), а только позволяет их дополнить в части оценки необходимого объема экспериментальных определений.

Как известно, в результате корреляционного и дисперсного анализов удается с определенной вероятностью установить связь между двумя или несколькими (дисперсный анализ) факторами, а также получить достаточно ограниченную по выбору простую аппроксимирующую зависимость. А вот оценить ее точность и надежность в статистическом понимании наиболее просто и наглядно с помощью коэффициентов вариации. Большой опыт определения корреляционных зависимостей показывает, что даже при коэффициенте линейной корреляции 0,99 величина $K_{в.о}$ может достигать 0,2...0,25. Поэтому при выборе методики планирования проведения экспериментальных работ необходимо рассматривать различные варианты в зависимости от поставленных целей. Следует отметить, что для достижения хотя бы 90 % надежности определения величины $K_в$ при $(K_в/\Delta K_в) \geq 5$ необходимо проделать 21 эксперимент.

ВЫВОД

1. Применение идей Г. Тагучи к характеристике значений коэффициентов вариаций позволяет по новому оценить надежность получаемых результатов экспериментальных исследований и доверительные границы некоторых показателей строительных материалов, горных пород и различных видов взаимодействий, где существенную, а зачастую определяющую роль играют стохастические процессы.

2. При планировании проведения экспериментальных работ в зависимости от поставленных целей необходимо выбирать соответствующую статистическую модель и обязательно учитывать влияние величин коэффициентов вариации и количества экспериментальных определений на стохастические и практические результаты исследований.

3. При анализе результатов экспериментов следует обращать внимание на изменение величин относительных коэффициентов вариации на отдельных участках полученных аппроксимирующих зависимостей и выявлять причины этого явления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бажин Н. П., Петров В. А.** Статистическая обработка результатов испытаний физико-механических свойств кембрийских глин // Горное давление, сдвижение горных пород и методика маркшейдерских работ: Сб. ВНИМИ. – Л.: Недра, 1966. – С. 13–21.

2. **Taguchi G.** System of experimental desing // Jikken keikakuho (3-rd ed., Vol. I and II); Tokyo: Mazuzen. English translation edited by D. Clausing. New York: UNIPUB / Kraus International.

3. **Taguchi G.** Taguchi methods Case Studies from the U.S. and Europe-American Supplier Institute, 1989. – Vol.6.

4. **Серенков П. С., Романчак В. М., Короневич Э. М.** Концепция робастного проектирования процессов в рамках системы менеджмента качества. – Новости. Стандартизация и сертификация. – 2004. – № 2. – С. 64–67.

5. **Андрейко С. С., Калугин П. А., Щерба В. Я.** Газодинамические явления в калийных рудниках. – Мн.: Вышэйш. шк., 2000. – 336 с.

6. **Кингери У. Д.** Введение в керамику. – М.: Стройиздат, 1967. – 500 с.

7. **Новицкий П. В., Зограф И. А.** Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 248 с.

8. **Справочник** (кадастр) физических свойств горных пород. – М.: Недра, 1975. – 280 с.

9. **Справочник** по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев, В. Н. Заяц, П. Н. Макарук // Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с.

10. **Браунли К. А.** Статистические исследования в производстве / Под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 228 с.